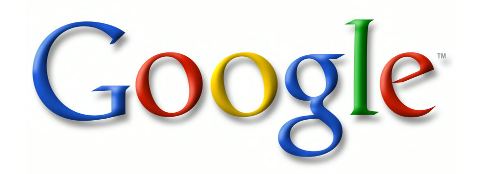
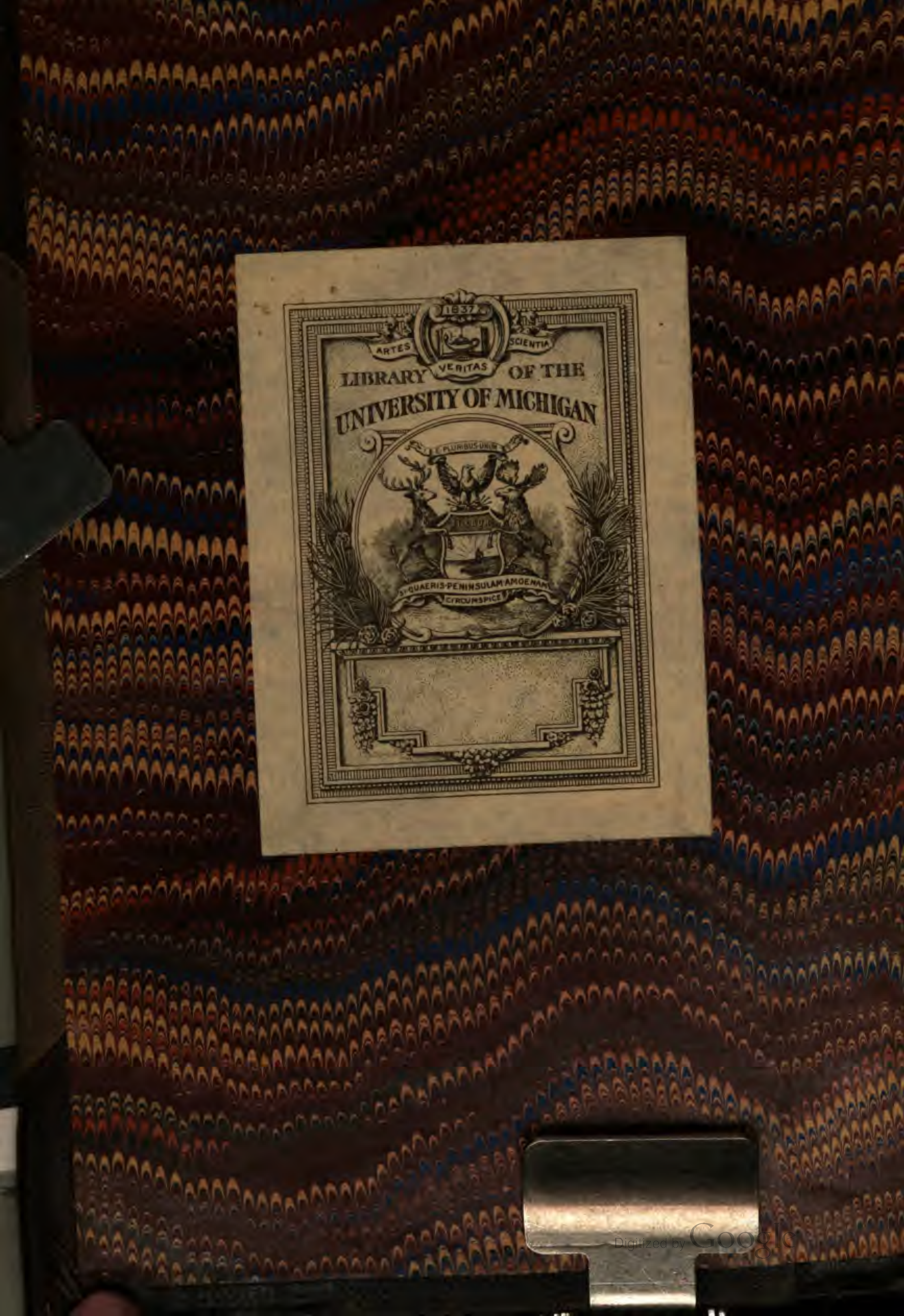
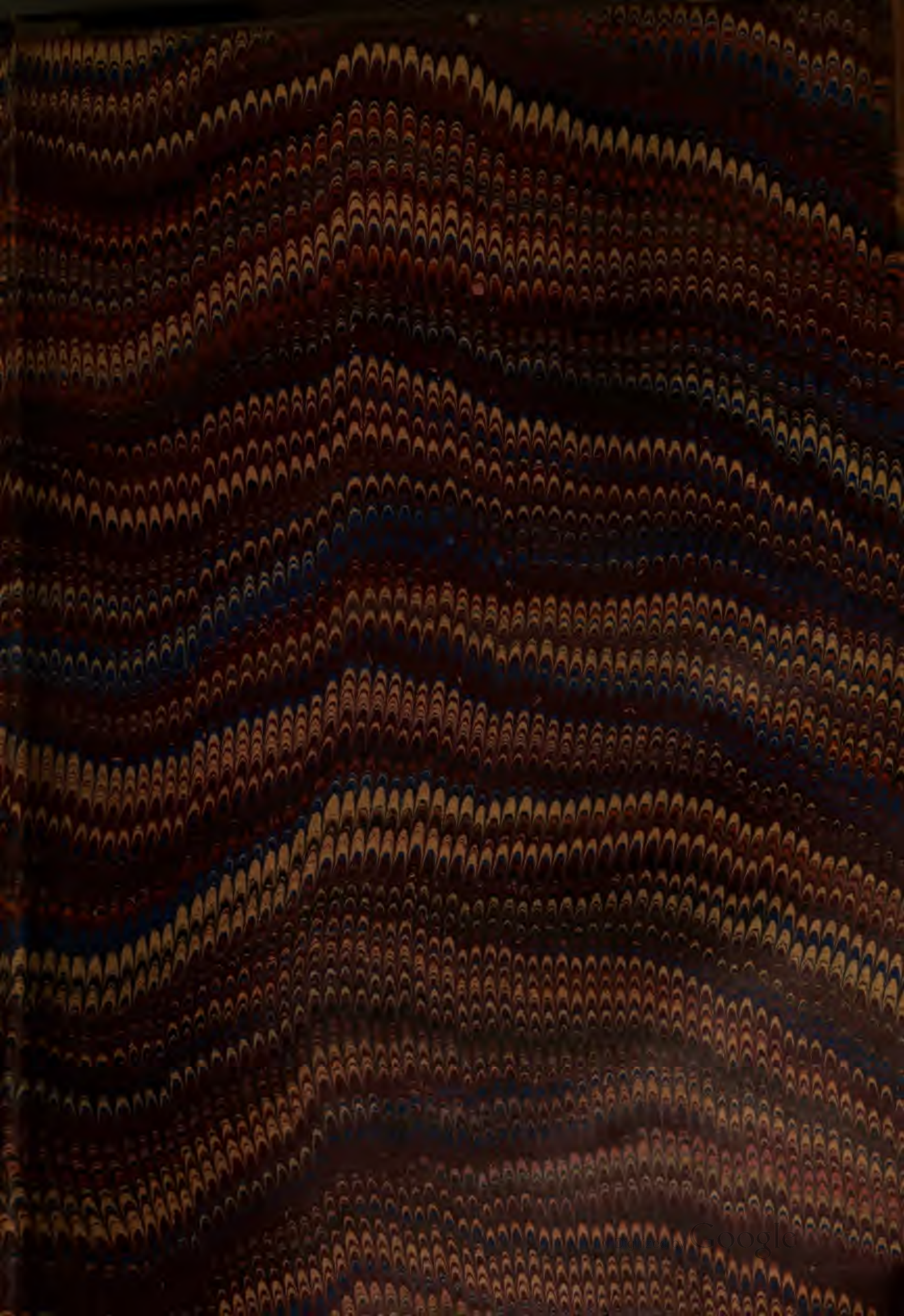
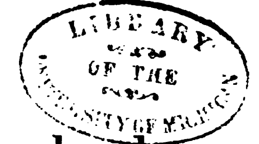



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





Die

Differential- und Integralrechnung,

umfassend

und

mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt

von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Zweiter Band.

Mit 15 in den Text eingedruckten Figuren.

Zweite, umgearbeitete Auflage.



Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.
1862.

Vorwort.

Der zweite Band hat ebenfalls vielfache Umänderungen und Zusätze erhalten, wodurch er — wie ich hoffe — an Werth gewonnen hat.

Die im Vorwort zur ersten Auflage schon versprochene „Integration der partiellen Differentialgleichungen" wird als dritter Band des gegenwärtigen Buches nach einigen Monaten erscheinen, als selbstständiges Werk aber ebenfalls anzusehen seyn, in so ferne die beiden ersten Bände und dieser dritte auch gesondert von einander werden abgegeben werden.

Von der ersten Auflage ist mir während des Drucks der zweiten der erste Band einer russischen Uebersetzung, die in St. Petersburg erscheint, zugekommen. Dieselbe ist ohne mein Zuthun oder Wissen veranstaltet worden.

Nachstehend noch einige Zusätze, die manchem Leser vielleicht nicht unerwünscht sind.

Zu §. 4.

Es ist

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i;\ (a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i;$$

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i;$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i;\ \frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

$$\frac{1}{a+bi+x}=\frac{1}{a+bi}\,\frac{1}{1+\frac{x}{a+bi}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\,\frac{1}{1+\frac{(a-bi)x}{a^2+b^2}}.$$

$$\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha;$$

$$\frac{1}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-n}=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n.$$

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^{-n} = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n} = \frac{1}{\cos n\alpha + i \sin n\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha,$$

n positiv und ganz.

Die Sätze in III gelten auch, wenn man überall $-i$ für i setzt.

Zu §. 13, I.

Man kann hier einen Anstand finden, wenn x negativ also $l(x)$ imaginär ist. Allein es folgt dann aus $y = x^m$ auch $y^2 = x^{2m} = (x^2)^m$, $l(y^2) = m\, l(x^2)$, $\frac{\partial l(y^2)}{\partial x} = m \frac{\partial l(x^2)}{\partial x}$. Da aber $\frac{\partial l(x^2)}{\partial x} = \frac{\partial l(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ [wenn $x^2 = u$] $= \frac{1}{u} \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$ und eben so $\frac{\partial l(y^2)}{\partial y} = \frac{2}{y}$, so hat man immerhin

$$\frac{\partial l(y^2)}{\partial x} = \frac{\partial l(y^2)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = m \frac{\partial l(x^2)}{\partial x} = \frac{2m}{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{my}{x} = m x^{m-1}.$$

Zu §. 15, I.

Wir haben mehrfach darauf aufmerksam gemacht, dass $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ denselben Werth haben muss, ob Δx von positiver oder negativer Seite gegen Null gehe (§. 11, IV). In den Beispielen des §. 11 zeigten wir diess thatsächlich, und da diese für alle andern massgebend sind, so gilt es auch für letztere.

Es lässt sich aber auch unmittelbar zeigen dass

$$Gr \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Gr \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x},$$

wenn Gr sich auf ein gegen Null gehendes Δx bezieht. Denn ist (für $\Delta x > 0$):

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \alpha\right] \Delta x = [f'(x) + \alpha] \Delta x,$$

so ergibt sich, indem man $x - \Delta x$ statt x setzt:

$$f(x) - f(x - \Delta x) = [f'(x - \Delta x) + \alpha_1] \Delta x,$$

wo α_1 der Werth ist den man aus α erhält, wenn man $x - \Delta x$ statt x setzt, wo also immerhin $Gr\, \alpha_1 = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = f'(x - \Delta x) + \alpha_1,$$

$$\frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = f'(x - \Delta x) + \alpha_1,$$

$$Gr \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = f'(x),$$

wodurch die Behauptung erwiesen ist. Dieser Beweis setzt voraus, dass $f'(x+\Delta x)$ und $f'(x-\Delta x)$ gegen denselben Werth hingehen, wenn Δx gegen Null geht, d. h. dass $f'(x)$ einwerthig ist. * (So lange eine Funktion stetig ist, muss sie übrigens einwerthig seyn.)

Zu §. 41, I.

Der Satz in §. 15, I setzt voraus, dass $F(x)$ für x und $x+\Delta x$ dieselbe stetige Funktion sey, und dass $F(x+\Delta x)-F(x)$ mit Δx unendlich klein werde. Diese Voraussetzung muss also für alles hier Gesagte in Geltung bleiben, d. h. $F(x)$ muss von a bis b dieselbe Funktion von x seyn und stetig verlaufen.

Zu §. 42, IV.

Wird

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z$$

gesetzt, so muss wenn x (stetig) von a bis b geht, auch z von α bis β gehen. Bei Schwierigkeiten wird man also x von a bis b gehen lassen und sehen wie z verläuft. Setzt man etwa in

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1+\sin^2 x} : \sin x = z,$$

so geht z wenn x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, stetig von 0 bis 1, dann wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π geht, von 1 bis 0. Man darf also nicht setzen

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1+\sin^2 x} = \int_0^0 \frac{1}{1+\sin^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z,$$

sondern muss das Integral in zwei trennen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{1+\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial x}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{\partial x}{1+\sin^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z + \int_1^0 \frac{\partial x}{1+\sin^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z.$$

Aber

$$\cos x\frac{\partial x}{\partial z} = 1,\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{\cos x} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

wo das obere Zeichen gilt wenn x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, das untere für $x > \frac{\pi}{2}$. Demnach

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)} - \int_1^0 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)} = 2\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)}.$$

---

* Er gilt also nicht, wenn $f'(x)$ die Eigenschaft hätte eine Zeitlang $=\varphi(x)$, dann $\psi(x)$ zu seyn, und man für x gerade den Werth wählen würde, der an der Grenzscheide liegt.

Man ist zu der Trennung ohnehin gezwungen, da man sonst über das Zeichen von $\frac{\partial x}{\partial z}$ nicht entscheiden kann. — Ein solcher Zeichenwechsel in $\frac{\partial x}{\partial z}$ wird aber immer vor sich gehen, wenn indem x stetig von a bis b verläuft (immer wächst wenn $b > a$, oder immer abnimmt wenn $b < a$, wie diess ja in §. 39 gemeint ist) die Grösse z nicht auch von α bis β eben so stetig verläuft, d. h. nur wächst oder nur abnimmt (§. 20, I).

Dass aber z in dieser Art verlaufen muss liegt in der Annahme

$$\int_\alpha^\beta f(x) \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

die sich auf §. 41, I stützt, worin diess vorausgesetzt ist, so wie dass man fortwährend $F(x) = \varphi(z)$ haben muss.

Die Sätze I — III in §. 42 folgen übrigens aus der Erklärung des bestimmten Integrals in §. 39 ganz von selbst, so dass man sich nicht auf §. 41 zu stützen braucht und sie also auch noch gelten, wenn auch $f(x)$ zwischen a und b nicht immer dieselbe Funktion ist (vergl. VIII).

Zu §. 42, VIII, Anmerkung.

Sey $b > a$ und $f(x)$ unendlich für $x = b$. Alsdann sehen wir

$$\int_a^b f(x)\, \partial x$$

als den Gränzwerth von

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)\, \partial x$$

an, dem letztere Grösse mit abnehmendem (positivem) α sich nähert. Ist derselbe ein endlicher, bestimmter, so ist

$$\int_a^b f(x)\, \partial x = Gr \int_a^{b-\alpha} f(x)\, \partial x.$$

Ganz eben so wenn $f(x)$ für $x = a$ unendlich

$$\int_a^b f(x)\, \partial x = Gr \int_{a+\alpha}^b f(x)\, \partial x.$$

Diess kommt aber darauf hinaus $F(b - \alpha) - F(a)$ oder $F(b) - F(a - \alpha)$ zu berechnen und $\alpha = 0$ zu setzen, d. h. die Formel (12) des §. 41 anzuwenden in dem Sinne wie es die fragliche Anmerkung will.

Ein Beispiel bietet

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

das sich nach §. 45 auch geometrisch leicht auslegen lässt.

Zu §. 47, I und §. 49, II.

Man kann hiebei auch in folgender Weise verfahren.

In NN′ schreibe man einen geradlinigen Zug (Vieleck) ein; vermehrt man die Zahl seiner Seiten unaufhörlich, so ist der Gränzwerth seiner Länge gleich der Kurvenlänge.

Ist $PP' = \varDelta x$, so ist die

$$\text{Sehne } QQ' = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2} = \varDelta x \sqrt{1 + \frac{\varDelta y^2}{\varDelta x^2}},$$

wenn $\varDelta x > 0$. Aber

$$\sqrt{1 + \frac{\varDelta y^2}{\varDelta x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \alpha \text{ (§. 15, I)},$$

wo $Gr\ \alpha = 0$. Demnach ist die Summe aller Sehnen

$$= \Sigma \varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \Sigma \alpha \varDelta x,$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle x von a bis b erstreckt. Der Gränzwerth hievon ist

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x \text{ (§. 39, I und §. 7, IV)}.$$

In ähnlicher Weise kann man in §. 49, II verfahren, indem man zuerst den geradlinigen Zug sich um die Axe der x drehen lässt. (Vergl. §. 75, IV.)

Zu §. 78, I.

Sey $\varphi(x)$ konstant und bloss $\psi(x)$ veränderlich; es werde ferner $\psi(x)$ unendlich gross aus irgend welcher Ursache, so wird $F[x, \psi(x)]$ eben den Werth annehmen, den $F(x,y)$ für ein unendlich grosses y erhält. Demnach verhält sich

$$\int_\alpha^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y$$

in diesem Falle genau so wie

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y$$

wenn man (das konstante) β unendlich werden lässt. **Bei bestimmten Doppelintegralen dürfen also unendliche Gränzen sofort als konstant angesehen werden**, d. h. der Satz des §. 77, I hat darauf Anwendung, natürlich immer unter der Voraussetzung dass das Integral selbst einen endlichen Werth hat. — Dabei ist selbstverständlich dass die Formeln in §. 77, I und §. 78, I voraussetzen es seyen f und F immer dieselben stetig verlaufenden Funktionen innerhalb der Integrationsgränzen.

Zu §. 85, I.

Der Satz (43) setzt, wie in §. 85, II (Schluss) bemerkt wurde, wesentlich voraus dass alle Grössen zweiter Seite bestimmte endliche Werthe haben. Sind b und a von α unabhängig, so ist

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = \int_\infty^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x, \qquad \text{(a)}$$

immer unter der wesentlichen Voraussetzung, dass die zweite Seite einen bestimmten endlichen Werth habe. Dann ist aber gleichgiltig, welches die (konstanten) Werthe von a und b seyen, auch wenn dieselben unendlich gross gedacht werden. Man kann desshalb

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,\partial x = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x \qquad \text{(b)}$$

setzen (a konstant nach α), so lange die zweite Seite einen bestimmten endlichen Werth hat.

Es ist begreiflich, dass obgleich

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)\,\partial x$$

einen bestimmten von α abhängenden Werth hat, doch

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x$$

nicht bestimmt und endlich seyn kann, so dass man die Gleichung (b) nicht zulassen darf. Ein solches Beispiel liefert §. 87, II.

Man kann diess auch noch in anderer Weise ersehen. Es ist (b und a unabhängig von α):

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = Gr\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,\partial x.$$

Aber (§. 15, I)

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x.\alpha)}{\partial \alpha} + \beta,$$

wo $Gr\,\beta = 0$; demnach

$$\int_a^b \frac{f(x.\alpha+\Delta\alpha)-f(x.\alpha)}{\Delta\alpha}\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x + \int_a^b \beta\,\partial x$$

und

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x + Gr\int_a^b \beta\,\partial x. \qquad \text{(c)}$$

So lange a und b endlich sind, ist das zweite Glied der zweiten Seite Null; wird aber eine der Gränzen unendlich, so kann es möglicher Weise unbestimmbar seyn. Da

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x$$

immer eine bestimmte Grösse ist, indem wir

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x$$

als bestimmte Funktion von α voraussetzen, so bleibt eben dann

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\partial x = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x - Gr\int_a^b \beta\,\partial x$$

unbestimmt.

Dabei ist zu bemerken dass

$$Gr\int_a^b \beta\,\partial x$$

nur Null oder durchaus unbestimmt seyn kann. Denn es ist immer

$$\int_a^b \beta\,\partial x = \beta'(b-a)$$

wo β' ein Mittelwerth aller Werthe von β ist. Aber $\beta'(b-a)$ könnte, selbst wenn die Differenz $b-a$ unendlich, wo dann $\beta'(b-a)$ die Form $0\,\infty$ annimmt, nur dann einem bestimmten Werthe gleich seyn, wenn β' und $b-a$ von Δx abhängen würden (§. 23), da man sonst $b-a$ in allerlei Weisen gegen Null gehen lassen kann. Null aber kann $\beta'(b-a)$ seyn, da $Gr\,\beta'=0$.

Hat also

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\partial x$$

einen bestimmten (folglich auch endlichen) Werth, so muss

$$Gr\int_a^b \beta\,\partial x = 0$$

seyn, da sonst aus (c) folgen würde, dass

$$Gr\int_a^b \beta\,\partial x$$

einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Werth hätte. Dann fällt (c) mit (b) zusammen.

Sobald hiernach für

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\partial x$$

ein unbestimmter Werth erscheint ist diess ein Zeichen, dass man die unendlich werdende Gränze nicht als von α unabhängig ansehen darf. Wir wollen diess an einem Beispiele näher betrachten.

Es ist (§. 85, III)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\partial x = \frac{\pi}{2},\ \alpha > 0.$$

Demnach jedenfalls

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\partial x = 0. \tag{d}$$

Aber

$$\int_0^\infty \frac{\partial \sin(\alpha x)}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{x} = \int_0^\infty \cos(\alpha x)\,\partial x = \frac{\sin(\alpha \infty)}{\alpha},$$

eine Grösse die geradezu unbestimmbar ist. Betrachten wir nun aber zuerst das Integral

$$\int_0^\mu \frac{\sin x}{x}\partial x$$

und setzen dasselbe $= F(\mu)$, so ist jedenfalls μ als von α unabhängig anzusehen. Setzt man darin $x = \alpha z$, so ist auch

$$F(\mu) = \int_0^{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\sin(\alpha z)}{z}\partial z,$$

also (§. 85, I) da μ von α unabhängig

$$\frac{\partial F(\mu)}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\sin(\alpha z)}{z}\partial z = \int_0^{\frac{\mu}{\alpha}} \cos(\alpha z)\,\partial z - \alpha\frac{\sin \mu}{\mu}\frac{\mu}{\alpha^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\mu}{\alpha}} \cos(\alpha z)\,\partial z - \frac{\sin\mu}{\alpha} = \frac{\sin\mu}{\alpha} - \frac{\sin\mu}{\alpha} = 0,$$

eine identisch richtige Gleichung die für jedes μ gilt, so dass für $\mu = \infty$ wirklich die (d) gefunden wird, woraus aber nicht

$$\int_0^\infty \cos(\alpha x)\,\partial x = 0$$

geschlossen werden darf. Die Grösse ∞ ist in diesem Falle aus $\frac{\mu}{\alpha}$ entstanden.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Frage, wie sich entscheiden lasse ob ein Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,\partial x, \tag{e}$$

wo a eine bestimmte endliche Grösse ist, endlich sey, näher betrachten.

Gesetzt es sey f(x) so beschaffen dass von $x = b$ an, wo b vielleicht sehr gross, aber endlich, diese Funktion immer dasselbe Zeichen habe, welches wir positiv voraussetzen wollen, und es nehme dieselbe von da an beständig ab, so lässt sich aus „Anhang" 𝔄, III die Frage entscheiden.

Ist m ($>$ b) eine positive ganze Zahl, so setze man

$$\int_a^\infty f(x)\,\partial x = \int_a^m f(x)\,\partial x + \int_m^\infty f(x)\,\partial x,$$

wo das erste Integral der zweiten Seite immer endlich ist (§. 39, II), so dass das vorgelegte (e) einen bestimmten endlichen Werth hat wenn

$$\int_m^\infty f(x)\,\partial x$$

in dieser Lage ist.

Aus dem in „Anhang" 𝔄, III bewiesenen Satze folgt aber dass dieses Integral unendlich ist wenn die Reihe

$$f(m+1)+f(m+2)+\ldots\ldots \qquad (f)$$

divergent ist; dass es dagegen einen endlichen Werth hat wenn

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)\ldots\ldots \qquad (g)$$

konvergent ist. Die Reihen (f) und (g) konvergiren und divergiren übrigens gleichzeitig. Unser Satz gilt freilich nur wenn $f(x)$ obigen Bedingungen genügt. Dabei muss jedoch $f(x)$ von $x=b$ an nicht gerade positiv seyn, da wenn diese Grösse dann beständig negativ ist, derselbe Satz sich leicht erweisen lässt.

Mit Vortheil kann man hiebei oft auch den folgenden sofort einleuchtenden Satz anwenden: Ist von $x=a$ bis $x=b$ die Funktion $f(x)$ endlich und positiv, die positive Grösse $F(x)$ innerhalb derselben Gränzen immer kleiner als 1, so ist

$$\int_a^b F(x)\,f(x)\,\partial x < \int_a^b f(x)\,\partial x,$$

welcher Satz auch für $b=\infty$ gilt. Wenn

$$\int_a^b f(x)\,\partial x$$

endlich ist, so bleibt

$$\int_a^b F(x)\,f(x)\,\partial x$$

auch endlich wenn der Werth von $F(x)$ immer zwischen -1 und $+1$ bleibt.

So weil

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2}$$

endlich ist, bleiben auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x}{1+x^2}\,\partial x$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1+x^2}\,\partial x$$

endlich (§. 87).

Nimmt $f(x)$ mit unendlich wachsendem x nicht unbegränzt ab, sondern nähert sich einer bestimmten von Null verschiedenen Gränze, von der es bei grossem x beliebig wenig abweiche, so folgt aus dem Satze des §. 39, II, dass das Integral (e) unendlich gross sey.

Zu §. 85, III.

Man kann Anstand nehmen $\alpha=0$ zu setzen, da die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-a x}\sin b x\,\partial x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

nothwendig $a > 0$ voraussetzt. Setzt man also bloss $\beta = \infty$, so ist sicher

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin b x}{x} \partial x = \frac{\pi}{2} - arc\left(tg = \frac{\alpha}{b}\right).$$

Aber (§. 55, II) $e^{-\alpha x} = 1 - \alpha x e^{-\alpha \Theta x}$ wo Θ zwischen 0 und 1; demnach

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{x} \partial x - \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \Theta x} \sin b x \, \partial x = \frac{\pi}{2} - arc\left(tg = \frac{\alpha}{b}\right).$$

Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \Theta x} \sin (b x) \, \partial x$$

wird für $\alpha = 0$ unbestimmt, aber nicht unendlich; demnach verschwindet

$$\alpha \int_0^\infty e^{-\Theta \alpha x} \sin b x \, \partial x$$

für $\alpha = 0$ und man zieht aus vorstehender Gleichung, indem man beiderseitig α zu Null werden lässt, die (d).

Zu §. 132, IV.

Ob die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sämmtlich verschiedene Funktionen sind, ergibt sich einfach daraus, ob man mittelst der (i) die Grössen y, z, . . . durch x und die Konstanten ausdrücken kann. Wenn diess angeht, so müssen die φ alle verschieden seyn, d. h. keine der Gleichungen (i) folgt aus den übrigen.

Zu §. 136, IV.

Man könnte auch setzen wollen

$$(1 + a i)^{-\frac{1}{2}} = -r^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

und

$$(1 - a i)^{-\frac{1}{2}} = -r^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Diess käme darauf hinaus, die Integrale negativ zu finden, was unzulässig ist. Ueberhaupt nehmen wir ja die Quadratwurzel nur mit ihrem positiven Werthe.

Zu §. 143, II.

Wir haben kurzweg $f'(z)$ als unendlich angenommen wenn $f(z)$ springt. Man kann diess bestreiten, jedenfalls ist aber $f'(z)$ alsdann unbestimmbar, was in I nicht zulässig ist, so dass die Nothwendigkeit des Beweises, wie die Form desselben bestehen bleibt. Es handelt sich somit nur um die Annahme, dass $f(z)$ von $\alpha - \varepsilon$ bis α dieselbe Funktion bleibe, und dann wieder von $z = \alpha$ bis $\alpha + \varepsilon$, was wohl immer erlaubt ist.



Zu §. 147, I.

Sey etwa für die Reihe $A_{n,n'} \sin \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi y}{c'}$ angenommen, dass $f(x, y)$ gleich 1 seyn soll für alle Punkte welche innerhalb eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks liegen, dessen Seiten zu Gleichungen haben: $y = 0$, $y = x$, $x = c$, und dass jenseits dieser Gränzen $f(x, y)$ Null sey.* Alsdann ist

$$A_{n,n'} = \frac{4}{c\,c'} \int_0^c \partial u \int_0^u \sin \frac{n\pi u}{c} \sin \frac{n'\pi v}{c'} \partial v.$$

Setzt man hier $c' = c$, so ist

wenn n und n′ verschieden:

$$A_{n,n'} = \frac{4}{n\,n'\pi^2}(1 - \cos n\pi) + \frac{4n}{n'(n'^2 - n^2)\pi^2}(1 - \cos n\pi \cos n'\pi),$$

wenn n und n′ gleich:

$$A_{n,n'} = \frac{4}{n\,n'\pi^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi).$$

Ist nun n eine ungerade Zahl und n′ auch, so ist diess $= \frac{8}{n\,n'\pi^2}$,

„ „ n „ „ „ „ n′ gerade, „ „ $= \frac{8n'^2}{n\,n'(n'^2 - n^2)\pi^2}$,

„ „ n „ gerade „ „ n′ ungerade, „ „ $= \frac{8n^2}{n\,n'(n'^2 - n^2)\pi^2}$,

„ „ n „ „ „ „ n′ gerade, „ „ $= 0$.

Daraus folgt dass

$$\frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{1}{(2n+1)(2n'+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{c} \sin \frac{(2n'+1)\pi y}{c}$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{2n'}{(2n+1)\,[(2n')^2 - (2n+1)^2]} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{c} \sin \frac{2n'\pi y}{c}$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{2n}{(2n'+1)\,[(2n'+1)^2 - (2n)^2]} \sin \frac{2n\pi x}{c} \sin \frac{(2n'+1)\pi y}{c} = 1,$$

wo jeweils die doppelten Summenzeichen sich auf $n = 0, 1, \ldots;\ n' = 0, 1, \ldots$ beziehen. Offenbar kann man auch setzen:

$$\frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{1}{(2n+1)(2n'+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{c} \sin \frac{(2n'+1)\pi y}{c}$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{2n}{(2n'+1)\,[(2n'+1)^2 - (2n)^2]} \left[\sin \frac{2n\pi x}{c} \sin \frac{(2n'+1)\pi y}{c} - \sin \frac{(2n'+1)\pi x}{c} \sin \frac{2n\pi y}{c} \right] = 1. \qquad \text{(a)}$$

---

* D. h. $f(x, y)$ Null sey wenn x zwischen 0 und c und y zwischen x und c′; aber 1 sey für x von 0 bis c und y von 0 bis x.

In dieser Gleichung muss $0 < x < c$, $y \overline{\overline{<}} x$ seyn. Vertauscht man x und y (macht also $y > x$), so muss die erste Seite zu Null werden, wie die Annahme in Bezug auf $f(x, y)$ aussagt. Desshalb ist

$$\frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{1}{(2n+1)(2n'+1)} \sin\frac{(2n'+1)\pi x}{c} \sin\frac{(2n+1)\pi y}{c}$$
$$+ \frac{8}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{2n}{(2n'+1)[(2n'+1)^2-(2n)^2]} \left[\sin\frac{2n\pi y}{c} \sin\frac{(2n'+1)\pi x}{c}\right.$$
$$\left. - \sin\frac{(2n'+1)\pi y}{c} \sin\frac{2n\pi x}{c}\right] = 0, \qquad \text{(b)}$$

wo $0 < x < c$, $y < x$. (Für $y = x$ gilt diess nicht.) Durch Subtraktion folgt hieraus:

$$\frac{16}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{2n}{(2n'+1)[(2n'+1)^2-2n)^2]}$$
$$\left[\sin\frac{2n\pi x}{c} \sin\frac{(2n'+1)\pi y}{c} - \sin\frac{(2n'+1)\pi x}{c} \sin\frac{2n\pi y}{c}\right] = 1, \qquad \text{(c)}$$

wo $x < c$, $y < x$ seyn muss, x übrigens positiv ist. Für $x = c$; $y = 0$; $y = x$ ist die erste Seite $= 0$. Ein Vertauschen von x und y ändert bloss das Zeichen der ersten Seite. Uebrigens folgt aus §. 146, 1 dass

$$\frac{4}{\pi} \Sigma \frac{1}{2n+1} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{c} = 1, \quad \frac{4}{\pi} \Sigma \frac{1}{(2n'+1)} \sin\frac{(2n'+1)\pi y}{c} = 1,$$

woraus dann

$$\frac{16}{\pi^2} \Sigma\Sigma \frac{1}{(2n+1)(2n'+1)} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{c} \sin\frac{(2n'+1)\pi y}{c} = 1,$$

wenn x und y zwischen 0 und c liegen. Mittelst dieser Gleichung folgt die (c) sofort aus (a).

Zu §. 155.

Wir setzen in den einzelnen Fällen immer $\frac{\partial x}{\partial z} > 0$ voraus, d. h. lassen x und z zugleich wachsen. Demnach müssen

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + \ldots + Ex^4)}}$$

und

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 \pm z^2)(1 \pm e^2 z^2)}}$$

dasselbe Vorzeichen haben.

Im Falle I, 1 geht x von $-\infty$ bis a, oder d bis $+\infty$. Dann geht z von $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ bis 1, -1 bis $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$.

Im Falle I, 2 geht x von a bis b, z also von -1 bis $+1$; ähnlich in den Fällen 3, 4.

Im Falle II, 1 geht x von $-\infty$ bis a, oder b bis $+\infty$; dann z von $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ bis 1, oder -1 bis $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. Der Fall II, 2 wie I, 2.

Für IV, 1 geht x von d bis ∞, also z von -1 bis $+1$; für IV, 2 geht x von $-\infty$ bis b, also z von -1 bis $+1$; die Fälle 3 und 4 erledigen sich eben so und auch V, 1, 2. — In allen diesen Fällen ist immer $\alpha \frac{1-z}{1+z}$ positiv und auch $\frac{\partial x}{\partial z}$ stellt sich als positiv heraus.

Eine besondere Betrachtung verlangt nur III. Wir setzen $n > 0$, also $\frac{\partial x}{\partial z} > 0$ voraus. Die Grösse $\frac{x-m}{n}$ kann alle möglichen (positiven oder negativen) Werthe annehmen; es muss also auch $\frac{1+\alpha z}{\alpha - z}$ in derselben Lage seyn. Uebrigens ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1+\alpha z}{\alpha - z} = \frac{1+\alpha^2}{(\alpha - z)^2},$$

so dass dieser Bruch mit z (also auch mit x) wächst.

Sey nun α negativ.

Geht z von $-\infty$ bis α, so geht $\frac{1+\alpha z}{\alpha - z}$ von $-\alpha$ bis ∞, x von $m - n\alpha$ bis ∞;
„ z „ α „ $-\frac{1}{\alpha}$, „ „ „ „ $-\infty$ „ 0, x „ $-\infty$ „ m;
„ z „ $-\frac{1}{\alpha}$ „ ∞, „ „ „ „ 0 „ $-\alpha$, x „ m „ $m - n\alpha$.

Sey α positiv.

Geht z von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\alpha}$, so geht $\frac{1+\alpha z}{\alpha - z}$ von $-\alpha$ bis 0, x von $m - n\alpha$ bis m;
„ z „ $-\frac{1}{\alpha}$ „ α, „ „ „ „ 0 „ ∞, x „ m „ ∞;
„ z „ α „ ∞, „ „ „ „ $-\infty$ „ $-\alpha$, x „ ∞ „ $m - n\alpha$.

Daraus ist ersichtlich, dass z von $-\infty$ bis $+\infty$ geht und eben so $\frac{1+\alpha z}{\alpha - z}$, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Die zusammengehörigen Gränzen ergeben sich aus dieser Untersuchung sofort.

Zu §. 166, II.

Die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z = \tfrac{1}{2} l(a^2+\alpha^2) + C = \tfrac{1}{2} l(a^2+\alpha^2) + C'$$

wo C von α, C' von a unabhängig (und wo beide Male $a = 0$ beanstandet werden kann) sagen dass C und C' von a und α unabhängig seyen, so dass also

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\,\partial z = \tfrac{1}{2} l(a^2 + \alpha^2) + C.$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, $a = 1$, was gestattet ist, so ergibt sich $C = 0$, also

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\,\partial z = \tfrac{1}{2} l(a^2 + \alpha^2).$$

Aber $e^{-az} = 1 - az\,e^{-a\Theta z}$, wo Θ zwischen 0 und 1. Demnach

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos\alpha z}{z}\,\partial z + a\int_0^\infty e^{-a\Theta z}\cos\alpha z\,\partial z = \tfrac{1}{2} l(a^2 + \alpha^2).$$

Die Grösse

$$a\int_0^\infty e^{-a\Theta z}\cos\alpha z\,\partial z$$

wird mit a zu Null, indem

$$\int_0^\infty e^{-a\Theta z}\cos\alpha z\,\partial z$$

nicht unendlich; also erhält man für $a = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos\alpha z}{z}\,\partial z = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2).$$

Inhalts-Verzeichniss.

Fünfzehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sechszehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Siebenzehnter Abschnitt.

Von den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen.

Achtzehnter Abschnitt.

Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen.

Neunzehnter Abschnitt.

Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.

Zwanzigster Abschnitt.

Die elliptischen Integrale.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Die Eulerschen Integrale oder die Gammafunktionen, so wie einige andere Funktionen.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Reduktion vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden.

Anhang.

Uebungen und Zusätze enthaltend.

Drittes Buch.

Integration der Differentialgleichungen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung.

§. 90.

Entstehung. Nothwendigkeit und Form der Integralgleichung.

I. Eine jede Gleichung zwischen x, y und den Differentialquotienten von y nach x heisst eine Differentialgleichung zwischen y und x, und zwar ist sie der ersten Ordnung, wenn nur der erste Differentialquotient von y vorkommt, der zweiten, wenn auch noch der zweite vorkommt, u. s. w. Wir wollen hier zunächst nur die Differentialgleichungen der ersten Ordnung ins Auge fassen. Was diese nun anbelangt, so können wir uns eine solche in folgender Weise entstanden denken. Gesetzt

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

sey eine Gleichung zwischen x und y, in der die Konstante a (nebst vielleicht noch andern Konstanten) vorkomme; aus ihr folgt (§. 17):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (b)$$

in welcher Gleichung im Allgemeinen auch noch die Konstante a vorkommen wird. Eliminirt man nun a aus den beiden Gleichungen (a) und (b), so wird man eine Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \qquad (c)$$

erhalten, in der a nicht mehr vorkommt, die aber sicher aus (a) folgt. Diese Gleichung (c) ist nun eine Differentialgleichung erster Ordnung, während die Gleichung (a) ihre Integralgleichung ist. Daraus folgt ganz unmittelbar, dass die Integralgleichung einer Differentialgleichung eine (willkürliche) Konstante enthalten kann, die in der letzteren nicht vorkommt, und dass sie also eine solche enthalten muss, wenn sie allgemein genug seyn soll. Zwei Konstanten, die in der Differentialgleichung nicht vorkommen, kann die Integralgleichung aber nicht enthalten, da man zwei solche nicht eliminiren kann, wenn man nicht über die erste Ordnung hinausgeht.

II. Es fragt sich nunmehr bloss, ob jede Differentialgleichung (c) auch nothwendig eine Integralgleichung habe, oder vielmehr, ob es nothwendig eine Funktion y von x gebe, die der Gleichung (c) genügt, und eine willkürliche Konstante enthält, die in (c) nicht vorkommt. Dass dem so ist, wird man sich am Einfachsten durch eine Art geometrischer Konstruktion verdeutlichen. Wir sagen nämlich, mittelst der Gleichung (c) lassen sich Kurven konstruiren, und wenn wir diess gezeigt haben, so haben wir hiemit auch nachgewiesen, dass es eine Funktion von x gibt, welche der Gleichung (c) genügt, indem die Ordinate einer Kurve nothwendig eine Funktion der Abszisse ist, und eben diese Ordinate ja der (c) genügt. Nun drückt aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ für einen bestimmten Werth von x die Tangente des Winkels aus, den die berührende Gerade in dem Punkte der Kurve, der zu x gehört, mit der Abszissenaxe macht (§. 11); kennt man also $\frac{\partial y}{\partial x}$, so kennt man auch die Richtung der berührenden Geraden, von der wir sagen dürfen, dass sie auf eine unendlich kleine Entfernung hin mit der Kurve zusammenfalle.

Nehmen wir nun an, der Abszisse x_0 entspreche die (willkürliche, aber bestimmte) Ordinate y_0, so folgt aus (c) der zu $x = x_0$, $y = y_0$ gehörige Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, also die Richtung der berührenden Geraden in dem betreffenden Kurvenpunkte. Konstruiren wir diese und nehmen dann eine Abszisse $x_0 + \Delta x$, wo wir uns Δx als unendlich klein denken wollen, so werden wir die zugehörige Ordinate einfach dadurch erhalten, dass wir die im Punkte $x = x_0 + \Delta x$ errichtete Senkrechte auf die Abszissenaxe an der vorhin konstruirten berührenden Geraden enden lassen. Wir kennen somit auch die neue Ordinate y_1, die zu $x_0 + \Delta x = x_1$ gehört, können also aus (c) den zugehörigen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ finden, also die neue berührende Gerade konstruiren. Gehen wir dann zur Abszisse $x_1 + \Delta x = x_2$ über, so werden wir ganz in derselben Weise die weitere Ordinate y_2 finden, und dann aus (c) den neuen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ziehen, also die dritte Tangente konstruiren können u. s. w. Man ersieht hieraus wohl schon, dass man mittelst der Gleichung (c) eine stetige Kurve konstruiren kann, deren Ordinate y ihr genügt. Da y_0 ganz willkürlich ist, so gibt es unendlich viele solcher Kurven; das einmal bestimmte y_0 spezialisirt jede einzelne und vertritt also die willkürliche Konstante.

III. Der Beweis dieses Satzes lässt sich jedoch auch in folgender Weise führen. Setzt man in §. 53, I: $a + h = x$, so ist

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots\ldots,$$

welche Reihe wir uns unendlich denken wollen (§. 53, III).

Da der Werth von y, wie er der (c) genügen soll, nothwendig eine Funktion

von x ist, so soll derselbe durch die eben genannte Grösse f(x) ausgedrückt seyn, d. h. es soll die Grösse y dargestellt seyn durch

$$y = y_a + \frac{x-a}{1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_a + \ldots\ldots, \qquad \text{(d)}$$

worin a ein bestimmter Werth von x ist, für den die Reihenentwicklung noch zulässig ist. Da die in (d) vorkommende Grösse y geradezu die in (c) eben so genannte seyn soll, so wird also letztere bestimmt seyn, wenn y_a, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a$, ... ermittelt sind. Der Werth y_a bleibt aber willkürlich, da wir kein Mittel zur Hand haben, ihn zu bestimmen; $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a$ dagegen ergibt sich aus (c), wenn man $x = a$, $y = y_a$ setzt. $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_a$ findet sich, wenn man (c) differenzirt und dann $x = a$, $y = y_a$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a$ setzt, u. s. w. — Demnach ist die Funktion y, welche in (c) vorkommt, durch (d) bestimmt. Da die eine willkürliche Konstante y_a darin vorkommt, so hat man den in II gefundenen Satz dadurch abermals nachgewiesen. *

IV. Wir haben so eben gesehen, dass es nothwendig eine Gleichung zwischen x und y mit einer in (c) nicht vorkommenden Konstanten gibt, aus der (c) hervorgehen kann. Wir wollen nun aber zeigen, dass es nicht zwei solcher Gleichungen, die wesentlich von einander verschieden sind, geben kann.

Seyen nämlich

---

* Dass der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, der in jedem Punkte einer der in II konstruirten Kurven stattfindet, derselbe ist, der auch in (c) vorkommt, ist selbstverständlich, da er ja so bestimmt wurde.

Man kann aber für III verlangen, dass man zeige, es folge aus (d) ein Werth von y und einer von $\frac{\partial y}{\partial x}$, die wenn $x = b$ gesetzt wird, auch noch der (c) für $x = b$ genügen. Ist y nach (d) bestimmt, woraus dann $\frac{\partial y}{\partial x}$, ... sich ergeben, und man setzt diess in $F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)$ ein, so verwandelt sich diese Grösse in eine reine Funktion von x, die wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen. Bildet man aber $\frac{d^n F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)}{d x^n}$ und setzt dann für y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, ... ihre Werthe aus (d), so erhält man offenbar dasselbe, als wenn man $\frac{d^n \varphi(x)}{d x^n}$ unmittelbar abgeleitet hätte. — Aus der Entwicklung in III ist klar, dass für $x = a$ die Grösse $\frac{d^n F}{d x^n}$ Null ist; daraus folgt, dass auch $\varphi^n(a) = 0$ sey.

Nun ist

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2}\varphi^2(a) + \ldots,$$

also da $\varphi^n(a) = 0$, so ist auch $\varphi(b) = 0$, d. h. die Gleichung (c) ist erfüllt, wenn man y, $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus (d) in ihr einsetzt, und dann $x = b$ macht. Damit ist natürlich die Behauptung erwiesen.

$$\varphi(x, y) = c, \quad \psi(x, y) = c' \tag{e}$$

diese beiden Gleichungen, welche wir uns nach den willkürlichen Konstanten c und c′ aufgelöst denken, so muss aus jeder derselbe Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ folgen, wie er in der Gleichung (c) vorkommt. Aus den beiden (e) aber folgt (§. 17):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}},$$

so dass also

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{f}$$

seyn muss. Man setze nun

$$\varphi(x, y) = p, \quad \psi(x, y) = q \tag{g}$$

und ziehe aus der zweiten y, welchen Werth man in die erste (g) einsetze, wodurch die Gleichung

$$p = f(x, q) \tag{h}$$

zum Vorschein komme. * Daraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y},$$

woraus, wenn man in (f) d. h. $\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}$ einsetzt:

$$\frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Diese (nothwendig richtige) Gleichung ist erfüllt, wenn $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$, oder $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Da aber $q = \psi(x, y)$ und diese Grösse y nothwendig enthalten muss, indem sonst die zweite Gleichung (e) keine Integralgleichung seyn könnte, so ist $\frac{\partial q}{\partial y}$ nicht $= 0$; demnach ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d. h. die zweite Seite der (h) enthält kein x, oder es ist geradezu

$$p = f(q), \text{ d. h. } \varphi = f(\psi). \tag{h'}$$

Nur unter dieser Bedingung können beide Gleichungen (e) als Integralgleichungen von (c) bestehen. In diesem Falle aber sind sie nicht wesentlich verschieden. Denn setzt man $f(\psi) = c$, so muss ψ nothwendig eine Konstante seyn, so dass aus $\varphi = c$ folgt $\psi = c'$.

Hieraus ergibt sich, dass wenn $\varphi(x, y) = c$ eine Integralgleichung von (c) ist, auch $f[\varphi(x, y)] = c'$ eine solche ist, die aber nicht von der ersten verschieden ist.

---

* D. h. $\varphi = f(x, \psi)$, wo φ und ψ zur Abkürzung für $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ gesetzt sind. Die (f) ist auch $\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}$.

f ist dabei eine ganz beliebige Funktion. Aber auch nur in dieser Form kann man von zwei (oder mehreren) Integralgleichungen der (c) sprechen.

In Wahrheit gibt es also nur eine Integralgleichung der Differentialgleichung (c) mit einer in letzterer nicht vorkommenden Konstanten. Wie man dieselbe findet, ist gleichgiltig. Kennt man also eine Gleichung zwischen x und y, welche eine in der vorgelegten Differentialgleichung nicht vorkommende (willkürliche) Konstante enthält, und die so beschaffen ist, dass aus ihr nach der in I angegebenen Weise die Differentialgleichung hervorgeht, so ist diese die (einzige) gesuchte Integralgleichung. (Vergl. 17. Abschnitt.)

V. Legt man in der Integralgleichung der willkürlichen Konstanten einen bestimmten Werth (z. B. etwa Null) bei, so erhält man eine Gleichung, die natürlich der vorgelegten Differentialgleichung genügt, nicht aber die allgemeine Form der Integralgleichung vorstellt. Eine solche Gleichung heissen wir ein besonderes Integral oder eine besondere Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung.

§. 91.

Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

I. Von den Differentialgleichungen erster Ordnung werden wir zunächst diejenigen betrachten, in denen $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur in der ersten Potenz vorkommt, die also die Form

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(k)}$$

haben, wo P, Q bekannte Funktionen von x und y sind. Man nennt dieselben Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, wobei wir bemerken wollen, dass man die Gleichung (k) wohl auch in folgender Form schreibt (§. 11):

$$P\,dx+Q\,dy=0, \qquad \text{(k')}$$

die wir jedoch in der Regel vermeiden werden, da die Formel (k) klarer die Bedeutung der Gleichung ausspricht.

II. Die einfachste Gestalt, welche die Gleichung (k) haben kann, ist die, in der die Veränderlichen getrennt sind, d. h. da P kein y, Q kein x enthält. Alsdann ist die Integralgleichung von (k) einfach:

$$\int P\,\partial x+\int Q\,\partial y=C, \qquad \text{(l)}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, und $\int P\,\partial x$ das Integral nach x, $\int Q\,\partial y$ nach y bezeichnet (§. 28). Aus der Gleichung (l) folgt nämlich (§. 17):

$$\frac{\partial\left(\int P\,\partial x+\int Q\,\partial y\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\int P\,\partial x+\int Q\,\partial y\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0, \qquad \text{(l')}$$

und da $\int Q\partial y$ kein x enthält, also $\frac{\partial\int Q\partial y}{\partial x}=0$, aber $\frac{\partial\int P\partial x}{\partial x}=P$ ist; ferner $\int P\partial x$ kein y enthält, also $\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}=0$, aber $\frac{\partial\int Q\partial y}{\partial y}=Q$ ist, so folgt also aus (l'):

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

d. h. die Gleichung (k), so dass (l) wirklich die Integralgleichung von (k) ist, und augenscheinlich die nicht in (k) vorkommende ganz willkürliche Konstante C enthält.

III. Sehr oft lassen sich aber in der Gleichung (k) die Veränderlichen leicht trennen, wenn sie es noch nicht sind. Seyen etwa X_1, X_2 Grössen, die kein y; Y_1, Y_2 Grössen, die kein x enthalten, und man habe die Gleichung

$$X_1Y_1+X_2Y_2\frac{\partial y}{\partial x}=0, \tag{m}$$

so folgt aus ihr

$$\frac{X_1}{X_2}+\frac{Y_2}{Y_1}\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \left(\frac{X_1}{X_2}dx+\frac{Y_2}{Y_1}dy=0\right),$$

woraus, da jetzt die Veränderlichen getrennt sind:

$$\int\frac{X_1}{X_2}\partial x+\int\frac{Y_2}{Y_1}\partial y=C.$$

Beispiele.

1) $$a+b\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ (a\,dx+b\,dy=0).$$

Hier sind die Veränderlichen getrennt, also ist

$$\int a\,\partial x+\int b\,\partial y=C,\ ax+by=C.$$

2) Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäss wird um eine vertikale Axe gleichförmig gedreht. Dabei entsteht ersichtlich eine Vertiefung der Oberfläche der Flüssigkeit und man soll die Gestalt derselben ermitteln.

Sicher ist dieselbe die einer Rotationsfläche, die durch Rotation um die Drehaxe des Gefässes entstanden ist, so dass es genügt, einen Schnitt derselben, der durch diese Axe geht, zu kennen. Betrachten wir nun ein Wassertheilchen in einem solchen, und sey y die Entfernung desselben von der Drehaxe, x seine Erhöhung über der durch den tiefsten Punkt der Fläche gelegten Horizontalebene, (also x und y seine rechtwinkligen Koordinaten), so muss, wenn das Wassertheilchen bei der Umdrehung des Gefässes einen Kreis vom Halbmesser y beschreiben soll, die auf dasselbe wirkende Kraft (Schwungkraft, Zentrifugalkraft) nach diesem Halbmesser (gegen den Mittelpunkt) gerichtet und gleich $\frac{\mu v^2}{yg}$ seyn, wenn μ das Gewicht

des Theilchens, v seine Geschwindigkeit, und g dieselbe Bedeutung hat wie in §. 20, VIII. Ist aber α die Umdrehungsgeschwindigkeit, so ist $v = \alpha y$, also obige Kraft $= \frac{\mu \alpha^2 y}{g}$.

Thatsächlich aber wirken zwei Kräfte auf das Wassertheilchen: das eigene Gewicht μ vertikal nach unten, und der Widerstand der Fläche, senkrecht zu derselben und nach innen gerichtet. Setzt man beide zusammen, so muss die oben genannte Kraft als resultirende erscheinen, wenn das Wassertheilchen an seiner Stelle bleiben soll. Macht die Tangente AB mit der x-Axe den Winkel ϱ, so ist der Winkel der beiden Kräfte $= 90^0 + \varrho$, und da die resultirende Kraft nach AC gerichtet seyn soll, welch letztere mit den beiden Richtungen die Winkel ϱ und 90^0 macht, so muss, da die resultirende Kraft $= \frac{\alpha^2 \mu y}{g}$ ist, bekanntlich seyn: $\mu = \frac{\mu \alpha^2 y}{g} tg \varrho$, während der Druck ist $\frac{\mu \alpha^2 y}{g \cos \varrho}$. Aus der ersten Gleichung folgt

Fig. 53.

$$tg \varrho = \frac{g}{\alpha^2 y}, \text{ d. h. (§. 11): } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{g}{\alpha^2 y}, \quad \alpha^2 y \frac{\partial y}{\partial x} = g,$$

$$(\alpha^2 y \, dy = g \, dx).$$

Daraus ergibt sich

$$\alpha^2 \int y \, \partial y = \int g \, \partial x, \quad \frac{\alpha^2 y^2}{2} = g x + C.$$

Die (im Allgemeinen willkürliche) Konstante C lässt sich hier jedoch bestimmen. Da für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muss, so ist nothwendig $C = 0$, d. h. die Gleichung des Schnitts ist bloss

$$y^2 = \frac{2g}{\alpha^2} x.$$

Diess ist aber bekanntlich die Gleichung einer Parabel, so dass die hier betrachtete Fläche entstanden ist durch Umdrehung einer Parabel um ihre Hauptaxe. *

* Sey das rotirende Gefäss etwa ein Zylinder dessen Axe OC, so wird die Flüssigkeit an den Wänden emporsteigen, dagegen in der Axe sich senken. Die Erhebung über den ursprünglichen Wasserspiegel betrage h, die Senkung unter denselben aber h'. Das Volumen Wasser, das sich erhoben hat, muss nun gleich seyn dem durch die Senkung leer gewordenen Volumen. Um ersteres zu rechnen, bemerken wir, dass dasselbe gleich ist dem Inhalte eines Zylinders von der Höhe h, dessen Halbmesser dem Gefässhalbmesser gleich ist, vermindert um den Theil des Paraboloids, der innerhalb dieses Zylinders ist. Der Kubikinhalt des ganzen Paraboloids ist (§. 49) $\pi \int_0^{h+h'} y^2 \partial x = \frac{g}{\alpha^2} \pi (h + h')^2$, der des Stücks bis zur Höhe h': $\frac{g}{\alpha^2} \pi h'^2$, also das obere Stück $= \frac{\pi g}{\alpha^2} [(h + h')^2 - h'^2]$. Der Halbmesser des Zylinders (Ordinate der Parabel für $x = h + h'$) ist $\sqrt{\frac{2g}{\alpha^2}(h + h')}$, desshalb ist das Stück desselben, das wir zu berechnen haben, gleich $\frac{2g\pi}{\alpha^2}(h + h') h$, so dass das Volumen des gehobenen Wassers $= \frac{2g\pi}{\alpha^2}(h + h') h$

3) $a y^2 \frac{\partial y}{\partial x} + 4x^3 - 2x^2 + \partial x + 12 = 0$, oder $a y^2 dy + (4x^3 - 2x^2 + \partial x + 12) dx = 0$.

$$\int a y^2 \partial y + \int (4x^3 - 2x^2 + \partial x + 12) \partial x = C,$$

$$\frac{a y^3}{3} + x^4 - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 12x = C.$$

4) $$x(a y^2 + b) + y(c x + g) \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{x}{cx+g} + \frac{y}{ay^2+b} \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \int \frac{x \partial x}{cx+g} + \int \frac{y \partial y}{ay^2+b} = C,$$

und da

$$\int \frac{x \partial x}{cx+g} = \int \left(\frac{1}{c} - \frac{g}{c} \frac{1}{cx+g}\right) \partial x = \frac{x}{c} - \frac{g}{c^2} l(cx+g), \int \frac{y \partial y}{a y^2+b} = \frac{1}{2a} l(a y^2 + b),$$

so ist also

$$\frac{x}{c} - \frac{g}{c^2} l(cx+g) + \frac{1}{2a} l(a y^2 + b) = C,$$

$$l(a y^2 + b) = 2aC - \frac{2ax}{c} + \frac{2ag}{c^2} l(cx+g),$$

woraus

$$a y^2 + b = e^{2aC} e^{\frac{2ag}{c^2} l(cx+g)} e^{-\frac{2ax}{c}},$$

und da e^{2aC} eine willkürliche Konstante, die man füglich mit C bezeichnen kann; $e^{\frac{2ag}{c^2} l(cx+g)} = (cx+g)^{\frac{2ag}{c^2}}$, so ist also

$$a y^2 + b = C(cx+g)^{\frac{2ag}{c^2}} e^{-\frac{2ax}{c}}.$$

5) $$(6xy + 3x) \frac{\partial y}{\partial x} + 5x^2 + 8x = 0,$$

(durch Division mit x):

$$3(2y+1) \frac{\partial y}{\partial x} + 5x + 8 = 0,$$

$$\int 3(2y+1) \partial y + \int (5x+8) \partial x = C,$$

$$3y^2 + 3y + \frac{5x^2}{2} + 8x = C.$$

6) In einer engen prismatischen oder zylindrischen, überall gleich dicken

---

$-\frac{g\pi}{\alpha^2}[(h+h')^2 - h'^2]$. Da diess gleich seyn muss dem leer gewordenen Raume, d. h. gleich $\frac{g\pi}{\alpha^2} h'^2$, so hat man:

$$2h(h+h') - (h+h')^2 + h'^2 = h'^2, \; 2h = h + h', \; h = h',$$

d. h. die Flüssigkeit hebt sich eben so hoch, als sie sich senkt. Da der Halbmesser des Gefässes (wegen $h = h'$) ist $\frac{2}{\alpha}\sqrt{gh}$, so muss, wenn r derselbe ist: $4gh = \alpha^2 r^2$ seyn, woraus h sich berechnen lässt.

Röhre ströme heisse Luft, während sie von einer Flüssigkeit umgeben sey, die immer dieselbe Temperatur τ habe. Unter der Voraussetzung, es ströme durch jeden Querschnitt der Röhre in derselben Zeit dieselbe (Gewichts-)Menge Luft, es bleibe ferner in jedem einzelnen solchen Querschnitte die Temperatur der durchströmenden Luft zu jeder Zeit dieselbe und es gebe die Röhrenwand alle empfangene Wärme an die Flüssigkeit ab, soll die Wärmemenge bestimmt werden, die in der Zeiteinheit durch diese Wand strömt.

Sey t_0 die Temperatur der in die Röhre einströmenden, t_1 die der ausströmenden Luft, p das Gewicht der in jeder Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömenden Luft, t deren Temperatur in dem um x vom Anfang entfernten Schnitte, also $t + \Delta t$ die im Querschnitt, der $x + \Delta x$ zugehört. Ist c die spezifische Wärme der Luft (§. 75, VII), so verliert in der Zeiteinheit die durch das (unendlich kleine) Element Δx strömende Luft die Wärmemenge $-pc\Delta t$. Sey s der (konstante) Umfang des Querschnitts, als $s\Delta x$ die Fläche der Wand, die das Röhrenelement begränzt; γ die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch die Wandeinheit strömen würde, wenn Luft und Wasser um 1^0 Temperatur verschieden wären, so ist $\gamma s \Delta x (t-\tau)$ die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch das fragliche Stück der Wand strömt (vergl. §. 104, Nr. 9 und 10). Da diese letztere der gleich ist, welche die Luft verliert, so hat man

$$-pc\Delta t = \gamma s \Delta x (t-\tau), \quad -pc\frac{\Delta t}{\Delta x} = \gamma s (t-\tau),$$

d. h. (§. 75, VI)

$$-pc\frac{\partial t}{\partial x} = \gamma s (t-\tau), \quad -\frac{pc}{\gamma s (t-\tau)}\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \quad -\frac{pc}{\gamma s}\int\frac{\partial t}{t-\tau} = x + C,$$

$$-\frac{pc}{\gamma s} l (t-\tau) = x + C, \quad t - \tau = Ce^{-\frac{\gamma s}{pc}x}.$$

Für $x = 0$ ist $t = t_0$, also

$$t_0 - \tau = C; \text{ und allgemein: } \frac{t-\tau}{t_0-\tau} = e^{-\frac{\gamma s}{pc}x}.$$

Ist h die Länge der Röhre, also sh ihre innere Fläche $= a$, so ist (da für $x = h$ auch $t = t_1$):

$$\frac{t_1-\tau}{t_0-\tau} = e^{-\frac{\gamma a}{pc}}, \quad t_0 - t_1 = (t_0 - \tau)\left(1 - e^{-\frac{\gamma a}{pc}}\right).$$

Die in der Zeiteinheit von der durchströmenden Luft verlorene Wärmemenge ist (§. 40, IV)

$$-pc\int_{t_0}^{t_1}\partial t = pc(t_0 - t_1) = pc(t_0 - \tau)\left(1 - e^{-\frac{\gamma a}{pc}}\right),$$

welches nun die Menge ist, die an die Flüssigkeit gelangt.

7) Man soll eine Kurve beschreiben, in der immer die Tangente des Winkels, den die berührende Gerade in dem Punkte (x, y) macht, gleich sey $\frac{x}{y}$.

Man hat also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}, \; y\frac{\partial y}{\partial x} - x = 0,$$

$$\int y\,\partial y - \int x\,\partial x = C, \; \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C, \; y^2 - x^2 = C,$$

wo wir statt 2 C bloss C geschrieben haben. Die Kurve ist also eine gleichseitige Hyperbel, für welche der Anfangspunkt Mittelpunkt ist.

Kennt man einen Punkt, durch den die Kurve gehen soll, so lässt sich C bestimmen. Sind a, b die Koordinaten dieses Punktes, so muss nämlich auch $b^2 - a^2 = C$ seyn, so dass die Gleichung der Kurve dann ist: $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$. — Doch hat jede der durch $y^2 - x^2 = C$ ausgedrückten Kurven, was auch C sey, die angegebene Eigenschaft.

8. Ein Gas wurde ausgedehnt, ohne Wärme aufzunehmen oder abzugeben; man soll den Endzustand aus dem anfänglichen ermitteln.

Sey V das Volumen des Gases bei einer Temperatur t, N der auf die Flächeneinheit alsdann nothwendige äussere Druck; V_0, N_0 seyen die Werthe von V, N für $t = 0$; V_1, N_1 für $t = t_1$; V_2, N_2 für $t = t_2$. Ferner sey Q das Gewicht (der Gesammtmasse) des Gases, c seine spezifische Wärme bei unverändertem Volumen, k das mechanische Aequivalent der Wärme, d. h. die Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Wärmeeinheit hervorzubringen; α endlich der Ausdehnungskoeffizient des Gases.

Alsdann ist bekanntlich

$$NV = N_0 V_0 (1 + \alpha t), \; N = \frac{N_0 V_0 (1 + \alpha t)}{V}.$$

Sey nun das Volumen des Gases $= V$ (also t seine Temperatur, N der Druck), und es werde dasselbe um das unendlich kleine Volumen ΔV ausgedehnt, so wird seine Temperatur nothwendig um $-\Delta t$ sinken (Δt, als Aenderung von t, ist negativ). Dadurch hat das Gas die Wärmemenge $-Qc\Delta t$ verloren, diess in dem Sinne genommen, dass diese Wärmemenge sich in Arbeit umgewandelt hat. Die Arbeit aber, welche verrichtet wird, ist $N\Delta V$ (da man für die unendlich kleine Ausdehnung N als konstant annehmen kann); die Wärmemenge $-Qc\Delta t$ wird durch eine Arbeit $= -kQc\Delta t$ hervorgebracht, d. h. die erstere erzeugt letztere. Demnach muss

$$-kQc\Delta t = N\Delta V, \text{ d. h. } -kQc = \frac{N_0 V_0 (1 + \alpha t)}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

seyn, oder da $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t}$ (§. 75, VI):

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{kQc}{N_0 V_0}\frac{1}{1+\alpha t}, \; l(V) = -\varrho\, l(1 + \alpha t) + C,$$

wo $\varrho = \frac{kQc}{\alpha N_0 V_0}$. Da für $t = 0$: $V = V_0$, so ist $C = l(V_0)$, also

$$l(V) = l\left(\frac{V_0}{(1 + \alpha t)^\varrho}\right), \; V = \frac{V_0}{(1+\alpha t)^\varrho}; \; N = N_0 (1 + \alpha t)^{\varrho + 1}.$$

Hier ist $\alpha = 0{\cdot}00367$, $k = 424$, $c = 0{\cdot}1686$, $N_0 = 10334$, $\frac{Q}{V_0} = 1{\cdot}293$, also $\varrho = \frac{1}{0{\cdot}4103}$, wenn es sich um atmosphärische Luft handelt.

Ist t_1 die Temperatur zu Anfang, t_2 zu Ende, so ist

$$V_2 = \frac{V_0}{(1+\alpha t_2)^\varrho},\ V_1 = \frac{V_0}{(1+\alpha t_1)^\varrho},\ \text{also}\ \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}\right)^\varrho.$$

Sind γ_1, γ_2 die Dichten des Gases in den zwei Zuständen, so ist $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, woraus dann

$$t_2 = \left(\frac{1}{\alpha} + t_1\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{\varrho}} - \frac{1}{\alpha}.$$

(Vergl.: Poisson, Mechanik, II, §. 637; Redtenbacher, Dynamidensystem, S. 45).

IV. Aus den Beispielen 2, 6, 7, 8 ergibt sich, in welcher Weise die durch die Integration neu eintretende Konstante bestimmt werden kann. Kennt man nämlich für einen bestimmten Werth der unabhängig Veränderlichen den zugehörigen Werth der abhängigen, so ergibt sich die Konstante sofort, wenn man in die gefundene Integralgleichung diese Werthe einsetzt. Dass dabei die abhängig Veränderliche als stetige Funktion angesehen wird, ist begreiflich; sonst würde die Konstante nicht nothwendig einen unveränderlichen Werth haben. (Vergl. §. 26, II).

Die Hauptaufgabe bei Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades ist nun die, durch irgend welche Hilfsmittel die Veränderlichen zu trennen, und wir wollen die wichtigsten Methoden, die zu diesem Endziele führen, angeben.

§. 92.

Lineare Differentialgleichung.

I. Seyen X, X_1 Grössen, die kein y enthalten, und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + Xy + X_1 = 0 \tag{a}$$

zur Integration vorgelegt. Man setze $y = uv$, wo u und v zwei noch zu bestimmende Funktionen von x sind, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$, mithin wird die Gleichung (a):

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + Xuv + X_1 = 0,$$

d. h.

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial x} + Xv\right) + v\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0. \tag{a'}$$

Gesetzt nun, v werde so bestimmt, dass

$$\frac{\partial v}{\partial x} + Xv = 0, \tag{b}$$

so folgt aus (a′) von selbst

$$v\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0. \tag{b'}$$

Und umgekehrt, wenn v und u den Gleichungen (b) und (b′) genügen, so genügt $y = u\,v$ der Gleichung (a).

Die Gleichung (b) gibt aber

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + X = 0,$$

und da hier die Veränderlichen getrennt sind, so hat man (§. 91):

$$\int \frac{\partial v}{v} + \int X\,\partial x = C,\quad l(v) = C - \int X\,\partial x,\quad v = e^C\,e^{-\int X\,\partial x} = C\,e^{-\int X\,\partial x},$$

wenn man C für e^C schreibt. * Setzt man diesen Werth in (b′), so hat man

$$C\,e^{-\int X\,\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0,\quad C\frac{\partial u}{\partial x} + X_1\,e^{\int X\,\partial x} = 0,$$

also nach §. 91:

$$C\,u + \int X_1\,e^{\int X\,\partial x}\,\partial x = C',\ u = \frac{C' - \int X_1\,e^{\int X\,\partial x}\,\partial x}{C},$$

wenn C′ eine Konstante. Also

$$y = u\,v = e^{-\int X\,\partial x}\,(C' - \int X_1\,e^{\int X\,\partial x}\,\partial x),$$

d. h. die Integralgleichung der Gleichung (a) ist

$$y = e^{-\int X\,\partial x}\,(C - \int X_1\,e^{\int X\,\partial x}\,\partial x), \qquad \text{(c)}$$

wie man durch unmittelbares Einsetzen in (a) sich leicht überzeugen kann.

1) Aus

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y = a\,x^n,\ \text{oder}\ dy + y\,dx = a\,x^n\,dx$$

folgt also, da jetzt $X = 1$, $X_1 = -a\,x^n$, $\int X\,\partial x = x$:

$$y = e^{-x}\,(C + a\int x^n\,e^x\,\partial x).\quad (\text{§. 27, II}).$$

2) $(1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x} + x\,y = a,\ \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{a}{1-x^2};\ X = \frac{x}{1-x^2},\ X_1 = -\frac{a}{1-x^2},$ $\int X\,\partial x = -\frac{1}{2}l(1-x^2) = -l(\sqrt{1-x^2}),\ e^{-\int X\,\partial x} = e^{l\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2},\ e^{\int X\,\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also

$$y = \sqrt{1-x^2}\left[C + a\int\frac{\partial x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right] = \sqrt{1-x^2}\left[C + \frac{a\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right]\ [\text{§. 33, (c)}],$$

d. h.

$$y = C\sqrt{1-x^2} + a\,x.$$

---

* Begreiflich soll damit nicht gesagt seyn, es sey $e^C = C$, sondern nur, e^C sey eben eine Konstante, die man füglich auch mit C bezeichnen kann.

3) Sucht man die Summe der unendlichen Reihe $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\ldots$ und setzt dieselbe $=z$, so ist für $x^2<1$ (§. 6, II):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+x+x^2+\ldots.=\frac{1}{1-x}, \text{ also (§. 91): } z=\int\frac{\partial x}{1-x}+C=-l(1-x)+C,$$

und da für $x=0$ auch $z=0$, so ist $C=0$, mithin

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots..=-l(1-x). \text{ (§. 54, II)}.$$

Gesetzt nun, man habe die unendliche Reihe

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+\ldots..,$$

welche für $x^2<1$ konvergent ist (§. 60, IV), und sey deren Summe $=y$, so ist *

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\ldots., \quad x\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots.,$$

$$y+x\frac{\partial y}{\partial x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots., \text{ d. h. } y+x\frac{\partial y}{\partial x}=-l(1-x).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{x}y+\frac{l(1-x)}{x}=0, y=e^{-\int\frac{\partial x}{x}}\left[C-\int\frac{l(1-x)}{x}e^{\int\frac{\partial x}{x}}\partial x\right]=\frac{1}{x}\left[C-\int l(1-x)\partial x\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[C+x+(1-x)l(1-x)\right].$$

---

* Die Differenzirung einer unendlichen Reihe, wie wir es hier thun, ist immer gestattet, wenn der erhaltene Differentialquotient eine endliche Summe hat. Es folgt diess aus dem Satze des §. 57, II. Denn ist, von $x=a$ an:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_3}{\partial x}+\ldots\ldots.=z,$$

so ist nach jenem Satze, wenn für $x=a$: $u_1+u_2+\ldots.$ eine endliche Grösse $=C$:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots\ldots.=\int_a^x z\,\partial x+C$$

und wenn die Summe $u_1+u_2+\ldots$ gleich v, so ist also $\int_a^x z\,\partial x+C=v$, $z=\frac{\partial v}{\partial x}$, d. h. es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1+u_2+u_3+\ldots.)=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots\ldots$$

Der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ in §. 60, IV ist für die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\ldots.:\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}x,$$

so dass $Gr\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$, und die Reihe konvergent ist, wenn x zwischen -1 und $+1$, d. h. $x^2<1$. Für $a=0$ ist die berührte Bedingung erfüllt.

Da für $x=0$ auch $y=0$, so ist nothwendig $C=0$, da $1+\frac{(1-x)\,l(1-x)}{x}$ Null ist für $x=0$ (§. 22), so dass

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2,3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots\ldots=1+\frac{(1-x)\,l(1-x)}{x},\quad x^2<1.$$

4) Sey $y=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(ax)\,\partial x$, so ist (§. 85, I):

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\int_0^\infty x e^{-x^2}\cos ax\,\partial x;\ \int x e^{-x^2}\cos ax\,\partial x=-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\cos ax-\tfrac{1}{2}a\int e^{-x^2}\sin ax\,\partial x\,(\text{§. }27);$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\cos ax\,\partial x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a\int_0^\infty e^{-x^2}\sin ax\,\partial x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}ay,$$

so dass also

$$\frac{\partial y}{\partial a}+\tfrac{1}{2}ay-\tfrac{1}{2}=0.$$

Demnach in (a): $X=\frac{1}{2}a$, $X_1=-\frac{1}{2}$, und folglich

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int a\,\partial a}\left[C+\tfrac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}\int a\,\partial a}\,\partial a\right],\quad y=e^{-\frac{1}{4}a^2}\left[C+\tfrac{1}{2}\int e^{\frac{1}{4}a^2}\,\partial a\right].$$

Ist $\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{4}a^2}\,\partial a=F(a)$, so ist also $y=e^{-\frac{1}{4}a^2}[C+F(a)]$. Da ferner für $a=0$ auch $y=0$, so hat man $0=C+F(0)$, $C=-F(0)$, woraus

$$y=e^{-\frac{1}{4}a^2}[F(a)-F(0)]=e^{-\frac{1}{4}a^2}\int_0^a e^{\frac{1}{4}x^2}\,\partial x\ (\text{§. }41,\ \text{I}),$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(ax)\,\partial x=e^{-\frac{1}{4}a^2}\int_0^a e^{\frac{1}{4}x^2}\,\partial x\ (\text{§. }86,\text{IV}).$$

5) Die Reihe $1+\frac{1x}{a+1}+\frac{1.2x^2}{(a+1)(a+2)}+\frac{1.2.3x^3}{(a+1)(a+2)(a+3)},\ldots$, welche für $a>0$ und $x^2<1$ konvergent ist (§. 60, IV) zu summiren.

Ist y ihre Summe, so ist (vergl. §. 58)

$$\frac{d(yx^a)}{dx}=ax^{a-1}+1x^a+\frac{1.2x^{a+1}}{a+1}+\frac{1.2.3x^{a+2}}{(a+1)(a+2)}+\ldots,$$

$$\int\frac{1}{x^a}\frac{d}{dx}(yx^a)\,dx=a\,l(x)+x+\frac{1x^2}{a+1}+\frac{1.2x^3}{(a+1)(a+2)}+\ldots=a\,l(x)+xy,$$

woraus

$$\frac{1}{x^a}\frac{d}{dx}(yx^a)=\frac{a}{x}+y+x\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{a-x}{x(1-x)}y-\frac{a}{x(1-x)}=0.$$

Demnach

$$y=e^{-\int\frac{a-x}{x(1-x)}\partial x}\left[C+a\int e^{\int\frac{a-x}{x(1-x)}\partial x}\frac{\partial x}{x(1-x)}\right]$$

d. h.

$$y=\frac{1}{x^a(1-x)^{1-a}}\left[C+a\int\frac{x^{a-1}}{(1-x)^a}\partial x\right].$$

Daraus folgt

$$x^a y=(1-x)^{a-1}\left[C+a\int\frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1-x)^a}\right],$$

und da $x^a y$ Null ist für $x = 0$, so ist $-C$ gleich dem Werthe von $a\int\frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x)^a}$ für $x = 0$, woraus leicht folgt:

$$y = a x^{-a}(1-x)^{a-1}\int_0^x \frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x)^a}.$$

Gleichungen, die sich in ähnlicher Weise behandeln lassen.

II. Ist Y eine bloss von y abhängige Grösse; X, X_1 wie oben, so kann die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + XY + X_1 = 0 \tag{d}$$

leicht auf (a) zurückgeführt werden. Setzt man nämlich (§. 13): $\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, so ist die (d):

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + XY + X_1 = 0,$$

und aus ihr folgt:

$$Y = e^{-\int X\partial x}\left[C - \int X_1 e^{\int X\partial x}\partial x\right].$$

Hieher gehört u. A. die Gleichung

$$y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X y^m + X_1 = 0. \tag{e}$$

Multiplizirt man diese Gleichung nämlich mit m, so ist sie

$$m y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x} + m X y^m + m X_1 = 0,$$

und geht in (d) über, wenn $Y = y^m$, und mX, mX_1 statt X, X_1 gesetzt werden. Demnach ist die Integralgleichung von (e):

$$y^m = e^{-m\int X\partial x}\left[C - m\int X_1 e^{m\int X\partial x}\partial x\right].$$

Eben so gehört hieher die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + Xy + X_1 y^n = 0. \tag{f}$$

Denn aus ihr folgt

$$-\frac{(n-1)}{y^n}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{(n-1)X}{y^{n-1}} - (n-1)X_1 = 0,$$

und geht in (d) über, wenn $Y = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-n+1}$, und $-(n-1)X$, $-(n-1)X_1$ für X und X_1 gesetzt werden, so dass die Integralgleichung von (f) ist:

$$\frac{1}{y^{n-1}} = e^{(n-1)\int X\partial x}\left[C + (n-1)\int X_1 e^{-(n-1)\int X\partial x}\partial x\right].$$

III. Kennt man eine Funktion z von x so beschaffen, dass sie für y gesetzt, der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + X y + X_1 y^2 + X_2 = 0 \qquad (g)$$

genügt, so setze man $y = z + u$ und erhält aus (g) wegen $\frac{\partial z}{\partial x} + X z + X_1 z^2 + X_2 = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (X + 2 X_1 z) u + X_1 u^2 = 0,$$

welche Gleichung nun zu (f), für $n = 2$, gehört. Ermittelt man hiernach u, so hat man dann $y = u + z$.

IV. Setzt man in der Gleichung

$$x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + x y + e^{xy} = a$$

wieder $y = uv$, $\frac{\partial y}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$, so wird sie

$$x^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + x u v + e^{xuv} = a,$$

$$x u \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + v\right) + x^2 v \frac{\partial u}{\partial x} + e^{xuv} = a;$$

also wenn $x \frac{\partial v}{\partial x} + v = 0$, $\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0$, $l(v) + l(x) = c$ (§. 91), $l(xv) = c$, $xv = e^c$, $xv = c$,* $v = \frac{c}{x}$, so ist

$$x c \frac{\partial u}{\partial x} + e^{cu} = a, \; x c \frac{\partial u}{\partial x} + e^{cu} - a = 0, \; \frac{c}{e^{cu} - a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0,$$

woraus

$$\int \frac{c \, \partial u}{e^{cu} - a} + l(x) = C.$$

Um das Integral zu bestimmen, sey $e^{cu} - a = z$, $c e^{cu} \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, $\frac{c \, \partial u}{\partial z} = \frac{1}{e^{cu}} = \frac{1}{a + z}$, also (§. 28)

$$\int \frac{c \, du}{e^{cu} - a} = \int \frac{\partial z}{z(a+z)} = \frac{1}{a} l\left(\frac{z}{a+z}\right) = \frac{1}{a} l\left(\frac{e^{cu} - a}{e^{cu}}\right) \text{ (§. 29)},$$

also

$$\frac{1}{a} l\left(\frac{e^{cu} - a}{e^{cu}}\right) + l(x) = C, \text{ d. h. } l\left(\left(\frac{e^{cu} - a}{e^{cu}}\right)^{\frac{1}{a}} x\right) = C,$$

oder

$$\left(\frac{e^{cu} - a}{e^{cu}}\right)^{\frac{1}{a}} x = C, \; cu = \frac{cy}{v} = xy,$$

und mithin, da auch C^a konstant:

$$\frac{e^{xy} - a}{e^{xy}} x^a = C, \; (e^{xy} - a) x^a = C e^{xy}.$$

---

* Wo abermals für e^c bloss c gesetzt wird.

V. Als Beispiele zu dem Vorstehenden mögen noch folgende dienen:

6) Die Gleichung

$$x\frac{\partial y}{\partial x}+ay+by^2=0$$

zu integriren. In (f) ist jetzt $X=\frac{a}{x}$, $X_1=\frac{b}{x}$, $n=2$; $\int X\partial x=a\,l(x)$, $e^{a\,l(x)}=x^a$, also

$$\frac{1}{y}=x^a\left[C+b\int\frac{\partial x}{x^{a+1}}\right]=x^a\left[C-\frac{b}{a x^a}\right]=Cx^a-\frac{b}{a},$$

d. h.

$$y=\frac{a}{Cx^a-b},$$

welche Gleichung für $a=0$ unzulässig ist. Es kann jedoch die vorgelegte Gleichung auch zu §. 91, (m) gerechnet werden.

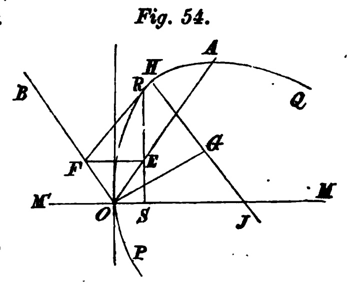


Fig. 54.

7) OA, OB sind zwei durch den Anfangspunkt O gehende Gerade (Fig. 54), die mit der Abszissenaxe OM Winkel machen, die sich zu 180° ergänzen, deren Gleichungen also sind $y=mx$, $y=-mx$ $(m>0)$. In einem beliebigen Punkte E der Geraden OA zieht man die Ordinate ES, dann EF parallel mit der Abszissenaxe, und soll nun eine Kurve PQ finden derart, dass wenn man den Durchschnittspunkt R dieser Kurve und der Ordinate ES mit F verbindet, RF Tangente von PQ sey.

Die Koordinaten des Punktes E seyen $x=\alpha$, $y=m\alpha$, so ist die Gleichung der Geraden EF: $y=m\alpha$, und dieselbe schneidet OB im Punkte F, dessen Koordinaten sind: $x=-\alpha$, $y=m\alpha$; die Koordinaten des Punktes R seyen x, y, so ist die Gleichung der Geraden RF:

$$Y-y=\frac{y-m\alpha}{x+\alpha}(X-x),$$

wenn X, Y die laufenden Koordinaten von RF sind. Zugleich ist aber auch $\alpha=x$, und da RF Tangente an die Kurve seyn soll, so muss seyn (§. 11):

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y-m\alpha}{x+\alpha}=\frac{y-mx}{2x},\quad \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{2x}+\frac{m}{2}=0,$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Nach I. folgt hieraus:

$$y=e^{\int\frac{\partial x}{2x}}\left[C-\frac{m}{2}\int e^{-\int\frac{\partial x}{2x}}\partial x\right]=\sqrt{x}\left[C-\frac{m}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\right]=\sqrt{x}[C-m\sqrt{x}].$$

$$(y+mx)^2=Cx \text{ (C statt } C^2).$$

Diese Gleichung stellt (für ein positives C z. B.) eine Parabel vor, die man erhält, wenn man OG senkrecht auf OB zieht und $=\frac{mC}{2(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$ macht, sodann GH parallel OB und $=\frac{m^2C}{4(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$; alsdann ist H der Scheitel der Parabel, HJ deren Hauptaxe, und die

Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel ist $\frac{C}{4(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$. Für $C=0$ würde die Parabel in die Gerade OB übergehen. Da C willkürlich ist, so gibt es unendlich viele Parabeln; da wir $m>0$ voraussetzen, so haben bei positivem C alle ihren Scheitel zwischen OB und OM, so wie auch alle durch O gehen und dort von der Ordinatenaxe berührt werden.

§. 93.

Integration der Gleichung $(ax+bx^{n+1}y^m)\frac{\partial y}{\partial x}+cy+hx^n y^{m+1}=0.$

I. Die Gleichung

$$(ax+bx^{n+1}y^m)\frac{\partial y}{\partial x}+cy+hx^n y^{m+1}=0 \qquad \text{(a)}$$

lässt sich leicht integriren. Dividirt man dieselbe durch xy, so heisst sie auch

$$\frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{c}{x}+x^n y^m\left(\frac{b}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{h}{x}\right)=0,$$

und wenn man nun

$$x^c y^a=z,\quad y^b x^h=u,$$

also

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{c}{x},\quad \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{b}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{h}{x}$$

setzt, so ist die vorgelegte Gleichung:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\,x^n y^m=0.$$

Aber es ist

$$x^{bc}y^{ab}=z^b,\quad y^{ab}x^{ah}=u^a,\quad x^{ch}y^{ah}=z^h,\quad y^{bc}x^{ch}=u^c,$$

also

$$x^{bc-ah}=z^b u^{-a},\quad y^{ah-bc}=z^h u^{-c},$$

$$x=z^{\frac{b}{bc-ah}}u^{\frac{a}{ah-bc}},\quad y=z^{\frac{h}{ah-bc}}u^{\frac{c}{bc-ah}},\quad x^n y^m=z^{\frac{bn-mh}{bc-ah}}u^{\frac{cm-an}{bc-ah}},$$

mithin

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+z^{\frac{bn-mh}{bc-ah}}u^{\frac{cm-an}{bc-ah}}\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

und wenn zur Abkürzung $\frac{bn-mh}{bc-ah}=-\alpha$, $\frac{cm-an}{bc-ah}=\beta$ gesetzt wird:

$$z^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x}+u^{\beta-1}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{z^\alpha}{\alpha}+\frac{u^\beta}{\beta}=C\ (\S.\,91),$$

d. h. man hat als Integralgleichung der vorgelegten:

$$\frac{(x^c y^a)^{\frac{mh-bn}{bc-ah}}}{mh-bn}+\frac{(y^b x^h)^{\frac{cm-an}{bc-ah}}}{mc-na}=C. \qquad \text{(b)}$$

II. Die gegebene Auflösung ist unzulässig, wenn α oder β Null oder unendlich werden, d. h. wenn entweder $bn-mh=0$, oder $cm-an=0$, oder $bc-ah=0$. Sey also

1) $\alpha = 0$, d. h. $bn - mh = 0$,

nicht aber $cm - an$ oder $bc - ah$ Null. Alsdann ist $x^n y^m = u^\beta$, also

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + u^{\beta-1}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ l(z) + \frac{u^\beta}{\beta} = C,\ l(x^c y^a) + \frac{bc - ah}{cm - an}(y^b x^h)^{\frac{cm-an}{bc-ah}} = C.$$

2) $\beta = 0$, d. h. $cm - an = 0$,

nicht aber $bn - mh$, oder $bc - ah$ Null. Alsdann ist $x^n y^m = z^{-\alpha}$, also

$$z^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{ah - bc}{bn - mh}(x^c y^a)^{\frac{mh-bn}{bc-ah}} + l(y^b x^h) = C.$$

3) $bc - ah = 0$.

Jetzt ist $b = \frac{ah}{c}$, also die vorgelegte Gleichung

$$\left(ax + \frac{ah}{c}x^{n+1}y^m\right)\frac{\partial y}{\partial x} + cy + hx^n y^{m+1} = 0,$$

$$\frac{a}{c}x(c + hx^n y^m)\frac{\partial y}{\partial x} + y(c + hx^n y^m) = 0,$$

$$\frac{a}{c}x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0,\ \frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{c}{x} = 0,\ a\,l(y) + c\,l(x) = C,$$

$$l(x^c y^a) = C,\ x^c y^a = C.$$

Diess ist nun richtig, was immer auch n, m, h, b seyen, also wenn auch noch zugleich etwa $bn - mh = 0$, oder $cm - an = 0$.

4) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, nicht aber $bc - ah = 0$.

Alsdann $x^n y^m = 1$, also

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ l(uz) = C,\ x^{c+h}y^{a+b} = C.$$

III. Wir fügen einige Beispiele bei.

1) $$(4 - 3xy^2)x\frac{\partial y}{\partial x} + (2 + 5xy^2)y = 0.$$

In (a) ist jetzt: $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$, $h = 5$, $m = 2$, $n = 1$, $bn - mh = -13$, $cm - an = 0$, $bc - ah = -26$, also $\beta = 0$ und

$$-2(x^2y^4)^{-\frac{1}{2}} + l(y^{-3}x^5) = C,\ y^{-3}x^5 = e^{C+2(x^{-1}y^{-2})} = Ce^{\frac{2}{xy^2}},\ x^5 = Cy^3e^{\frac{2}{xy^2}}.$$

2) $(4xy^2 - 3x^3)\frac{\partial y}{\partial x} + 2y^3 - 5x^2y = 0$, d. h. $\left(4x - \frac{3x^3}{y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + 2y - \frac{5x^2}{y} = 0$,

gibt $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$, $h = -5$, $n = 2$, $m = -2$, $mh - bn = 16$, $cm - an = -12$, $bc - ah = 14$, also

$$\frac{(x^2y^4)^{\frac{8}{7}}}{16} - \frac{(x^{-5}y^{-3})^{-\frac{6}{7}}}{12} = C,\ \frac{1}{4}\sqrt[7]{(x^2y^4)^8} - \frac{1}{3}\sqrt[7]{(x^5y^3)^6} = C.$$

3) $(3x^3 - 4y)\frac{\partial y}{\partial x} - 3x^2y + \frac{4y^2}{x} = 0$, $\left(3x - \frac{4y}{x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x} - 3y + \frac{4y^2}{x^3} = 0$,

$a = 3$, $b = -4$, $c = -3$, $h = 4$, $m = 1$, $n = -3$, $bc - ah = 0$, also ist die vorgelegte Gleichung:

$$x\left(3-\frac{4y}{x^3}\right)\frac{\partial y}{\partial x}-y\left(3-\frac{4y}{x^3}\right)=0,\ x\frac{\partial y}{\partial x}-y=0,\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}=0,\ l(y)-l(x)=C,$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right)=C,\ \frac{y}{x}=C,\ y=Cx;$$

während allerdings der Faktor $3-\frac{4y}{x^3}=0$, $y=\frac{3}{4}x^3$ auch genügt.

Integration weiterer Differentialgleichungen mittelst desselben Verfahrens.

IV. Man wird beachten, dass die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{c}{x}=0,\ \frac{b}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{h}{x}=0$$

durch die Gleichungen

$$x^c y^a=C,\ y^b x^h=C'$$

integrirt werden. Das oben angewendete Verfahren besteht hiernach darin, an die Stelle der Konstanten C, C′ neue abhängig Veränderliche einzuführen, wodurch dann eine Trennung derselben möglich wurde. In ähnlicher Weise lassen sich noch manche Gleichungen integriren, wovon wir einige Beispiele beifügen wollen.

V. Die Gleichung

$$(x^2y^2+ax)\frac{\partial y}{\partial x}-bx^3y^2-ay=0 \qquad (c)$$

heisst auch

$$x^2y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}-b\right)+a\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)=0.$$

Setzt man aber

$$\frac{\partial y}{\partial x}-b=0,\ x\frac{\partial y}{\partial x}-y=0,$$

so ergibt sich nach §. 91:

$$y-bx=C,\ \frac{y}{x}=C'.$$

Wir setzen demnach:

$$y-bx=u,\ \frac{y}{x}=v,\ \text{woraus}\ x=\frac{u}{v-b},\ y=\frac{uv}{v-b},$$

und haben:

$$\frac{u^4v^2}{(v-b)^4}\frac{\partial u}{\partial x}+ax^2\frac{\partial v}{\partial x}=0,^*\ \frac{u^2v^2}{(v-b)^2}\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}+a\left(\frac{v-b}{v}\right)^2\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{u^3}{3}+a\int\left(\frac{v-b}{v}\right)^2\partial v=C,$$

---

* Genau genommen hätte man die Differentialquotienten durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ zu bezeichnen, da ganz wohl von $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ die Rede seyn könnte. Die gewählte Bezeichnung wird aber hier zu keiner Unklarheit führen, da überall nur vollständige Differentialquotienten in Rechnung stehen.

$$\frac{u^3}{3}+a\left[v-2b\,l(v)-\frac{b^2}{v}\right]=C,$$

d. h. endlich

$$\frac{(y-bx)^3}{3a}+\frac{y}{x}-2b\,l\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{b^2x}{y}=C. \qquad \text{(d)}$$

VI. Die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1+xy+y^2}{1+xy+x^2} \qquad \text{(e)}$$

heisst auch

$$\frac{\partial y}{\partial x}-1+(x+y)\left[x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right]=0,$$

und da die Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}-1=0,\quad x\frac{\partial y}{\partial x}-y=0$$

geben:

$$y-x=C,\quad \frac{y}{x}=C',$$

so setzt man wieder

$$y-x=u,\quad \frac{y}{x}=v;\ x=\frac{u}{v-1},\quad y=\frac{uv}{v-1},$$

wodurch man aus (e) erhält:

$$\frac{1}{u^3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v+1}{(v-1)^3}\frac{\partial v}{\partial x}=0;\ -\frac{1}{2u^2}-\frac{v}{(v-1)^2}=-C,$$

so dass

$$\frac{1}{2(y-x)^2}+\frac{xy}{(y-x)^2}=C,\quad 1+2xy=C(y-x)^2. \qquad \text{(f)}$$

In ähnlicher Weise führt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1+xy+x^2}{1+xy+y^2} \qquad \text{(g)}$$

zu

$$2(y-x)^2+(y^2-x^2)^2=C. \qquad \text{(h)}$$

§. 94.

Integration der Gleichung $ax^ry^s\frac{\partial y}{\partial x}+bx^my^n=c$.

I. Setzt man in dieser Gleichung $x=u^\alpha$, $y=z^\beta$, so wird (§. 13): $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\beta z^{\beta-1}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}\alpha u^{\alpha-1}$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\beta}{\alpha}z^{\beta-1}u^{1-\alpha}\frac{\partial z}{\partial u}$, und mithin:

$$\frac{\beta a}{\alpha}z^{\beta-1}u^{1-\alpha}u^{r\alpha}z^{\beta s}\frac{\partial z}{\partial u}+bu^{\alpha m}z^{\beta n}=c,\ \frac{\partial z}{\partial u}+\frac{b\alpha}{a\beta}u^{\alpha(m+1-r)-1}z^{\beta(n-s-1)+1}$$
$$=\frac{c\alpha}{a\beta}u^{\alpha(1-r)-1}z^{1-\beta(s+1)}.$$

In dieser Gleichung werden die Veränderlichen getrennt werden können, wenn

$$\beta(n-s-1)+1=1-\beta(s+1),\ \text{oder}\ \alpha(m+1-r)-1=\alpha(1-r)-1.$$

Diese Annahmen führen auf $\beta=0$, oder $\alpha=0$, was unzulässig ist.

Die Veränderlichen können aber auch getrennt werden, wenn zugleich

$$\beta(n-s-1)+1=0,\quad 1-\beta(s+1)=0;$$

diess ist nur möglich, wenn $n=0$, in welchem Falle aber die Gleichung geradezu zu §. 91, III zu rechnen ist.

II. Die umgeformte Gleichung nimmt die Form des §. 92 an, wenn zugleich

$$\beta(n-s-1)+1=1,\quad 1-\beta(s+1)=0;\ \beta=\frac{1}{s+1},\ n=s+1.$$

Demnach wird

$$a x^r y^s \frac{\partial y}{\partial x} + b x^m y^{s+1} = c \tag{a}$$

auf §. 92, I zurückgeführt durch $y = z^{\frac{1}{s+1}}$; α bleibt beliebig, kann also etwa $=1$ gesetzt werden, so dass $x = u$ und man also aus (a) erhält:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b(s+1)}{a} x^{m-r} z - \frac{c(s+1)}{a} x^{-r} = 0. \tag{a'}$$

III. Setzt man zugleich $\beta(n-s-1)+1=0$, $1-\beta(s+1)=1$, so ist $s=-1$, $\beta=-\frac{1}{n}$, also wird die Gleichung

$$a x^r y^{-1} \frac{\partial y}{\partial x} + b x^m y^n = c \tag{b}$$

durch $y = z^{-\frac{1}{n}}$ auf §. 92, I zurückgeführt. α bleibt abermals willkürlich, mag also wieder $=1$ seyn, wodurch die (b) gibt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{bn}{a} x^{m-r} + \frac{cn}{a} x^{-r} z = 0. \tag{b'}$$

IV. Man ersieht hieraus, dass die vorgelegte Gleichung in den Fällen, da $n=s+1$, oder $s=-1$ auf §. 92, I zurückgeführt werden kann. Ist in II aber $n=s+1$, so darf nicht zugleich $s=-1$ seyn; ist in III $s=-1$, so darf nicht zugleich $n=s+1$, d. h. $=0$ seyn, indem sonst β unendlich würde. Ist aber $n=0$, $s=-1$, so gehört die Gleichung zu §. 91.

1) $$6x^4 y^3 \frac{\partial y}{\partial x} - 4x^2 y^3 = 1$$

gehört zu (a). Setzt man also $y = z^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial z}{\partial x}$, so ergibt sich:

$$2x^4 \frac{\partial z}{\partial x} - 4x^2 z = 1,\ \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2}{x^2} z - \frac{1}{2x^4} = 0,\ z = e^{2\int \frac{\partial x}{x^2}} \left[C + \tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-2\int \frac{\partial x}{x^2}}}{x^4} \partial x\right]^*$$

$$= e^{-\frac{2}{x}} \left[C - \frac{e^{\frac{2}{x}}}{16}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 2\right)\right],\ \text{d. h. } y^3 = C e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}.$$

---

* Man setzt in dem Integral $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^4} \partial x$: $x = \frac{2}{u}$, um dasselbe durch Umformung zu erhalten.

$$2) \qquad 5x^2\frac{\partial y}{\partial x}-3x^3y^5=2y, \text{ oder } 5x^2y^{-5}\frac{\partial y}{\partial x}-3x^3y^4=2$$

gehört zu (b). Sey also $y=z^{-\frac{1}{4}}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{1}{4}z^{-\frac{5}{4}}\frac{\partial z}{\partial x}$, so wird dieselbe

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{8}{5x^2}z+\frac{12}{5}x=0, \quad z=e^{-\frac{8}{5}\int\frac{\partial x}{x^2}}[C-\frac{12}{5}\int x e^{\frac{8}{5}\int\frac{\partial x}{x^2}}\partial x],$$

$$\frac{1}{y^4}=e^{\frac{8}{5x}}[C-\frac{12}{5}\int x e^{-\frac{8}{5x}}\partial x].$$

Ein ziemlich allgemeines Beispiel für Differentialgleichungen erster Ordnung findet sich im „Anhang" unter C.

§. 95.

Homogene Differentialgleichungen.

Ein aus x und y zusammengesetzter Ausdruck heisst homogen, wenn er so beschaffen ist, dass wenn man $y=xz$ setzt, alle einzelnen Glieder ein und dieselbe Potenz von x als gemeinschaftlichen Faktor erhalten, während sonst x nicht mehr vorkommt. Ist x^n dieser gemeinschaftliche Faktor, so heisst der Ausdruck eine homogene Funktion von x und y vom n^{ten} Grade. So ist $5x^2y^3+7x^5-8y^4x-7y^5$ homogen vom 5ten Grade, indem, wenn man $y=xz$ setzt, x^5 überall als gemeinschaftlicher Faktor erscheint und x sonst nicht mehr vorkommt; eben so ist $\frac{3x}{y}-\frac{12y}{x}+\frac{15y^2}{x^2}-8$ homogen vom 0ten Grade, $\frac{2y}{x^3}-\frac{4}{y^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{14y^2}{x^4}$ homogen vom Grade -2 u. s. w.

I. Sind nun in der Gleichung

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(a)}$$

P und Q homogene Funktionen von x und y des n^{ten} Grades, so können die Veränderlichen in (a) getrennt werden. Man setze nämlich $y=xz$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=z+x\frac{dz}{dx}$, so werden P und Q den gemeinschaftlichen Faktor x^n erhalten, so dass dann etwa $P=x^nZ$, $Q=x^nZ'$, wo Z und Z' blosse Funktionen von z sind. Alsdann wird die Gleichung (a), wenn man den gemeinschaftlichen Faktor x^n gleich weglässt:

$$Z+Z'\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)=0, \quad xZ'\frac{dz}{dx}+Z+Z'z=0,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{Z'}{Z+Z'z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x}=0, \int\frac{Z'\partial z}{Z+zZ'}+l(x)=C \quad (§. 91),$$

in welcher Gleichung schliesslich $z=\frac{y}{x}$ zu setzen ist.

II. Die Gleichung

$$(ax+by+c)\frac{\partial y}{\partial x}+a'x+b'y+c'=0 \qquad \text{(b)}$$

kann homogen gemacht werden. Man setze nämlich $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial(v+\beta)}{\partial u}}{\frac{\partial(u+\alpha)}{\partial u}}=\frac{\partial v}{\partial u}$, so wird sie zu:

$$(au+bv+a\alpha+b\beta+c)\frac{\partial v}{\partial u}+a'u+b'v+a'\alpha+b'\beta+c'=0$$

und wird eine homogene Differentialgleichung zwischen u und v des ersten Grades, wenn man α und β so bestimmt, dass

$$a\alpha+b\beta+c=0,\; a'\alpha+b'\beta+c'=0,\; \alpha=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\; \beta=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}.$$

Diese Auflösung ist nicht anwendbar, wenn $ab'-a'b=0$. Für diesen Fall ist aber $b'=\frac{a'b}{a}$ und die vorgelegte Differentialgleichung heisst auch

$$(ax+by+c)\frac{\partial y}{\partial x}+a'x+\frac{a'b}{a}y+c'=0,\; (ax+by)\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{a'}{a}\right)+c\frac{\partial y}{\partial x}+c'=0.$$

Man setze $ax+by=z$, $a+b\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dz}{dx}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}$, so wird diese Gleichung zu

$$z\left(\frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{a}{b}+\frac{a'}{a}\right)+\frac{c}{b}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{ac}{b}+c'=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(az+ac)+(a'b-a^2)z-a^2c+abc'=0,$$

welche zu §. 91, (m) gehört. Schliesslich ist $z=ax+by$ zu setzen.

III. Versucht man die Gleichung

$$(ax^m y^n+bx^r y^s+cx^p y^q+\ldots)\frac{\partial y}{\partial x}+a'x^{m'}y^{n'}+b'x^{r'}y^{s'}+c'x^{p'}y^{q'}+\ldots=0 \qquad \text{(c)}$$

durch die Substitution $y=z^\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\alpha z^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x}$ zu einer homogenen Differentialgleichung zwischen z und x zu machen, so wird dieselbe zunächst seyn:

$$\alpha(ax^m z^{n\alpha+\alpha-1}+bx^r z^{\alpha s+\alpha-1}+cx^p y^{\alpha q+\alpha-1}+\ldots)\frac{\partial z}{\partial x}+a'x^{m'}z^{n'\alpha}+b'x^{r'}z^{s'\alpha}$$
$$+c'x^{p'}z^{q'\alpha}+\ldots.=0,$$

und wird homogen seyn, wenn es möglich ist, dass die folgenden Gleichungen zugleich bestehen:

$$m+(n+1)\alpha-1=r+(s+1)\alpha-1=p+(q+1)\alpha-1=\ldots=m'+n'\alpha=r'+s'\alpha$$
$$=p'+q'\alpha\ldots\ldots$$

Beispiele.

1) $x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \sqrt{x^2+y^2}$ ist eine homogene Differentialgleichung der ersten Ordnung. Sie gibt:

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} - z = \sqrt{1+z^2},\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x} = 0,\ \int\frac{\partial z}{\sqrt{1+z^2}} - l(x) = C,\ l(z+\sqrt{1+z^2})$$

$$-l(x)\,C,\ l\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x}}\right) - l(x) = C,\ l(y+\sqrt{x^2+y^2}) - 2l(x) = C,$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2.$$

2) $ay - ax\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt $az - a\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \sqrt{1+z^2}\times\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$

$$\frac{-a+\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0,\ \left(\frac{-a}{z\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0,\ \int\left(\frac{-a}{z\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{z}\right)\partial z$$

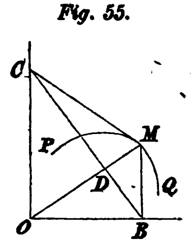
$$+ l(x) = C,\ -a\,l\left(\frac{-1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right) + l(z) + l(x) = C,\ -a\,l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right) + l\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+ l(x) = C,\ -a\,l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right) + l(y) = C,\ y = C\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right)^a,$$

$$y^{a+1} = C\,(\sqrt{x^2+y^2}-x)^a.$$

3) Man soll (Fig. 55) eine Kurve PQ konstruiren so beschaffen, dass wenn M ein Punkt derselben, BM seine Ordinate, und OM sein Radius vector ist, ferner BD senkrecht auf OM gezogen und bis zum Durchschnitt C mit der Ordinatenaxe verlängert wird, die Gerade CM Tangente sey an PQ.

Fig. 55.



Man findet, wenn x, y die Koordinaten von M sind, leicht als Gleichungen der Geraden OM: $v = \frac{y}{x}\xi$, BC: $v = -\frac{x}{y}(\xi - x)$, CM: $v - y = -\frac{x^2-y^2}{xy}(\xi - x)$, so dass also, da CM Tangente an die Kurve seyn soll:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{xy},\ xy\frac{\partial y}{\partial x} + x^2 - y^2 = 0,$$

welche Gleichung homogen vom zweiten Grade ist. Sie gibt schliesslich: $y^2 + 2x^2 l(x) = Cx^2$.

4) Die Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, wo f eine beliebige Funktion bedeutet, ist homogen vom 0ten Grade. Sie gibt $z + x\frac{dz}{dx} = f(z)$, $\frac{1}{z-f(z)}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} = 0$, $\int\frac{\partial z}{z-f(z)} + l(x) = C$, $z = \frac{y}{x}$.

Die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ wird nach II. auf

$$\frac{\partial v}{\partial u} = f\left(\frac{a u + b v}{a' u + b' v}\right) = f\left(\frac{a + b \frac{v}{u}}{a' + b' \frac{v}{u}}\right)$$

gebracht und gehört jetzt ebenfalls hieher. Für $a b' - a' b = 0$ ist sie: $\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(\frac{a(a x + b y + c)}{a'(a x + b y) + a c'}\right)$ und wird für $a x + b y = z$ zu $\frac{\partial z}{\partial x} - a = b f\left(\frac{a z + a c}{a' z + a c'}\right)$, so dass sie zu §. 91 gehört.

5) Man sucht eine Kurve, in der der Winkel, den die berührende Gerade in einem Punkte derselben mit der Abszissenaxe macht, eine gegebene Funktion des Winkels ist, den der Radiusvector in denselben Punkt mit derselben Axe macht.

Ist α der erste, β der zweite Winkel, so ist $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 11), $tg\,\beta = \frac{y}{x}$, mithin hat man wie in Nr. 4:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \int \frac{\partial z}{z - f(z)} + l(x) = C, \quad z = \frac{y}{x}.$$

Sey z. B. verlangt, dass $\alpha = 2\beta$, so ist $tg\,\alpha = tg\,2\beta = \frac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\beta}$, d. h. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$,

oder es ist $f(z) = \frac{2z}{1 - z^2}$, also

$$\int \frac{\partial z}{z - \frac{2z}{1 - z^2}} + l(x) = C, \quad -\int \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)}\,\partial z + l(x) = C, \quad l\left(\frac{1 + z^2}{z}\right) + l(x) = C,$$

d. h.

$$l\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) = C, \quad x^2 + y^2 - C y = 0,$$

d. h. die Kurve ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Ordinatenaxe liegt, in der Entfernung $\frac{C}{2}$ vom Anfangspunkt, während der Kreis durch letztern geht. (Es ist diess der Satz vom Winkel der Tangente und Sehne.) *

§. 96.

Unmittelbar durch Differenzirung entstandene Gleichungen. Bedingungen der Integrirbarkeit.

I. Es kann sich ereignen, dass die Differentialgleichung

$$P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \text{ oder } P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

geradezu durch Differenzirung einer Gleichung $f(x, y) = C$ entstanden ist,

---

* Wir müssen hier, wie in der Note zu §. 93, V, wieder auf die Bezeichnung der Differentialquotienten aufmerksam machen. Es sollte offenbar, wenn $y = x z$ gesetzt ist, $\frac{dz}{dx}$ überall statt $\frac{\partial z}{\partial x}$ stehen. Theilweise wurde diess eingeschrieben; meistens haben wir aber die zweite Bezeichnung beibehalten, da hier keine Verwechslung stattfinden wird.

d. h. dass $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}$ identisch ist mit $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 15). Alsdann muss offenbar $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$ seyn, woraus folgt (§. 19, II):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{b}$$

Ist die Gleichung (b) nicht richtig, so wird sicherlich (a) nicht unmittelbar durch Differenzirung entstanden seyn. Umgekehrt aber, wenn (b) richtig ist, ist diess der Fall. Statt diesen Satz theoretisch zu beweisen, wollen wir, unter Voraussetzung der Gleichung (b), die Grösse $f(x,y)$ thatsächlich bestimmen. Vorausgesetzt nämlich, $f(x,y)$ sey so beschaffen, dass $\frac{\partial f}{\partial x}=P$, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$, so folgt zuerst aus

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P: f(x,y)=\int P\,\partial x+R,$$

worin die Integration bloss nach x geschieht, und R eine Funktion von y, ohne x, seyn wird (§. 76, I). Hieraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x+\frac{\partial R}{\partial y},$$

und da $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x.$$

Da nun R bloss y enthalten soll, so muss auch $Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x$ kein x enthalten, also der Differentialquotient dieser Grösse nach $x=0$ seyn. Derselbe ist aber $=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int P\,\partial x=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, und ist 0 vermöge der Gleichung (b). Demnach ist

$$R=\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right]\partial y+C,$$

wo C nun weder x noch y enthält; also endlich

$$f(x,y)=\int P\,\partial x+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right]\partial y+C,$$

woraus folgt, da $\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right)\partial y$ kein x enthält:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x+Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x=Q.$$

Demnach ist die Integralgleichung:

$$\int P\,\partial x+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right]\partial y=C.* \tag{c}$$

* Hier sind die Integrale rein partielle, so dass die Bezeichnung genau ist. Dabei müssen wir aber einem Missverständnisse vorbeugen. Die Grösse $\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right)\partial y$ ist

Offenbar erhielte man eben so:

$$\int Q\,\partial y + \int [P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\partial y]\,\partial x = C. \qquad (c')$$

1) $x^m + y + (y^n + x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; $P = x^m + y$, $Q = y^n + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$;

$$\int P\,\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + yx, \quad \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x = x, \quad Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x = y^n,$$

$$\int [Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x]\,\partial y = \frac{y^{n+1}}{n+1},$$

also

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + yx + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C.$$

2) $\frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} + \left(\frac{1}{2y} - \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt $P = \frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}$,

$$Q = \frac{1}{2y} - \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^3} + \frac{x^2 + 2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\int P\,\partial x = l(x) - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x = -\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2},$$

$$Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x = \frac{1}{2y}, \quad \int (Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x)\,\partial y = \tfrac{1}{2}l(y),$$

also

$$l(x) - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right) + \tfrac{1}{2}l(y) = C,$$

$$\tfrac{3}{2}l(x) - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} - \tfrac{1}{2}l(\sqrt{x^2+y^2}+y) + \tfrac{1}{2}l(y) = C.$$

Integrirender Faktor.

II. Es ist nun aber ganz wohl denkbar, dass, nachdem die Gleichung $f(x,y) = C$ differenzirt worden, ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor $\varphi(x,y)$ weggelassen wurde und dadurch erst die Gleichung $P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

---

allerdings $= \int Q\,\partial y - \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right)\partial y$; man würde aber falsch schliessen, wenn man den letzten Theil $= \int P\,\partial x$ setzen wollte. Denn in $\int P\,\partial x$ können Glieder vorkommen, die kein y enthalten, die also bei der Differenzirung nach y wegfallen, und sich bei der darauf folgenden Integration nicht wieder ersetzen, so dass $\int P\,\partial x$ und $\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right]\partial y$ um diese Glieder von einander verschieden seyn können. Enthält aber $\int P\,\partial x$ keine von y unabhängigen Glieder, so ist freilich $\int P\,\partial x = \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x\right]\partial y$. Doch ist es immer gerathen, einfach nach den Formeln (c) oder (c′) zu verfahren.

entstanden ist. Alsdann wird freilich letztere nicht in dem oben betrachteten Falle seyn, würde jedoch, wenn man den Faktor $\varphi(x, y)$ herstellen könnte, leicht in denselben zu bringen seyn. Diesen Faktor nun nennt man den integrirenden Faktor und es lässt sich leicht nachweisen, dass ein solcher immer vorhanden seyn muss. Gesetzt nämlich, die Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung $P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sey $\psi(x, y, C) = 0$, und man löse letztere Gleichung nach C auf, wodurch sie die Form $f(x, y) = C$ annehme, so folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wo nun von der willkürlichen Konstanten keine Spur mehr vorkommt. Da auch $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{P}{Q}$ ist, so muss

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{P}{Q} \tag{d}$$

seyn, d. h. wenn $\frac{P}{Q} = \varrho$, so ist nothwendig auch $\frac{\partial f}{\partial x} = \varrho\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\varrho + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{P}{Q} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{Q}\left[P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right]$. Demnach also, wenn man $P + Q\frac{\partial y}{\partial x}$ mit $\frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y}$ multiplizirt, ist diese Grösse identisch mit $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, und mithin wird $\frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y}$ ein integrirender Faktor seyn. Man kann sich diess auch noch in folgender Weise erklären. Aus (d) folgt, dass $P = \mu\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \mu\frac{\partial f}{\partial y}$, mithin

$$P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{\mu}\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

dass also $\frac{1}{\mu}$ ein integrirender Faktor ist. Aber $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial x}$, wie oben.

III. Kennt man aber einmal einen solchen Faktor, so kann man sogleich unendlich viele finden. Sey nämlich v ein solcher, also $v\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, und man setze $f(x, y) = u$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df(x,y)}{dx}$ (§. 15), so ist, wenn $\varphi(u)$ eine ganz beliebige Funktion von u bedeutet:

$$\varphi(u)\, v\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \varphi(u)\frac{df(x,y)}{dx} = \varphi(u)\frac{du}{dx},$$

und da $\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ immer ein genauer Differentialquotient nach x, nämlich von

$\int \varphi (u)\, \partial u$ ist, so ist auch $v \varphi (u) \left(P + Q \frac{\partial y}{\partial x}\right)$ ein solcher, so dass auch $v \varphi (u)$ ein integrirender Faktor seyn wird.

§. 97.

Bestimmung des integrirenden Faktors. Anwendung.

I. Man kann sich nun die Frage stellen, ob man nicht mittelst der Gleichung (b) (§. 96) im Stande ist, den integrirenden Faktor zu finden. Sey also wieder (a) die vorgelegte Gleichung, v ihr integrirender Faktor, so müsste

$$\frac{\partial (v P)}{\partial y} = \frac{\partial (v Q)}{\partial x},\ P \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial x},\ v \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(e)}$$

seyn; allein diese Gleichung ist schwerer aufzulösen, als die vorgelegte, so dass sie hier Nichts fruchten kann. In gewissen besonderen Fällen jedoch leitet sie zur Kenntniss von v. Gesetzt nämlich

$$\frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]$$

enthalte kein y, so können wir annehmen, auch v sey unabhängig von y, also $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ setzen und haben dann aus (e):

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),\ l(v) = \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{Q} + C,\ v = C e^{\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{Q}}. \quad \text{(f)}$$

Dessgleichen, wenn $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ unabhängig von x seyn sollte, wäre v unabhängig von x und

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),\ v = C e^{-\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{\partial y}{P}}. \quad \text{(g)}$$

II. Kann man die Gleichung (a) in folgende Form bringen:

$$M + N \frac{\partial y}{\partial x} + M_1 + N_1 \frac{\partial y}{\partial x} + M_2 + N_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots = 0, \quad \text{(h)}$$

und ist man im Stande, integrirende Faktoren $v, v_1, v_2, \ldots$ für $M + N \frac{\partial y}{\partial x}$, $M_1 + N_1 \frac{\partial y}{\partial x}$, $M_2 + N_2 \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots$ aufzufinden, so dass identisch

$$v \left(M + N \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d f(x, y)}{d x},\ v_1 \left(M_1 + N_1 \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d f_1 (x, y)}{d x},$$

$$v_2 \left(M_2 + N_2 \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d f_2 (x, y)}{d x}, \ldots$$

so sind, wenn $f(x, y) = u$, $f_1 (x, y) = u_1, \ldots$, auch $v \varphi (u)$, $v_1 \varphi_1 (u_1), \ldots$

integrirende Faktoren von $M+N\frac{\partial y}{\partial x}$, $M_1+N_1\frac{\partial y}{\partial x}$, ..., und wenn man $\varphi(u)$, $\varphi_1(u_1)$, ... so bestimmt, dass,

$$v\varphi(u)=v_1\varphi_1(u_1)=v_2\varphi_2(u_2)=\ldots, \qquad (i)$$

so ist $v\varphi(u)$ ein integrirender Faktor der Gleichung (h).

III. Seyen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bekannte Funktionen von x, und die Differentialgleichung

$$a\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+b\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad (k)$$

vorgelegt, so lässt sie sich in der so eben angedeuteten Weise abtrennen und es ist

$$M=a\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},\ N=b\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y},\ M_1=0,\ N_1=\psi(y),$$

wo nun $M_1+N_1\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{d}{dx}\int\psi(y)\partial y$ ist, so dass $v_1=1$. Ferner ist $\frac{\partial M}{\partial y}=a\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{b\,\partial\varphi(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, also $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{b\varphi(x)}\left[a\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}-b\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]=\frac{a-b}{b}\frac{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}}{\varphi(x)}=\frac{a-b}{b}\frac{\partial}{\partial x}l[\varphi(x)]$, mithin nach (f):

$$v=e^{\frac{a-b}{b}l\varphi(x)}=\varphi(x)^{\frac{a-b}{b}};$$

aber auch $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{a-b}{a\varphi(y)}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}=\frac{a-b}{a}\frac{\partial l\varphi(y)}{\partial y}$, also auch $v=e^{-\frac{(a-b)}{a}l\varphi(y)}=\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}$, und gerade diese letztere Form ist bequemer, da jede Funktion von y auch integrirender Faktor von $\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}$ ist. Multiplizirt man also die Gleichung (k) mit $\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}$, so hat man

$$a\varphi(y)^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+b\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left\{a\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b}{a}}\right\}+\frac{d}{dx}\int\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\partial y=0,$$

woraus als Integralgleichung von (k) unmittelbar sich ergibt:

$$a\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b}{a}}+\int\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\partial y=C. \qquad (k')$$

Ist z. B. $\varphi(x)=x^m$, so ist die (k):

$$m\,a\,x^{m-1}y^m+m\,b\,x^m y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x}+\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{m\,a\,x^{m-1}y^m}{b\,m\,x^m y^{m-1}+\psi(y)}=0,$$

deren Integralgleichung also:

$$a x^m y^{\frac{mb}{a}} + \int y^{\frac{m(b-a)}{a}} \psi(y)\,\partial y = C.$$

Für $\psi(y) = y^m$ etwa:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{m a x^{m-1} y}{b m x^m + y} = 0, \qquad a x^m y^{\frac{mb}{a}} + \int y^{\frac{mb}{a}} \partial x = C,$$

$$a x^m y^{\frac{mb}{a}} + \frac{a}{mb+a} y^{\frac{mb+a}{a}} = C.$$

IV. Die Gleichung

$$a\varphi(x)\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + b\varphi(y)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \psi(x) = 0 \qquad (l)$$

kann in ähnlicher Weise behandelt werden. Man hat dann $M = b\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $N = a\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, also $\frac{\partial M}{\partial y} = b\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = a\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{b-a}{a}\frac{\partial\, l\varphi(x)}{\partial x}$, also $v = e^{\frac{b-a}{a} l\varphi(x)} = \varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}$, so dass $\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}$ ein integrirender Faktor von (l) ist. Multiplizirt man, so erhält man:

$$a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + b\,\varphi(y)\,\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} + \psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}} = 0,$$

d. h.

$$\frac{d}{dx}\left[a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\varphi(y)\right] + \frac{d}{dx}\int\psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\partial x = 0,$$

so dass die Integralgleichung von (l) ist:

$$a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\varphi(y) + \int\psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\partial x = C. \qquad (l')$$

V. Angenommen in der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)\ [\text{oder auch } dy = f(x, y)\,dx]$$

enthalte $f(x, y)$ eine Konstante a, welche in der Grösse

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y},$$

wo f statt $f(x, y)$ gesetzt ist, oder allgemeiner in $\varphi(f)\,f_1$ nicht mehr vorkömmt, wenn $\varphi(f)$ eine (beliebige) Funktion von f bedeutet, so ist $\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}$ ein integrirender Faktor von $\frac{\partial y}{\partial x} - f(x, y) = 0$.

Denn, da a nicht in $f_1\,\varphi(f)$ vorkommt, so ist $\frac{\partial\,[f_1\,\varphi(f)]}{\partial a} = 0$, d. h.

$$\frac{\partial\left[\varphi(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]}{\partial a}=0,$$

$$\varphi'(f)\frac{\partial f}{\partial a}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right]+\varphi(f)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial a}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial a}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\left[\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[f\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}\right]}{\partial y}=0.$$

Letztere Gleichung ist aber die Gleichung (b) des §. 96, wenn

$$\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}\,\frac{\partial y}{\partial x}-\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}f=0$$

die zu integrirende Gleichung ist. Damit ist die Behauptung erwiesen.

§. 98.

Aufsuchung von Differentialgleichungen, die einen gegebenen integrirenden Faktor haben.

I. Bei der Unmöglichkeit, den integrirenden Faktor unmittelbar zu bestimmen, kann man sich die Frage stellen, wie eine Gleichung beschaffen seyn müsse, damit sie durch einen der Form nach vorgeschriebenen Faktor integrirbar werde. So wollen wir etwa untersuchen, wie die Grössen X, X_1, ξ, ξ_1, die wir als blosse Funktionen von x voraussetzen, beschaffen seyn müssen, damit die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+Xy^2+X_1=0 \qquad \text{(m)}$$

durch den Faktor

$$\frac{F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1} \qquad \text{(n)}$$

integrirbar werde, wo $F(x)$ eine bekannte Funktion von x ist. Es muss also identisch seyn:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(Xy^2+X_1)F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1}\right),$$

d. h.

$$(y^2+2\xi y+\xi_1)F'(x)-\left(2y\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)F(x)=(y^2+2\xi y+\xi_1)2XF(x)y-$$
$$-(Xy^2+X_1)F(x)(2y+2\xi),$$

oder

$$y^2[F'(x)-2\xi XF(x)]+y[2\xi F'(x)-2\frac{\partial\xi}{\partial x}F(x)-2\xi_1 XF(x)+2X_1F(x)]+\xi_1F'(x)-$$
$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x}F(x)+2\xi X_1F(x)=0,$$

so dass also

$$F'(x)-2\xi XF(x)=0,\quad \xi F'(x)-\frac{\partial\xi}{\partial x}F(x)-\xi_1XF(x)+X_1F(x)=0,\quad \xi_1F'(x)-\frac{\partial\xi_1}{\partial x}F(x)+$$
$$+2\xi X_1F(x)=0.$$

Hieraus folgt

$$\xi = \frac{F'(x)}{2XF(x)}, \text{ also } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{XF(x)F''(x) - F'(x)\left[\frac{\partial X}{\partial x}F(x) + XF'(x)\right]}{2X^2F(x)^2},$$

und dann aus der zweiten Gleichung:

$$X_1 = X\xi_1 + \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2};$$

somit wenn man diesen Werth in die dritte Gleichung einsetzt:

$$\xi_1 F'(x) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}F(x) + \frac{F'(x)}{X}\left\{\xi_1 X + \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - 2\frac{F'(x)}{F(x)}\xi_1 - \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{2X^3F(x)^3}F'(x) = 0;$$

mithin da $\int \frac{F'(x)}{F(x)}\partial x = lF(x)$, nach §. 92, I:

$$\xi_1 = F(x)^2\left[C + \frac{1}{2}\int \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{X^3F(x)^5}F'(x)\partial x\right],$$

so dass also in der Gleichung (m) X eine beliebige Funktion von x seyn kann; dann aber:

$$\xi = \frac{F'(x)}{2XF(x)},\ \xi_1 = CF(x)^2 + \frac{1}{2}F(x)^2\int \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{X^3F(x)^5}F'(x)\partial x,$$

$$X_1 = X\xi_1 + \frac{XF(x)F''(x) - \frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x) - 2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2}$$

seyn muss, damit (m) durch den Faktor (n) integrirbar wird.

1) Sey $F(x) = 1$, $X = a$ d. h. konstant, so ist $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$, also

$$\xi = 0,\ \xi_1 = C,\ X_1 = aC,$$

d. h. die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + ay^2 + aC = 0$$

wird integrirbar durch den Faktor $\frac{1}{y^2 + C}$, wie natürlich, da derselbe die Veränderlichen trennt.

2) Sey $F(x) = x^m$, $X = a$, so ist $F'(x) = mx^{m-1}$, $F''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, also

$$\xi = \frac{m}{2ax},\ \xi_1 = Cx^{2m} + \frac{1}{2}x^{2m}\int \frac{m(m-1)ax^{2m-2} - 2am^2x^{2m-2}}{a^3x^{5m}}mx^{m-1}\partial x = Cx^{2m} + \frac{m^2}{4a^2x^2},\ X_1 = aCx^{2m} + \frac{m^2}{4ax^2} - \frac{m(m+1)}{2ax^2} = aCx^{2m} - \frac{m(m+2)}{4ax^2};$$

mithin ist die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}=0$$

integrirbar zu machen durch den Faktor

$$\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}.$$

Will man nun wirklich integriren, so ist in §. 96, I:

$$P=\frac{ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}x^m,\quad Q=\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}},$$

also wenn man die Form (c′) wählt:

$$\int Q\,\partial y=\sqrt{\frac{a}{b}}\,arc\left[tg=\frac{2y+\frac{m}{ax}}{2x^m\sqrt{\frac{b}{a}}}\right]=\sqrt{\frac{a}{b}}\,arc\left(tg=\frac{2axy+m}{2ax^{m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\text{wenn } \frac{a}{b}>0,$$

$$=\sqrt{\frac{-a}{b}}\;l\,\frac{2y+\frac{m}{ax}-2x^m\sqrt{\frac{-b}{a}}}{2\sqrt{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}},\ \text{wenn } \frac{b}{a}<0.$$

Ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\partial y=\frac{2a^2x^m[2axy-(2axy+m)(m+1)]}{4a^2bx^{2m+2}+4a^3x^2y^2+4a^2mxy+m^2a},$$

$$P-\frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\partial y=\frac{\left(ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}\right)x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}+\frac{x^m}{2ax^2}\;\frac{2maxy+m(m+1)}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}=$$

$$=\frac{x^m\left(ay^2+bx^{2m}+\frac{my}{x}+\frac{m^2}{4ax^2}\right)}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m}{4a^2x^2}}=ax^m;$$

$$\int\left[P-\frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\partial y\right]\partial x=\frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

so dass also die Integralgleichung ist:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,arc\left(tg=\frac{2axy+m}{2ax^{m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{ax^{m+1}}{m+1}=C,\ \frac{a}{b}>0,$$

$$\sqrt{\frac{-a}{b}}\;l\,\frac{2y+\frac{m}{ax}-2x^m\sqrt{\frac{-b}{a}}}{2\sqrt{\left(y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}\right)}}+\frac{ax^{m+1}}{m+1}=C,\ \frac{a}{b}<0.$$

Für $m=-1$ tritt an die Stelle von $\frac{x^{m+1}}{m+1}$: $l(x)$.

3) Sey $X=aF(x)$, so ist

$$\xi=\frac{F'(x)}{2aF(x)^2},\quad \xi_1=CF(x)^2+\frac{1}{2}\frac{F(x)^2}{a^2}\int\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{F(x)^7}F'(x)\partial x,$$

$$X_1=aCF(x)^3+\frac{1}{2}\frac{F(x)^3}{a}\int\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{F(x)^7}F'(x)\partial x+\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{2aF(x)^3}.$$

Für $F(x)=x^m$ wäre also

$$\xi=\frac{m}{2ax^{m+1}},\quad \xi_1=Cx^{2m}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}},\quad X_1=aCx^{3m}-\frac{(3m+2)m}{4ax^{m+2}},$$

so dass die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ax^my^2+bx^{3m}-\frac{m(3m+2)}{4ax^{m+2}}=0$$

integrirbar wird durch den Faktor

$$\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax^{m+1}}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}}}.$$

Als Integralgleichung findet sich wie oben

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,arc\left(tg=\frac{2ax^{m+1}y+m}{2ax^{2m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{ax^{2m+1}}{2m+1}=C,\quad \frac{a}{b}>0,$$

$$\sqrt{-\frac{a}{b}}\,l\frac{2y+\frac{m}{ax^{m+1}}-2x^m\sqrt{-\frac{b}{a}}}{2\sqrt{\left(y^2+\frac{my}{ax^{m+1}}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}}\right)}}+\frac{ax^{2m+1}}{2m+1}=C,\quad \frac{a}{b}<0.$$

Faktor der Form $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

II. Wir wollen uns die Frage stellen, ob die Gleichung

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(p)}$$

durch einen Faktor der Form $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ integrirbar gemacht werden könne.

Ist also in (e) §. 97 $v=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$, so gibt diese Gleichung:

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right)\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]=Q\left[nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)-x^{n-2}yf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]-Px^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

woraus

$$\frac{f'}{f}=\frac{nQx-x^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Qy+Px}. \qquad \text{(q)}$$

Da die erste Seite eine blosse Funktion von $\frac{y}{x}$ ist, so muss auch die zweite Seite in dieser Lage seyn. Setzt man also $y=\mu x$ in dieser zweiten Seite, s o m u s s x a u s f a l l e n, d. h. eine Funktion von μ zum Vorschein kommen.

Ist, unter dieser Voraussetzung, $F(\mu)$ die zweite Seite, so ergibt sich

$$f = c\, e^{\int F(\mu)\partial\mu}, \quad v = x^n e^{\int F(\mu)\partial\mu},$$

wodurch der integrirende Faktor gefunden ist.

Für $Qy + Px = 0$ wäre die Bestimmung unmöglich; alsdann heisst aber die vorgelegte Differentialgleichung:

$$P\left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

und gehört zu §. 91.

4) $2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3 + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt als zweite Seite von (q):

$$\frac{-(n+6)x^4 + (3n+6)x^2y^2 + 2nxy^3 + (n+2)x^3 - 2x^2y}{2x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 2y^4 + x^2y + xy^2},$$

was für $y = \mu x$ zu

$$\frac{-(n+6) + (3n+6)\mu^2 + 2n\mu^3 + [(n+2) - 2\mu]x^{-1}}{2 + 2\mu + 2\mu^3 + 2\mu^4 + [\mu + \mu^2]x^{-1}}$$

wird. Es fragt sich also noch, ob man n so wählen kann, dass hier x verschwindet. Setzt man $n = -2$, so ist die obige Grösse gleich

$$\frac{-4 - 4\mu^3 - 2\mu x^{-1}}{2 + 2\mu + 2\mu^3 + 2\mu^4 + (\mu+1)\mu x^{-1}} = -\frac{2}{\mu+1}\,\frac{2 + 2\mu^3 + \mu x^{-1}}{2 + 2\mu^3 + \mu x^{-1}} = -\frac{2}{\mu+1},$$

so dass dann $F(\mu) = -\frac{2}{\mu+1}$, $f = \frac{c}{(1+\mu)^2}$, und der integrirende Faktor also $\frac{x^{-2}}{(1+\mu)^2} = \frac{1}{(x+y)^2}$. Mittelst desselben ergibt sich als Integralgleichung

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = C.$$

§. 99.

Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades.

Im Seitherigen haben wir immer vorausgesetzt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ komme in der gegebenen Gleichung nur in der ersten Potenz vor. Wird diese Beschränkung aufgehoben, so stellt sich die Aufgabe allgemeiner so: Die Integralgleichung der Gleichung

$$F_n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + F_{n-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots + F_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + F_0 = 0 \qquad \text{(a)}$$

zu finden, wenn $F_0, F_1, \ldots, F_n$ gewisse gegebene Funktionen von x und y sind. *

---

* Man pflegt die (a) zuweilen auch zu schreiben:

$$F_n(dy)^n + F_{n-1}(dy)^{n-1}dx + F_{n-2}(dy)^{n-2}(dx)^2 + \ldots + F_1\,dy\,(dx)^{n-1} + F_0(dx)^n = 0.$$

Der unmittelbarste Weg hiezu wäre nun allerdings, die Gleichung (a) nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufzulösen, d. h. sie in ihre einfachsten Faktoren zu zerfällen, so dass sie identisch wäre mit

$$F_n\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_1\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_2\right)\ldots\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_n\right)=0, \qquad (a')$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bekannte Funktionen von x und y sind. Da alsdann die Gleichung (a′), d. h. (a), befriedigt ist, wenn entweder

$$\frac{\partial y}{\partial x}-f_1=0, \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x}-f_2=0, \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x}-f_3=0, \ldots, \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x}-f_n=0, \qquad (b)$$

so wird auch, wenn

$$\varphi_1(x,y,C_1)=0, \ \varphi_2(x,y,C_2)=0, \ldots, \varphi_n(x,y,C_n)=0 \qquad (c)$$

die Integralgleichungen der Gleichungen (b) sind, jede der Gleichungen (c) der Gleichung (a) genügen, und also eine Auflösung derselben seyn, wobei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten sind. Die Gleichung

$$\varphi_1(x,y,C_1)\,\varphi_2(x,y,C_2)\ldots\varphi_n(x,y,C_n)=0 \qquad (d)$$

wird eben so der (a) genügen, da aus ihr jede der Gleichungen (c) folgen kann, indem man den einen oder andern Faktor Null setzt, und andere Gleichungen als (c) hieraus nicht folgen können. Die Grössen $C_1, C_2, \ldots C_n$ kann man ganz wohl durch dasselbe Zeichen C bezeichnen, da die Gleichung (d) doch nur sagt, dass einer oder der andere ihrer Faktoren Null ist, während es die übrigen nicht sind. Ist also z. B. $\varphi_1(x,y,C_1)=0$, so ist eben C_1 eine willkürliche Konstante, ob dieselbe nun mit C oder C_1 bezeichnet worden. Man kann also als allgemeine Integralgleichung von (a) ansetzen:

$$\varphi_1(x,y,C)\,\varphi_2(x,y,C)\ldots\varphi_n(x,y,C)=0. \qquad (d')$$

1) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=a^2, \ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-a^2=0, \ \left(\frac{\partial y}{\partial x}+a\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-a\right)=0;$$

aber $\frac{\partial y}{\partial x}+a=0$ gibt $y+ax+C=0$; $\frac{\partial y}{\partial x}-a=0$ gibt $y-ax+C=0$, also ist

$$(y+ax+C)(y-ax+C)=0, \ (y+C)^2-a^2x^2=0.$$

2) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=ax, \ \left(\frac{\partial y}{\partial x}-\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\sqrt{ax}\right)=0;$$

$\frac{\partial y}{\partial x}-\sqrt{ax}=0$ gibt $y-\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C=0$, $\frac{\partial y}{\partial x}+\sqrt{ax}=0$ eben so $y+\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C=0$, also

$$\left(y-\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C\right)\left(y+\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C\right)=0, \ (y+C)^2-\frac{4}{9}ax^3=0.$$

3) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3-(xy+x^2+y^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(x^3y+y^3x+x^2y^2)\frac{\partial y}{\partial x}-x^3y^3=0,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}-xy\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-x^2\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-y^2\right)=0.$$

$\frac{\partial y}{\partial x} - xy = 0$, $\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} - x = 0$ (§. 91), $l(y) - \frac{1}{2}x^2 + C = 0$, $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$, $y - Ce^{\frac{1}{2}x^2} = 0$;

$\frac{\partial y}{\partial x} - x^2 = 0$, $y - \frac{x^3}{3} + C = 0$;

$\frac{\partial y}{\partial x} - y^2 = 0$, $\frac{1}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x} - 1 = 0$, $-\frac{1}{y} - x + C = 0$, $y = \frac{-1}{x+C}$, $y + \frac{1}{x+C} = 0$;

$$\left(y - Ce^{\frac{1}{2}x^2}\right)\left(y - \frac{x^3}{3} + C\right)\left(y + \frac{1}{x+C}\right) = 0.$$

4) Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x}{2y} = 0$$

führt eben so zu

$$\left(y - \frac{1}{2}x + C\right)\left[y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}} + C\right]\left[y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}} + C\right] = 0.$$

Wie man sieht, verlangt diese Methode die Auflösung höherer Gleichungen und ist schon desshalb nicht immer anwendbar, abgesehen davon, dass man in manchen Fällen leichter zum Ziele gelangen kann. Wir wollen nachfolgend einige der besondern Methoden angeben, nach denen in gewissen Fällen sich die Integralgleichung finden lässt.

§. 100.

Besondere Methoden der Integration.

I. Ist die gegebene Gleichung so beschaffen, dass sie sich nach y auflösen lässt, d. h. kann man sie unter die Form

$$y = f\left(x, \frac{\partial y}{\partial x}\right) \qquad \text{(a)}$$

bringen, so setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, wodurch die Gleichung zu $y = f(x, u)$ wird. Die Differenzirung dieser Gleichung gibt:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und x. Kann man dieselbe integriren, und ist

$$F(x, u, C) = 0 \qquad \text{(b)}$$

die Integralgleichung, so eliminire man u zwischen dieser Gleichung und $y = f(x, u)$, um die Integralgleichung von (a) zu erhalten. *

* Es kann sich allerdings hiebei ereignen, dass die allgemeinste Integralgleichung, wie sie nach §. 99 erhalten werden könnte, nicht erscheint. Immerhin aber ist die erhaltene Gleichung eine der Integralgleichungen (c) des §. 99, oder enthält deren mehrere. Dieselbe Bemerkung gilt für die übrigen Fälle.

1) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - 1 = 0;\ u^4 + yu^3 - 1 = 0,\ y = \frac{1-u^4}{u^3}.$

$$u = \left(-1 - \frac{3}{u^4}\right)\frac{\partial u}{\partial x},\ \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{u^5}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = -1;\ l(u) - \frac{3}{4u^4} = -x + C\ (\S.\ 91).$$

Demnach u zu eliminiren zwischen

$$l(u) - \frac{3}{4u^4} + x = C,\ u^4 + yu^3 - 1 = 0.$$

II. Wäre in I die vorgelegte Gleichung, nachdem $\frac{\partial y}{\partial x} = u$ gesetzt worden:

$$y = x\varphi(u) + \psi(u),\ \text{also } u = \varphi(u) + [x\varphi'(u) + \psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},$$

so hätte man, wenn man beachtet (§. 21, I), dass $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = 1$:

$$[u - \varphi(u)]\frac{\partial x}{\partial u} - x\varphi'(u) - \psi'(u) = 0,\ \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - u}x + \frac{\psi'(u)}{\varphi(u) - u} = 0,$$

also nach §. 92, I:

$$x = e^{-\int\frac{\varphi'(u)\partial u}{\varphi(u)-u}}\left[C - \int\frac{\psi'(u)\partial u}{\varphi(u) - u}e^{\int\frac{\varphi'(u)\partial u}{\varphi(u)-u}}\partial u\right].$$

In dem besondern Falle, da $\varphi(u) = u$, kann man dieses Verfahren nicht anwenden. Alsdann aber hat man

$$y = ux + \psi(u),\ u = u + [x + \psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},\ 0 = [x + \psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},$$

d. h. entweder $x + \psi'(u) = 0$, oder $u = C$. Also ist eine Integralgleichung:

$$y = Cx + \psi(C),$$

während eine andere durch Elimination von u zwischen $y = ux + \psi(u)$, $x + \psi'(u) = 0$ folgt; diese letztere enthält aber keine willkürliche Konstante. (Vergl. §. 127.) In ähnlicher Weise verfährt man in andern Fällen.

2) $y = x\frac{\partial y}{\partial x} + ax^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2;\ y = xu + ax^2u^2,\ u = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2axu^2 + 2ax^2u\frac{\partial u}{\partial x},$

$$0 = 2axu^2 + x\frac{\partial u}{\partial x}(1 + 2axu),\ 0 = 2au^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(1 + 2axu),\ 0 = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{x}{u} + \frac{1}{2au^2},$$

$$x = \frac{1}{u}\left[C - \frac{1}{2a}\int\frac{u}{u^2}\partial u\right] = \frac{C}{u} - \frac{1}{2a}\frac{l(u)}{u},$$

also

$$ux = C - \frac{l(u)}{2a},\ y = ux + au^2x^2.$$

3) Man soll diejenige Kurve finden, bei der die von dem Anfangspunkte der Koordinaten auf die berührende Gerade gefällte Senkrechte eine beliebige Funktion der Abszisse des Punktes ist, in den die berührende Gerade gezogen ist.

Seyen x, y die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Kurve, so ist die Gleichung der Tangente in demselben:



$$v - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\xi - x),$$

also die Länge des vom Anfangspunkt gefällten Perpendikels:

$$\pm \frac{y - x\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

und da diess $= f(x)$ seyn soll, so hat man

$$y = x\frac{\partial y}{\partial x} + f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Man zieht hieraus für $\frac{\partial y}{\partial x} = u$:

$$u = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + f'(x)\sqrt{1+u^2} + \frac{f(x)}{\sqrt{1+u^2}} u \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$0 = \left(x + \frac{u f(x)}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + f'(x)\sqrt{1+u^2}.$$

4) In dem speziellen Falle, da $f(x) = ax$, hat man

$$0 = x\left(1 + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + a\sqrt{1+u^2}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{au}{1+u^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{x} = 0;$$

$$l(u + \sqrt{1+u^2}) + \frac{1}{2} a\, l(1+u^2) + a\, l(x) = C, \quad y = ux + ax\sqrt{1+u^2}.$$

Für $f(x) = a$, d. h. da alle Senkrechten einander gleich seyn sollen:

$$0 = \left(x + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}; \quad u = C \text{ oder } x + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} = 0.$$

Die erste Gleichung gibt

$$y = Cx + a\sqrt{1+C^2},$$

d. h. eine Gerade, bei welcher der Satz freilich richtig ist, da sie sich selbst Tangente ist. Die zweite Gleichung gibt

$$y = xu + a\sqrt{1+u^2}, \quad x = -\frac{au}{\sqrt{1+u^2}}, \quad x^2 = \frac{a^2u^2}{1+u^2}, \quad u^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}, \quad u = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+u^2} = -\frac{au}{x} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \mp\sqrt{a^2-x^2};$$

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad y^2 + x^2 = a^2,$$

d. h. einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt und dessen Halbmesser a ist.

III. Hat die gegebene Differentialgleichung die Form

$$x = f\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = f(y, u), \quad u = \frac{\partial y}{\partial x},$$

so zieht man aus ihr

$$1=\frac{\partial f}{\partial y}u+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder da $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}u$:

$$1=\frac{\partial f}{\partial y}u+\frac{\partial f}{\partial u}u\frac{\partial u}{\partial y},$$

in welcher Gleichung bloss u und y vorkommen. Kann man sie integriren, so eliminirt man u zwischen dieser Integralgleichung und $x=f(y,u)$.

5) $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=2x+2y\frac{\partial y}{\partial x},\ x=-yu+\frac{1}{2}\sqrt{1+u^2};$$

$$1=-u^2-y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+u^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}u;$$

$$1=-u^2-uy\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\partial u}{\partial y},\ 1+u^2=\left(\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}-uy\right)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{u}{1+u^2}y,\ \frac{\partial y}{\partial u}+\frac{u}{1+u^2}y-\frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

also nach §. 92, I da $\int\frac{u\,\partial u}{1+u^2}=\frac{1}{2}l(1+u^2)=l\sqrt{1+u^2}$:

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left[C+\frac{1}{2}\int\frac{u^2\sqrt{1+u^2}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\partial u\right]=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left[C+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\mathit{arc}(tg=u)\right],$$

so dass also

$$y=\frac{C}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\mathit{arc}(tg=u),\ x=-uy+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+u^2}.$$

6) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x^2\frac{\partial y}{\partial x}=0;\ u^3+xu^2-x^2u=0.$$

$$x=\frac{u}{2}(1\pm\sqrt{5}),\ 1=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\frac{\partial u}{\partial y}u,\ y=\tfrac{1}{4}u^2(1\pm\sqrt{5})+C.$$

$$u=\frac{2x}{1\pm\sqrt{5}},\ y=\frac{x^2}{1\pm\sqrt{5}}+C,\ y=-\frac{x^2}{4}(1\mp\sqrt{5})+C.$$

Nach §. 99 hätte man

$$y=C,\ y=-\tfrac{1}{4}x^2(1-\sqrt{5})+C,\ y=-\tfrac{1}{4}x^2(1+\sqrt{5})+C,$$

von welchen drei Auflösungen die erste oben fehlt, was von der Auswerfung des Faktors u herrührt.

Homogene Gleichungen.

IV. Sind in der Gleichung

$$F_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n+F_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1}+\ldots\ldots+F_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+F_n=0$$

die Funktionen $F_0, F_1, \ldots, F_n$ homogene Funktionen von x und y desselben

r^{ten} Grades (§. 95), so setze man $y = xz$, wodurch man erhalte $F_0 = Z_0 x^r$, $F_1 = Z_1 x^r, \ldots, F_n = Z_n x^r$, so wird die vorgelegte Gleichung zu

$$Z_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + Z_1 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x} + Z_n = 0.$$

Gesetzt man erhalte hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$ als Funktion von z, so ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(z),\ z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z),\ \frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(z) - z}{x},\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\varphi(z) - z} + C,$$

wo noch $z = \frac{y}{x}$ zu setzen ist.

Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x} = u$ und kann z als Funktion von u finden, so ist

$$z = \varphi(u),\ \frac{\partial y}{\partial x} = z + x\frac{dz}{dx},\ \text{d. h. } u = \varphi(u) + x\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u = \varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{x} = \frac{\varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$l(x) = \int \frac{\varphi'(u)\,\partial u}{u - \varphi(u)},\ \text{oder auch } l(x) = -\int \frac{1 - \varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\partial u + \int \frac{\partial u}{u - \varphi(u)} = -l[u - \varphi(u)] - \int \frac{\partial u}{\varphi(u) - u}.$$

Also

$$y = x\varphi(u),\ l(x) = \int \frac{\varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\partial u + C = -l[u - \varphi(u)] - \int \frac{\partial u}{\varphi(u) - u} + C.$$

Oft ist es besser, die Gleichung

$$Z_0 \left(z + x\frac{dz}{dx}\right)^n + Z_1 \left(z + x\frac{dz}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1}\left(z + x\frac{dz}{dx}\right) + Z_n = 0$$

nach $x\frac{dz}{dx}$ aufzulösen. Folgt daraus $x\frac{dz}{dx} = \varphi(z)$, so ist

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\varphi(z)} + C,\ z = \frac{y}{x}.$$

7) $$x^2 + x^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - y^2 = 0 \text{ gibt } 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - z^2 = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{z^2 - 1} = \varphi(z),\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\pm\sqrt{z^2 - 1} - z} + C = -\int (z \pm \sqrt{z^2 - 1})\,\partial z$$

$$= -\left[\frac{z^2}{2} \pm \frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} \mp \frac{1}{2} l(z + \sqrt{z^2 - 1})\right] + C,$$

d. h. wenn man $z = \frac{y}{x}$ setzt:

$$2l(x) = C \pm l\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right) \mp \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Man hätte dieselbe Gleichung übrigens auch nach der zweiten Weise auflösen können.

8) Man soll eine Kurve suchen so beschaffen, dass alle Lichtstrahlen, die von einem gegebenen Punkte aus an sie gelangen, zurückgeworfen mit einander parallel laufen.

Sey der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Koordinaten; die Richtung, mit der alle zurückgeworfenen Strahlen parallel gehen sollen, sey parallel der Axe der x; ferner seyen x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve. Die Gleichung des in diesen Punkt gerichteten Lichtstrahls ist also $x v = y \xi$, wenn wieder ξ, v die laufenden Koordinaten sind; die Richtung des zurückgeworfenen Strahls ist parallel der Axe der x, also ist die Gleichung dieses Strahls $v = y$. Die trigonometrische Tangente des Winkels der berührenden Geraden und des einfallenden Strahls ist somit $\frac{\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{\partial y}{\partial x}}$, während die des Winkels derselben Geraden und des zurückgeworfenen Strahls $= \frac{\partial y}{\partial x}$ ist, so dass, da beide Winkel gleich seyn müssen:

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \; y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2x\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0,$$

woraus nun die Gleichung der Kurve zu suchen ist. Für $y = xz$:

$$z\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial x} - z = 0, \; \frac{\partial y}{\partial x} = u, \; z = \frac{2u}{1-u^2} = \varphi(u),$$

$$l(x) = -l\left(u - \frac{2u}{1-u^2}\right) - \int \frac{\partial u}{\frac{2u}{1-u^2} - u} = -l\left(\frac{-u(1+u^2)}{1-u^2}\right) - \int \frac{\partial u\,(1-u^2)}{(1+u^2)u}$$

$$= -l\left(\frac{-u(1+u^2)}{1-u^2}\right) - l(u) + l(1+u^2) + C = -l(-1) - 2l(u) + l(1-u^2) + C,$$

oder wenn man $-l(-1) + C = C$ setzt, was man darf, da ja sicher $l(-1)$ konstant ist, so folgt

$$l(x) = l\left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) + C, \; x = C\frac{1-u^2}{u^2},$$

also

$$y = \frac{2xu}{1-u^2}, \; x = C\left(\frac{1-u^2}{u^2}\right); \; 1-u^2 = \frac{xu^2}{C}, \; y = \frac{2C}{u}$$

$$u = \frac{2C}{y}, \; u^2 = \frac{4C^2}{y^2}, \; 1-u^2 = \frac{y^2-4C^2}{y^2}, \; y^2 = 4C(x+C).$$

Diese Gleichung stellt Parabeln vor, in denen der Brennpunkt Anfangspunkt der Koordinaten ist.

Einführung neuer Veränderlichen.

V. Kann man die vorangehenden Methoden nicht anwenden, so muss man sich durch Einführung neuer Veränderlichen zu helfen suchen, die bald in einer, bald in anderer Weise gewählt werden müssen.

9)
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + y^3 \frac{\partial y}{\partial x} + y^4 = 0.$$

Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = u y$, so ist $u^3 y^3 + y^3 u y + y^4 = 0$, $y^3(u^3 + u y + y) = 0$, und da $y = 0$ wohl auch der vorgelegten Gleichung genügt, aber keine Konstante enthält, so hat man $u^3 + u y + y = 0$, $y = -\frac{u^3}{1+u}$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u y = -\frac{u^4}{1+u}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3u^2(1+u) - u^3}{(1+u)^2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

d. h.

$$\frac{-u^4}{1+u} = -\frac{3u^2 + 2u^3}{(1+u)^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \; 1 = \frac{3+2u}{u^2(1+u)}\frac{\partial u}{\partial x}, \; x = \int \frac{(3+2u)\partial u}{u^2(1+u)} = -\frac{3}{u} + l\left(\frac{1+u}{u}\right) + C,$$

also erhält man eine Lösung der Aufgabe durch Elimination von u aus

$$u^3 + u y + y = 0, \; x = -\frac{3}{u} + l\left(\frac{1+u}{u}\right) + C.$$

10)
$$y^6\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 + y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 1 = 0,$$

gibt für $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{u y}$:

$$\frac{1}{u^5} + \frac{1}{u^3 y} + 1 = 0, \; y = -\frac{u^2}{1+u^5}, \; \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2u - 3u^6}{(1+u^5)^2},$$

$$\frac{1}{u y} = -\frac{1+u^5}{u^3}, \; \frac{1+u^5}{u^3} = \frac{2u - 3u^6}{(1+u^5)^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \; 1 = \frac{2u^4 - 3u^9}{(1+u^5)^3}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x = \int \frac{2u^4 - 3u^9}{(1+u^5)^3}\partial u + C = 2\int \frac{u^4 \partial u}{(1+u^5)^3} - 3\int \frac{u^9 \partial u}{(1+u^5)^3} + C.$$

Die beiden Integrale bestimmt man, wenn man $1 + u^5 = z$ setzt, wodurch dann erhalten wird

$$x = -\frac{1}{5(1+u^5)^2} + \frac{3}{5}\frac{1}{u^5+1} - \frac{3}{10}\frac{1}{(1+u^5)^2} + C,$$

d. h. man hat

$$y = -\frac{u^2}{1+u^5}, \; x = \frac{3}{5}\frac{1}{1+u^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+u^5)^2} + C,$$

zwischen welchen Gleichungen u zu eliminiren ist.

11) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - a x \frac{\partial y}{\partial x} + x^3 = 0$; $\frac{\partial y}{\partial x} = u x$, $u^3 x^3 - a u x^2 + x^3 = 0$, $u^3 x - a u + x = 0$,

$$x = \frac{a u}{1+u^3}, \; \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a(1-2u^3)}{(1+u^3)^2}, \; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}, \; \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}:$$

$$y = a^2 \int \frac{u^2(1-2u^3)\partial u}{(1+u^3)^3} + C, \; x = \frac{a u}{1+u^3}.$$

12) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 + y^9 \frac{\partial y}{\partial x} + y^7\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y^{11} = 0$, $y = \frac{1}{z}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}$;

$$-\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^5 - \frac{1}{z^{11}}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z^{11}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{z^{11}} = 0, \; -z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^5 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} + 1 = 0.$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = u$ (I): $-z u^5 + u^2 - u + 1 = 0$, $z = \frac{u^2 - u + 1}{u^5}$, $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{3u^2 - 4u + 5}{u^6}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad u = -\frac{3u^2-4u+5}{u^6}\frac{\partial u}{\partial x},\quad 1 = -\frac{3u^2-4u+5}{u^7}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x = -\int \frac{3u^2-4u+5}{u^7}\partial u + C = \frac{3}{4u^4} - \frac{4}{5u^5} + \frac{5}{6u^6} + C;$$

$$y = \frac{u^5}{u^2-u+1},\quad x = \frac{3}{4u^4} - \frac{4}{5u^5} + \frac{5}{6u^6} + C.$$

VI. Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{mn}{m-n}} = ax^m + by^n,\quad \frac{\partial y}{\partial x} = (ax^m + by^n)^{\frac{m-n}{mn}}$$

gibt, wenn $y = x^{\frac{m}{n}} z$, $\frac{\partial y}{\partial x} = x^{\frac{m}{n}}\frac{dz}{dx} + \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} z$:

$$\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} z + x^{\frac{m}{n}}\frac{dz}{dx} = x^{\frac{m-n}{n}}(a + bz^n)^{\frac{m-n}{mn}},$$

$$\frac{m}{n}z + x\frac{dz}{dx} = (a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}},\quad \frac{1}{\frac{m}{n}z - (a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}}}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} = 0,$$

$$l(x) + \int \frac{\partial z}{\frac{m}{n}z - (a + {}^n)^{\frac{m-n}{mn}}} = C,\quad z = yx^{-\frac{m}{n}}.$$

Hieher gehört etwa die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = ax^2 + by;\quad l(x) + \int \frac{\partial z}{2z - (a+bz)^{\frac{1}{2}}} = C,\quad z = \frac{y}{x^2}.$$

VII. Durch Aufsteigen zu höherer Ordnung lassen sich ebenfalls oft Differentialgleichungen integriren, wovon wir später (§§. 120, 123) Beispiele mittheilen werden. Wir fügen hier nur noch die allgemeine Bestimmung der Evolventen einer gegebenen Kurve bei.

Evolventen einer ebenen Kurve.

VIII. Man lege über eine Kurve (z. B. BC′ in Fig. 26, §. 46), einen Faden, den man in einem Punkte fest mache (z. B. in C′), während das freie Ende so bewegt werde, dass der Faden sich abwickelt von der Kurve und das frei gemachte Stück Tangente ist an die krumme Linie, so beschreibt der bewegte Endpunkt des Fadens eine Evolvente der gegebenen Kurve.

Seyen x, y die Koordinaten eines bestimmten Punktes der gegebenen Kurve; α, β die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Evolvente, so dass, wenn die Abwickelung des Fadens bis zum ersten Punkte fortgeschritten ist, das freie Ende sich im zweiten befindet. Es ist nun leicht einzusehen, dass der Faden zugleich im ersten Punkte Tangente an die eine,

und im zweiten Normale an die andere Kurve ist. Da β als Funktion von α gesucht wird, indem man sicher die Gleichung der Kurve sucht; ferner die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) an die erste Kurve ist $v - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\xi - x)$, die der Normale in (α, β) an die zweite Kurve: $v - \beta = -\frac{1}{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)}(\xi - \alpha)$, wenn ξ, v jeweils die laufenden Koordinaten sind, und diese zwei Gleichungen dieselbe Gerade ausdrücken sollen, so muss

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}}, \quad y - x\frac{\partial y}{\partial x} = \beta + \frac{\alpha}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}}$$

seyn, d. h.

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + 1 = 0, \quad y - \beta + (\alpha - x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Zieht man nun aus der Gleichung der gegebenen Kurve $\frac{\partial y}{\partial x}$, setzt dessen Werth in diese Gleichungen ein und eliminirt dann x und y aus dieser und der Kurvengleichung, so erhält man die Differentialgleichung der Evolvente.

13) Sey die gegebene Kurve ein Kreis, dessen Gleichung $x^2+y^2=r^2$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$, also hat man x und y zu eliminiren aus

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad -\frac{x}{y}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + 1 = 0, \quad y - \beta - \frac{x}{y}(\alpha - x) = 0,$$

wodurch man erhält

$$\left(\beta\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \alpha\right)^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2\right], \quad \beta\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \alpha = r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Wird diese Gleichung in derselben Weise integrirt, wie Nr. 5, so erhält man:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}[C + ru - r\,arc(tg = u)], \quad \alpha = \frac{r}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{Cu}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{ru}{\sqrt{1+u^2}}arc\,(tg = u),$$

oder wenn $u = tg\,\omega$:

$$\beta = C\cos\omega + r\sin\omega - r\omega\cos\omega, \quad \alpha = r\cos\omega - C\sin\omega + r\omega\sin\omega,$$

zwischen welchen Gleichungen ω zu eliminiren ist, um die Gleichung der Kreisevolventen zu erhalten.

Soll für $\omega = 0$: $\beta = 0$ seyn, so muss $C = 0$ seyn, und man erhält dann

$$\beta = r[\sin\omega - \omega\cos\omega], \quad \alpha = r[\cos\omega + \omega\sin\omega],$$

für die gewöhnliche Kreisevolvente.* (Für $\omega = o$ ist auch $\alpha = r$.)

---

* Legt man über einen Kreis einen Faden und wickelt denselben ab, so ist in diesen Formeln ω der Winkel den der nach dem Berührungspunkte des (abgewickelten) Fadens und des Kreises gezogene Halbmesser macht mit demjenigen Halbmesser, der nach dem anfänglichen Berührungspunkte gezogen ist. — C ist die Länge des anfänglichen freien Fadenstücks.

§. 101.

Integration mittelst Reihen.

Als letztes Mittel, wenn kein anderes gefunden werden kann, bleibt noch der Versuch, eine vorgelegte Reihe mittelst einer (endlichen oder unendlichen) Reihe zu integriren. Wir wollen einige der hier möglichen Fälle als Beispiele näher untersuchen und etwa nöthige allgemeine Bemerkungen an den besondern Fall anknüpfen.

I. Aus §. 53 folgt, wenn man in der dortigen Formel (10) $x = a$, $h = x - a$ setzt:

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} F'''(a) + \ldots \quad (a)$$

Bricht diese Reihe von selbst ab, so ist nothwendig $F(x)$ der alsdann endlichen Reihe gleich; bricht sie nicht von selbst ab, ist aber konvergent, so gilt dasselbe (§. 54). Die Reihe wird immer abbrechen, wenn etwa $F^n(x)$, $F^{n+1}(x)$, ... sämmtlich Null sind für $x = a$ oder gar für ein beliebiges x. Für unsere Zwecke ist $F(x) = y$, und wenn also etwa aus der vorgelegten Gleichung folgt, dass $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$, ... sämmtlich Null sind für $x = a$ oder für ein beliebiges x, so ist

$$y = y_a + \frac{x-a}{1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_a + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots n-1}\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_a,$$

worin y_a ganz willkürlich (unbestimmbar) bleibt, so dass dann $y_a = C$, d. h. gleich der willkürlichen Konstanten zu setzen ist. *

1) $$x\frac{\partial y}{\partial x} - 3y + bx^2 = 0 \text{ (§. 92)}.$$

Hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 3\frac{\partial y}{\partial x} + 2bx = 0,\quad x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial y}{\partial x} + 2bx = 0;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2b = 0,\quad x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2b = 0;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,\quad x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0,\quad x\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + 2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0, \ldots$$

---

* Ist $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$ die vorgelegte Differentialgleichung, so bilde man die Grössen:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y},\quad f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial y},\quad f_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x} + f\frac{\partial f_2}{\partial y}, \ldots,$$

und hat dann

$$y = b + \frac{x-a}{1} f(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_1(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f_2(a, b) + \ldots,$$

wo b die willkürliche Konstante bedeutet. Dass diess mit dem im Texte Gegebenen übereinstimmt, ist wohl leicht zu ersehen.

so dass also $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, ... sämmtlich Null sind für jedes x. Setzt man $x=a=1$, $y_a=y_1=c$, so ist für diesen Werth:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=3c-b,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=6c-4b,\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=6(c-b),$$

also

$$y=c+(3c-b)(x-1)+\frac{6c-4b}{2}(x-1)^2+\frac{6(c-b)}{6}(x-1)^3=(c-b)x^3+bx^2,$$

welcher Werth der vorgelegten Gleichung genügt.

2) $$\left(y\frac{\partial y}{\partial x}+gx\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+b\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

oder wenn man mit $4y$ multiplizirt, was gestattet ist, da nicht $y=0$ das allgemeine Integral seyn wird:

$$\left(2y\frac{\partial y}{\partial x}+2gx\right)\left(2xy\frac{\partial y}{\partial x}-2y^2\right)+4by\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

und wenn $y^2=z$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)+2b\frac{\partial z}{\partial x}=0.\ *$$

Aus dieser Gleichung folgt durch n malige Differenzirung nach x:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)\right]+2b\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}=0,$$

wo nun (§. 18'):

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)\right]=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)+$$
$$\frac{n}{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)+\ldots+\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)$$
$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2gx\right)\left[x\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}+(n-2)\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right]+\frac{n}{1}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2g\right)\left[x\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+(n-3)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left[x\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}+(n-4)\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}\right]+\ldots\ldots+\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-2z\right),$$

so dass also für $x=0$ (d. h. $a=0$) und $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$-2z\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial x}=0;$$

$$-2z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2g\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2gz}{b-z};$$

$$-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2g\right)\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,$$

u. s. w. alle folgenden Differentialquotienten Null. Ist also z für $x=0$ gleich c, so hat man

$$z=c+\frac{2gc}{b-c}\frac{x^2}{2},\ \text{d. h. } y^2=c+\frac{gc}{b-c}x^2.$$

---

* In anderer Form: $(dz+2gx\,dx)(x\,dz-2z\,dx)+2b\,dz\,dx=0.$

Man kommt auf obige Differentialgleichung bei Auflösung folgender Aufgabe: Diejenige Kurve zu suchen, welche alle Ellipsen, die dieselben Brennpunkte haben, unter rechten Winkeln schneidet. Sey nämlich $2e$ die gegebene Entfernung der zwei Brennpunkte, $2a$ die grosse Axe irgend einer der Ellipsen, so ist $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$ die Gleichung derselben, wenn die Koordinatenaxen wie in §. 46, II gewählt werden. Die Gleichung der berührenden Geraden in einem Punkte dieser Ellipse, dessen Koordinaten ξ, v sind, ist also (§. 11): $y-v=-\frac{a^2-e^2}{a^2}\frac{\xi}{v}(x-\xi)$. Geht nun die gesuchte Kurve (Trajectorie) durch diesen Punkt, und sind also ξ, v auch die Koordinaten desselben, so ist die Gleichung der berührenden Geraden an letztere: $y-v=\frac{\partial v}{\partial \xi}(x-\xi)$, wo $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ aus der noch unbekannten Gleichung der Trajectorie zu suchen ist. Da beide Tangenten auf einander senkrecht stehen sollen, so muss $-\frac{a^2-e^2}{a^2}\frac{\xi}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi}=-1$ seyn, d. h. wenn man nun mit x und y die Koordinaten der Trajectorie bezeichnet, so muss:

$$\frac{a^2-e^2}{a^2}\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=1,\ (a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$$

seyn, da dieser Punkt auch in der Ellipse liegt. Eliminirt man a^2 zwischen diesen Gleichungen, so bekommt man eine Gleichung, die für alle Ellipsen, also für alle Trajectorienpunkte gilt, d. h. man erhält die Gleichung der Trajectorie:

$$\left(x+y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)-e^2\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

mithin

$$y^2=c-\frac{c}{e^2+c}x^2,\ (e^2+c)y^2+cx^2=c(c+e^2).$$

Ist c positiv, so hat man die vorgelegten Ellipsen wieder, so dass ein positives c nicht passt; für negative c hat man Hyperbeln, welche dieselben Brennpunkte haben, und von denen jede wirklich alle Ellipsen rechtwinklig trifft. Hätte man Hyperbeln von denselben Brennpunkten gewählt, so wäre man auf Ellipsen gekommen.

3) $$3x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-6y\frac{\partial y}{\partial x}+x+2y=0,\ 3\frac{\partial y}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+2y+x=0.$$

Durch n malige Differenzirung folgt hieraus, wenn $n>1$:

$$3\frac{\partial y}{\partial x}\left[x\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}+(n-2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]+3n\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[x\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(n-3)\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}\right]+\ldots\ldots$$
$$+3\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+2\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=0,$$

während für $n=1$:

$$3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+3\frac{\partial y}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2\frac{\partial y}{\partial x}+1=0.$$

Hieraus für $x=0$ (d. h. $a=0$):

$$-6y\frac{\partial y}{\partial x}+2y=0,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{3};$$

$$-6y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial y}{\partial x}+1=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{2}{9y};$$

$$-6\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-6y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0;\ \text{u. s. w.}$$

demnach

$$y=c+\frac{1}{3}x+\frac{x^2}{9c}.$$

4) $$(x^2-g)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}-x^2=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=x^2.$$

Da

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=(x^2-g)\frac{\partial^{r+1}y}{\partial x^{r+1}}+2(r-1)x\frac{\partial^r y}{\partial x^r}+(r^2-3r)\frac{\partial^{r-1}y}{\partial x^{r-1}},$$

so ist für $n>2$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}+2(n-1)x\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(n^2-3n)\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}\right]+n\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+\right.$$
$$\left.2(n-2)x\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+(n^2-5n+4)\frac{\partial^{n-2}y}{\partial x^{n-2}}\right]+\ldots+\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=0,$$

während (für $n=1,\ 2$):

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\right]+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]-2x=0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\frac{\partial y}{\partial x}\right]+2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\right]+\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-\right.$$
$$\left.2xy\right]-2=0.$$

Hieraus folgt für $x=0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{y}{g}\pm\frac{\sqrt{y^2-g}}{g},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0,\ \text{u. s. w.},$$

so dass

$$y=c+\frac{x^2}{2}\left(-\frac{c}{g}\pm\frac{\sqrt{c^2-g}}{g}\right).$$

Setzt man

$$-\frac{c}{g}\pm\frac{\sqrt{c^2-g}}{g}=\frac{1}{\alpha},\ \text{so ist}\ \alpha=-c\mp\sqrt{c^2-g},\quad \alpha^2+2c\alpha+c^2=c^2-g,\quad c=-\frac{\alpha}{2}-\frac{g}{2\alpha},$$

also

$$y=-\frac{\alpha}{2}-\frac{g}{2\alpha}+\frac{x^2}{2\alpha},\quad x^2-2cy-g-c^2=0,$$

wo c (α) die willkürliche Konstante.

II. Oft führt die eben angegebene Methode auch auf eine unendliche Reihe, die dann nothwendig konvergiren muss, wenn ihre Anwendung möglich seyn soll. Lässt sich die Summe der unendlichen Reihe angeben, so hat man eben dadurch das Integral der Gleichung in geschlossener Form. In der Regel wird man dabei bequemer so verfahren, dass man für y eine Reihe von der Form

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\alpha+1}+Cx^{\alpha+2}+\ldots$$

wählt und dann α, A, B, ... so zu bestimmen sucht, dass diese Reihe der Gleichung genügt, ohne zwischen x und y irgend eine Beziehung festzustellen. Oft ist es bequemer, für y eine Form $\varphi(x)\,\psi(x)$ zu wählen, wo $\psi(x)$ eine

Reihe obiger Art, dagegen etwa $\varphi(x) = e^x$, $\sin ax, \ldots,$ ist; oder auch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ u. s. w.

5) Sey z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax$$

vorgelegt, und man setze $y = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi'(x)$ den Differentialquotienten von $\varphi(x)$ bedeutet, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2},$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi(x)^2} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)};\quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = ax,\ \varphi''(x) = ax\varphi(x).$$

Sey also

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$
$$\varphi''(x) = 2A_2 + 3.2A_3 x + 4.3A_4 x^2 + \ldots,$$

so muss

$$2A_2 + 3.2A_3 x + 4.3A_4 x^2 + \ldots = aA_0 x + aA_1 x^2 + aA_2 x^3 + \ldots$$

seyn, woraus

$A_2 = 0,\ 3.2A_3 = aA_0,\ 4.3A_4 = aA_1,\ 5.4A_5 = aA_2, \ldots,\ n(n-1)A_n = aA_{n-3}, \ldots,$

so dass A_0 und A_1 ganz willkürlich bleiben und

$$A_3 = \frac{aA_0}{2.3},\ A_4 = \frac{aA_1}{3.4},\ A_5 = 0,\ A_6 = \frac{aA_3}{5.6}, \ldots,\ A_n = \frac{aA_{n-3}}{(n-1)n},$$

ist; folglich

$$\varphi(x) = A_0\left[1 + \frac{ax^3}{2.3} + \frac{a^2x^6}{2.3.5.6} + \frac{a^3x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right] + A_1 x\left[1 + \frac{ax^3}{3.4} + \frac{a^2x^6}{3.4.6.7} + \ldots\right],$$

und wenn man die beiden unendlichen konvergenten Reihen mit X, X_1 bezeichnet:

$$\varphi(x) = A_0 X + A_1 X_1,\ \varphi'(x) = A_0\frac{\partial X}{\partial x} + A_1\frac{\partial X_1}{\partial x},$$

$$y = \frac{A_0\frac{\partial X}{\partial x} + A_1\frac{\partial X_1}{\partial x}}{A_0 X + A_1 X_1} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} + C\frac{\partial X_1}{\partial x}}{X + CX_1},$$

wo $C\left(=\frac{A_1}{A_0}\right)$ die willkürliche Konstante ist.

Man sieht schon aus den obigen Beispielen, worin das Wesen dieser Methode besteht, ohne dass wir weitere Beispiele zuzufügen hätten. (Vergl. auch §. 121).

Annahme einer Integralgleichung.

III. Zuweilen führt die Annahme einer Gleichung zwischen x und y, in der noch zu bestimmende Konstanten vorkommen, zu einem Integral.

6) So wenn etwa die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{a y^4 + b y^2 + 1}{a x^4 + b x^2 + 1}}$$

vorgelegt wäre, wähle man einmal die Gleichung

$$A_1 x^2 y^2 + A_2 (x^2 + y^2) + 2 A_3 x y - 1 = 0,$$

aus der folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A_1 x y^2 + A_2 x + A_3 y}{A_1 x^2 y + A_2 y + A_3 x} = -\frac{(A_1 y^2 + A_2) x + A_3 y}{(A_1 x^2 + A_2) y + A_3 x}.$$

Aber die angenommene Gleichung heisst auch

$$(A_1 y^2 + A_2) x^2 + 2 A_3 y x + A_2 y^2 - 1 = 0,$$

woraus

$$(A_1 y^2 + A_2)^2 x^2 + 2 A_3 y (A_1 y^2 + A_2) x + (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2) = 0,$$

$$(A_1 y^2 + A_2)^2 x^2 + 2 A_3 y (A_1 y^2 + A_2) x + (A_3 y)^2 = (A_3 y)^2 - (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2),$$

$$(A_1 y^2 + A_2) x + A_3 y = \pm \sqrt{(A_3 y)^2 - (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2)}$$

eben so

$$(A_1 x^2 + A_2) y + A_3 x = \pm \sqrt{(A_3 x)^2 - (A_2 x^2 - 1)(A_1 x^2 + A_2)},$$

so dass

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{-A_2 A_1 y^4 + (A_3^2 + A_1 - A_2^2) y^2 + A_2}{-A_2 A_1 x^4 + (A_3^2 + A_1 - A_2^2) x^2 + A_2}},$$

und wenn diese Gleichung identisch seyn soll mit der vorgelegten, so muss man haben

$$-A_2 A_1 = a A_2, \quad A_3^2 - A_2^2 + A_1 = b A_2$$

d. h.

$$A_1 = -a, \quad A_3 = \sqrt{A_2 (b + A_2) + a},$$

wo nun A_2 ganz willkürlich bleibt. Demnach ist die Integralgleichung der vorgelegten Gleichung:

$$-a x^2 y^2 + C (x^2 + y^2) + 2 x y \sqrt{C (b + C) + a} = 1.$$

Setzt man hier etwa $C = \frac{1}{k^2}$, also positiv, $a = m^2$, also ebenfalls positiv, $b = -1 - m^2$, so ist diese Gleichung:

$$x^2 + y^2 + 2 x y \sqrt{(1 - k^2)(1 - m^2 k^2)} - m^2 k^2 x^2 y^2 = k^2, \qquad \text{(a)}$$

und ist die Integralgleichung von

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{(1 - y^2)(1 - m^2 y^2)}{(1 - x^2)(1 - m^2 x^2)}}. \, * \qquad \text{(b)}$$

---

* Aus der Gleichung (a) folgt:

$$x = \frac{-\sqrt{(1 - k^2)(1 - m^2 k^2)}\, y \pm k \sqrt{(1 - y^2)(1 - m^2 y^2)}}{1 - m^2 k^2 y^2}.$$

Setzt man nun voraus, es sey für $y = 0$ nothwendig $x = k$, so gilt das obere Zeichen; das untere, wenn für $y = 0$, $x = -k$. Eben so

$$y = \frac{-x \sqrt{(1 - k^2)(1 - m^2 k^2)} \pm k \sqrt{(1 - x^2)(1 - m^2 x^2)}}{1 - m^2 k^2 x^2},$$

wo das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen gilt, wenn für $x = 0$: $y = \left\{\begin{matrix}+k\\ -k\end{matrix}\right.$.

(Man vergl. „Grunerts Archiv", XI, S. 395.) Weitere Hilfsmittel zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung gibt oft die Integration der höheren Differentialgleichungen, zu der wir jetzt übergehen, an die Hand. (Vergl. §. 120 und §. 123.)

Sechszehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§. 102.

Möglichkeit der Integration. Form der Integralgleichung.

I. Eine Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

heisst eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen x und y.

Eine jede solche Gleichung hat nothwendig eine Integralgleichung,

---

Aus (a) folgt durch Differenzirung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x + \sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\, y - m^2k^2xy^2}{y + \sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\, x - m^2k^2x^2y},$$

während

$$x - m^2k^2xy^2 + \sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\, y = \pm k\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)},$$
$$y - m^2k^2x^2y + \sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\, x = \pm k\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}.$$

Hier gelten beiderseits die obern Zeichen, wenn für $y=0$: $x=+k$ und für $x=0$: $y=+k$; die unteren im entgegengesetzten Falle. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\pm\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}{\pm\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}},$$

d. h.

1) wenn für $x=0$ auch $y=+k$, $y=0$ „ $x=+k$: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-m^2y^2)}{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$,

2) $x=0$ „ $y=-k$, $y=0$ „ $x=-k$: $\frac{\partial y}{\partial x} = -$ „

3) $x=0$ „ $y=+k$, $y=0$ „ $x=-k$: $\frac{\partial y}{\partial x} = +$ „

4) $x=0$ „ $y=-k$, $y=0$ „ $x=+k$: $\frac{\partial y}{\partial x} = +$ „

Man ersieht hieraus, wie das Doppelzeichen in (b) zu wählen ist.

d. h. es gibt eine Gleichung zwischen x und y, aus der die (a) entsteht. Diese Gleichung muss im allgemeinsten Falle n Konstanten enthalten, die in (a) nicht vorkommen.

Der Beweis dieser Behauptung kann wie in §. 90 geführt werden. Denkt man sich Δx unendlich klein und nimmt für den bestimmten Werth a von x die Grössen

$$y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \tag{b}$$

willkürlich an, so gibt die (a) den Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ für denselben Werth von x.

Setzt man jetzt $x = a + \Delta x$, bezeichnet die Werthe der Grössen (b) für $x = a$ durch Anhängen des Zeigers 0; die für $x = a + \Delta x$ durch den Zeiger 1; ebenso die Werthe derselben Grössen für $x = a + 2\Delta x$ durch die Zeiger 2, u. s. w., so erhält man leicht*

für $x = a$:

$$y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0; \quad \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 \text{ aus (a).}$$

für $x = a + \Delta x$:

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 \Delta x, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x, \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 \Delta x; \quad \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_1 \text{ aus (a).}$$

für $x = a + 2\Delta x$:

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 \Delta x, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_1 \Delta x, \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_2 = \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_1 + \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_1 \Delta x; \quad \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_2 \text{ aus (a).}$$

u. s. w., so dass man die Werthe von y nach einander für $x = a$, $a + \Delta x$, $a + 2\Delta x, \ldots$ bestimmen kann.

---

* Es ist wenn $\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_m$ den Werth von $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}$ für $x = a + m\,\Delta x$ bedeutet, $\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_{m+1}$ den für $x = a(m+1)\Delta x$: $\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_{m+1} = \left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_m + \Delta\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_m$, wo Δ die bekannte Bedeutung hat. Aber $\Delta \frac{\partial^r y}{\partial x^r} = \frac{\Delta\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)}{\Delta x}\Delta x$, und da Δx unendlich klein, also (nahezu) $\frac{\Delta \frac{\partial^r y}{\partial x^r}}{\Delta x} = \frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}}$ (§§. 11, 18), so dass $\left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_{m+1} = \left(\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right)_m + \left(\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}}\right)_m \Delta x$ gesetzt werden kann, wenn Δx unendlich klein ($= dx$, §. 11).

Man wird dabei beachten, dass die Annahme der Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ nothwendig war, obgleich in die Bildung der Grössen $y_1, y_2, \ldots$ nur die ersten Differentialquotienten eintraten. — Zur Berechnung von $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$ braucht man $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0$; zur Berechnung von $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$ aber $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_1$, d. h. also $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0$; ......; zur Berechnung von $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{n-1}$ braucht man $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0, \ldots\ldots, \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0$. Mehr als diese Grössen braucht man aber, wie die oben stehende Uebersicht zeigt, niemals.

Die Grössen $y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0$ sind willkürliche Konstanten, der Anzahl nach n, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

II. Wie in §. 90, III lässt sich unser Satz auch mittelst der Taylor'schen Formel erweisen.

Da nämlich

$$y = y_0 + \frac{x-a}{1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots n-1}\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \frac{(x-a)^n}{1\ldots n}\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 + \ldots, \qquad (c)$$

die Werthe von $\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0, \left(\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\right)_0, \ldots\ldots$ (für $x = a$) aber mittelst (a) leicht gefunden werden können, wenn man $y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \ldots\ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0$ einmal angenommen hat, so ist unsere Behauptung ebenfalls erwiesen.

III. Jede Gleichung zwischen x und y mit n willkürlichen Konstanten, welche der (a) genügt, muss — wenn y aus ihr nach dem Taylor'schen Satze entwickelt wird — mit der (c) zusammenfallen. — Wegen der n willkürlichen Konstanten können die n Werthe $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ für $x = a$ ganz willkürlich seyn, wie in (c), mit denselben also zusammenfallen; die Werthe von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}, \ldots\ldots$, aus der fraglichen Gleichung gezogen, müssen aber dann mit denen in (c) zusammen fallen, da sie ebenfalls der (a) genügen müssen, also auch aus (a) gezogen werden könnten, wie es mit denen in (c) der Fall ist (wodurch die Behauptung erwiesen ist).

Aus I und II ergibt sich unmittelbar, dass die Gleichung (a) eine einzige Integralgleichung mit n willkürlichen Konstanten habe. (Vergl. §. 132, VI.) Man wird dieselbe ermittelt haben, wenn man eine Gleichung zwischen x und y mit n nicht in (a) vorkommenden Konstanten findet so beschaffen, dass $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, aus ihr gezogen, die (a) identisch erfüllen. — Dass man die Integralgleichung unter verschiedenen Formen wird auftreten sehen, ist begreiflich (§. 90, IV); alle diese Formen lassen sich aber aus einander ableiten.

Bildung der Differentialgleichung aus der Integralgleichung.

IV. Differenzirt man eine Gleichung zwischen x und y, in der n unbestimmte Konstanten vorkommen, n mal nach einander, so erhält man mit ihr $n+1$ Gleichungen, die, ausser den Konstanten und der unabhängig Veränderlichen x, die abhängigen Grössen y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ enthalten. Zwischen diesen $n+1$ Gleichungen kann man nun die n Konstanten eliminiren und erhält eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

War die angenommene Gleichung die Integralgleichung einer gegebenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, so wird die daraus erhaltene Gleichung die gegebene Differentialgleichung seyn müssen.

Wie man aber auch eliminiren mag, immer wird dieselbe Differentialgleichung erscheinen. Man kann also etwa aus der Integralgleichung und der durch einmalige Differenzirung daraus erhaltenen Gleichung durch Elimination je einer Konstanten n Differentialgleichungen erster Ordnung bilden. Differenzirt man jede derselben wieder und eliminirt je eine Konstante weiter, so erhält man Gleichungen zweiter Ordnung mit je zwei Konstanten weniger als die anfängliche Gleichung u. s. w. Fährt man etwa so fort, so gelangt man endgiltig zur einen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

V. Will man die hier aufgestellte Behauptung förmlich erweisen, so kann man etwa in folgender Weise verfahren: Eine Gleichung zwischen x und y bestimmt immer eine Funktion y von x, die geometrisch in einer Kurve dargestellt wird. Die Differentialquotienten von y sind eben so bestimmt durch diese Funktion, so dass für jeden Werth von x dieselben bestimmte, einzige Werthe haben. Es erhellt diess auch unmittelbar aus §. 56, I, wornach aus n Werthen der Funktion y der Differentialquotient $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ sich bildet. Aus einer Gleichung zwischen x und y kann also auch nur ein einziger Werth je von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ folgen.

Gesetzt nun, eine Gleichung zwischen x und y enthalte m Konstanten, wo $m > r$ (m und r positive, ganze Zahlen), und man bilde aus derselben eine Gleichung, die r Konstanten weniger habe, was nur dadurch geschehen kann, dass man bis zum r^{ten} Differentialquotienten aufsteigt, also eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung erhält; man bilde weiter auf einem von dem eben eingeschlagenen verschiedenen Wege aus derselben anfänglichen Gleichung eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, welche dieselben r Konstanten weniger habe, so muss diese Gleichung mit der vorhin erhaltenen identisch seyn, oder doch sich unmittelbar aus ihr ergeben

Denn sei

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right) \tag{d}$$

die erste, und

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right) \tag{d'}$$

die zweite, so muss, weil $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}$ nur einen Werth haben kann, für jeden Werth von x seyn:

$$f\left(x, y, \ldots, \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right) = F\left(x, y, \ldots, \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right). \tag{e}$$

Seyen nun für $x = a$ die Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}$ durch $y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \ldots\ldots,$ $\left(\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right)_0$ bezeichnet, so kann man diese Grössen als rein willkürlich ansehen. Denn man kann die r eliminirten Konstanten, die willkürlich blieben, immer so bestimmt denken, dass jene Grössen beliebige Werthe annehmen. Da aber jene Konstanten in (d) und (d') nicht mehr vorkommen, so haben ihre Werthe keinerlei Einfluss auf diese Gleichungen. Da die (e) für alle Werthe von x richtig ist, so ist also auch

$$f\left[a, y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right)_0\right] = F\left[a, y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\right)_0\right], \quad (e')$$

welche Gleichung ausser den bezeichneten Grössen nur noch die nicht eliminirten Konstanten enthält. Da a selbst auch als willkürlich anzusehen ist, da (e) für alle Werthe von x richtig seyn soll, so enthalten die beiden Funktionen f und F in (e') nur rein willkürliche Grössen. Die Werthe dieser Funktionen können also nur dann völlig gleich seyn, was auch die Werthe jener willkürlichen Grössen seyn mögen, wenn beide Funktionen diese Grössen in derselben Weise enthalten, d. h. identisch sind.

Da in (e') bloss $a, y_0, \ldots.$ an die Stelle von $x, y, \ldots.$ in (e) getreten sind, so werden also auch die beiden Funktionen f und F in (e) identisch seyn, d. h. die Gleichungen (d) und (d') fallen zusammen.

VI. Dass man nicht im Stande ist, von jeder gegebenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung die Integralgleichung thatsächlich herzustellen, wird nach dem, was wir im vorhergehenden Abschnitte gesehen, begreiflich seyn. Wir werden desshalb auch hier zu besondern Methoden unsere Zuflucht nehmen müssen.

Wir wollen dabei bemerken, dass wir zuweilen, der Bequemlichkeit wegen, die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ auch durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bezeichnen werden.

§. 103.

Die Gleichungen: $y_n = f(x)$, $y_2 = f(y)$, $y_4 = f(y_1)$, $y_{n+1} = f(y_n)$, $y_{n+2} = f(y_n)$, $y_2 = f(x, y_1)$, $y_2 = f(y, y_1)$, $y_{n+1} = f(x, y_n)$, $y_{n+2} = f(y_n, y_{n+1})$.

I. Sey

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f(x)$$

die vorgelegte Gleichung*, so folgt aus derselben durch unmittelbare Integration:

---

* Da (§. 56, II) $Gr \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, so kann man also sagen, dass für ein unendlich kleines Δx: $\Delta^n y = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} (\Delta x)^n$, oder wenn man diesen Werth von $\Delta^n y$ mit $d^n y$ bezeichnet, dass dann $d^n y = \Delta^n y$. Desshalb schreibt man die vorgelegte Gleichung auch oft: $d^n y = f(x) (d x)^n$. — Die Grösse $d^n y$ ist ein unendlich Kleines der n^{ten} Ordnung, gegenüber dx (§. 75, I), so dass $d^2 y$ neben dy, $d^3 y$ neben $d^2 y$ zu verwerfen wäre.

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = \int f(x)\,\partial x + C_1,\ \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = \iint f(x)\,\partial x^2 + C_1 x + C_2, \ldots,\ y = \iint\ldots\int f(x)\,\partial x^n + \frac{C_1 x^{n-1}}{1.2..n-1} + \frac{C_2 x^{n-2}}{1.2..n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

wo $C_1, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten sind. Offenbar kann man auch schreiben:

$$y = \iint\ldots\int f(x)\,\partial x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_{n-1} x + C_n \quad (\S.\ 38).$$

II. Sey

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(y),$$

so setzt man, wenn $\frac{\partial y}{\partial x} = u$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\ (\S.\ 13) = \frac{\partial u}{\partial y} u;$$

also ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} u = f(y),\ \frac{u^2}{2} = \int f(y)\,\partial y + \frac{C}{2},\ u^2 = 2\int f(y)\,\partial y + C,$$

d. h.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\int f(y)\,\partial y + C,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,\partial y + C},\ \int \frac{\partial y}{\pm\sqrt{2\int f(y)\,\partial y + C}} = x + C',$$

so dass also die Integralgleichung ist:

$$x + C' = \pm\int \frac{\partial y}{\sqrt{2\int f(y)\,\partial y + C}},$$

wo beide Zeichen gelten.

III. $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \text{ gibt } u\frac{\partial u}{\partial y} = f(u),\ y = \int \frac{u\,\partial u}{f(u)} + C,$$

und da auch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = f(u),\ \int \frac{\partial u}{f(u)} = x + C',$$

so wird man also u eliminiren zwischen $y = \int \frac{u\,\partial u}{f(u)} + C$ und $x = \int \frac{\partial u}{f(u)} + C'$.

IV. $$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

gibt, wenn man $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u$ setzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u),\ \int \frac{\partial u}{f(u)} = x + C.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = \int \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\,\partial x = \int u\,\partial x = \int u\frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u\ (\S.\ 27) = \int \frac{u}{f(u)}\,\partial u + C_1\ (\S.\ 21),$$

$$\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}=\int\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\partial x=\int\left[\int\frac{u}{f(u)}\partial u+C_1\right]\frac{\partial x}{\partial u}\partial u=\int\left[\int\frac{u}{f(u)}\partial u+C_1\right]\frac{\partial u}{f(u)}+C_2.$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x=\int\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u=\int\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial u}{f(u)}+C_{n-1},$$

$$y=\int\frac{\partial y}{\partial x}\partial x=\int\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{f(u)}+C_n,$$

und wenn man dann u zwischen den Werthen von x und y eliminirt, so erhält man die Integralgleichung.

V.
$$\frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}}=f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

gibt für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=u$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(u),\ x=\pm\int\frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u)\partial u+C}}+C_1\ \text{(II)},\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\pm\frac{1}{\sqrt{2\int f(u)\partial u+C}}.$$

Dann

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}=\int\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\partial x=\int\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u=\pm\int\frac{u\,\partial u}{\sqrt{2\int f(u)\partial u+C}}+C_2,$$

$$\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}=\pm\int\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u)\partial u+C}}+C_3,\ldots,\quad y=\pm\int\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u)\partial u+C}}+C_{n+1}.$$

VI. Hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f\left(x,\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

so setze man $\frac{\partial y}{\partial x}=u$, und die Gleichung ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,u).$$

Kann man diese nach den Lehren des vorigen Abschnitts integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen x, u und der Konstante C. Folgt daraus $u=\varphi(x,C)$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(x,C),\ y=\int\varphi(x,C)\partial x+C'.$$

Folgt dagegen $x=\psi(u,C)$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial\psi(u,C)}{\partial u}},$$

d. h.

$$u=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial\psi(u,C)}{\partial u}},\quad y=\int u\frac{\partial\psi(u,C)}{\partial u}\partial u+C'$$

und man wird u eliminiren zwischen den Werthen von x und y.

VII. $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

gibt für $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} u$:

$$u\frac{\partial u}{\partial y} = f(y, u);$$

kann man diese Gleichung integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen y, u und C, aus der folge $u = \varphi(y, C)$, dann ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y, C), \int \frac{\partial y}{\varphi(y, C)} = x + C'.$$

Folgt aber $y = \psi(u, C)$, so ist zugleich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial \psi(u, C)}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \psi(u, C)}{\partial u}, \quad x = \int \frac{\partial \psi(u, C)}{\partial u} \frac{\partial u}{u} + C'.$$

VIII. $$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = f\left(x, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right),$$

gibt für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u); \quad F(x, u, C) = 0;$$

folgt hieraus $u = \varphi(x, C)$, so ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \varphi(x, C),$$

woraus y nach I. Zieht man dagegen daraus $x = \psi(u, C)$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \psi(u, C)}{\partial u}$, so erhält man y wie in IV. Aehnlich ist, wenn

$$\frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} = f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\right)$$

für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u$: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

welche Gleichung wie VII zu behandeln ist. Hat man dann $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(u, C)$, so ist $x = \int \frac{\partial u}{\varphi(u, C)} + C'$ und y folgt wie in IV.

§. 104.

Beispiele zu §. 103.

1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 y$ gibt nach II:

$$x + C' = \pm \int \frac{\partial y}{\sqrt{2a^2 \int y \partial y + C}} = \pm \int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 y^2 + C}} = \pm \frac{1}{a} l(ay + \sqrt{a^2 y^2 + C}).$$

Hieraus folgt

$$l(ay+\sqrt{a^2y^2+C})=\pm(ax+aC'),\ ay+\sqrt{a^2y^2+C}=C_1 e^{\pm ax},\ \sqrt{a^2y^2+C}=C_1 e^{\pm ax}-ay,$$

$$a^2y^2+C=C_1^2 e^{\pm 2ax}-2ayC_1 e^{\pm ax}+a^2y^2,\ 2ayC_1 e^{\pm ax}=C_1^2 e^{\pm 2ax}-C,$$

$$y=\frac{C_1}{2a}e^{\pm ax}-\frac{C}{2aC_1}e^{\mp ax},\ \text{d. h. } y=Ae^{ax}+Be^{-ax},$$

wenn A und B die willkürlichen Konstanten.

Fig. 56. A, B″, B, M, B′

2) An einem elastischen Stab oder Seile AB (Fig 56) werde ein Gewicht p angehängt, und es sey B die Ruhelage desselben; man bringe nun das Gewicht gewaltsam in die Lage B′, wodurch der Stab ausgedehnt wird und überlasse es dann, ohne ihm eine weitere Bewegung mitzutheilen, sich selbst. Es soll seine Bewegung untersucht werden.

Sey am Ende der Zeit t das Gewicht in M, in einer Entfernung x von der Ruhelage B, wo wir x positiv von B gegen B′ hin, negativ von B gegen B″ rechnen; in diesem Punkte wird der bewegte Körper nur von der elastischen Kraft des Stabes getrieben werden, da das eigene Gewicht aufgehoben wird durch den tragenden (bereits schon ausgedehnten) Stab; diese elastische Kraft ist proportional dem Abstande x und wirkt nach der Richtung B′B. Demnach (§. 20, VIII) hat man

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-a^2x,\ (p\,d^2x=-a^2gx\,dt^2),$$

wenn a^2 die elastische Kraft des Stabes in dem Abstande 1 bezeichnet. Hieraus folgt nach II:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\alpha^2 x,\ \alpha^2=\frac{a^2g}{p};\ t+C'=\pm\int\frac{\partial x}{\sqrt{-2\alpha^2\int x\,\partial x+C}}=\pm\int\frac{\partial x}{\sqrt{C-\alpha^2x^2}}=$$

$$\pm\frac{1}{\alpha}\,arc\left(sin=\frac{\alpha x}{\sqrt{C}}\right),$$

$$arc\left(sin=\frac{\alpha x}{\sqrt{C}}\right)=\pm(\alpha t+\alpha C'),\ \frac{\alpha x}{\sqrt{C}}=\pm sin(\alpha t+\alpha C')=\pm cos\,\alpha C'\,sin\,\alpha t\pm sin\,\alpha C'\,cos\,\alpha t.$$

Setzt man also $\pm\frac{\sqrt{C}}{\alpha}cos\,\alpha C'=A,\ \pm\frac{\sqrt{C}}{\alpha}sin\,\alpha C'=B$, so ist

$$x=A\,sin\,\alpha t+B\,cos\,\alpha t=A\,sin\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)+B\,cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

Um nun A und B zu bestimmen, sey $BB'=c$, so ist $x=c$ für $t=0$; da ferner die Geschwindigkeit im Anfange der Zeit ebenfalls Null ist, so ist auch (§. 20, VII) $\frac{\partial x}{\partial t}=0$ für $t=0$. Demnach da $\frac{\partial x}{\partial t}=Aa\sqrt{\frac{g}{p}}\,cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)-Ba\sqrt{\frac{g}{p}}\times sin\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)$:

$$c=B,\ 0=Aa\sqrt{\frac{g}{p}};\ B=c,\ A=0,$$

$$x=c\,cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

Diese Gleichung bestimmt die eintretende Bewegung vollständig. Da $\cos\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right)$ zwischen $+1$ und -1 liegt, so folgt hieraus: Die Entfernung x wird nie grösser als c, d. h. der Körper geht nie weiter als nach B'; er kommt dort an zu den Zeiten $t=0, \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{4\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \ldots$ [d. h. wenn $\cos\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right)=1$]; x wird nie kleiner als $-c$, d. h. der Körper steigt nicht über B'', wenn $BB''=BB'$; er kommt in B'' an zu den Zeiten $\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{3\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \ldots$ [d. h. wenn $\cos\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right) = -1$]. Die Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}\left[=-\mathrm{a\,c}\sqrt{\frac{g}{p}}\sin\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right)\right]$ ist am grössten, wenn $\cos\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right)=0$, d. h. wenn $x=0$, oder wenn der Körper durch B geht, sie ist Null, wenn der Körper in B' oder B'' ist [da dann $\sin\left(\mathrm{a\,t}\sqrt{\frac{g}{p}}\right) = 0$ ist]. Man sieht daraus, dass die Bewegung eine regelmässig schwingende ist, und dass die Dauer einer ganzen Schwingung $=\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}$ ist.

Gesetzt, jedes Mal wenn der Körper in B' wieder angelangt, gebe man ihm einen kleinen Stoss, der ihm eine Geschwindigkeit m ertheile gerichtet gegen B, so wollen wir nun annehmen, in einem bestimmten Zeitmomente befinde sich der Körper eben in B' und wollen von da an die Zeit t rechnen. Alsdann ist wie oben

$$x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t,$$

und für $t=0: x=c$, $\frac{\partial x}{\partial t}=-m$, also

$$c=B,\ -m=A\alpha;\ B=c,\ A=-\frac{m}{\alpha},$$

und

$$x=-\frac{m}{\alpha}\sin\alpha t+c\cos\alpha t.$$

x wird auch jetzt nach der Zeit $\frac{2\pi}{\alpha}$ jeweils wieder denselben Werth erlangen, die Schwingungsdauer also dieselbe bleiben. Dagegen $\frac{\partial x}{\partial t}$ wird 0 seyn, wenn

$$-m\cos\alpha t-\alpha c\sin\alpha t=0,\ tg\,\alpha t=\frac{-m}{\alpha c},$$

woraus für αt zunächst ein Werth zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, etwa $=\gamma$ folgt; aber eben so auch $\gamma+\pi$, $\gamma+2\pi, \ldots,$ so dass also die Werthe der Zeit t, für welche x ein Maximum oder Minimum ist, sind:

$$\frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{(\gamma+\pi)}{\alpha},\ \frac{(\gamma+2\pi)}{\alpha},\ldots,$$

und zwar geben der erste, dritte, ... Minima, die andern Maxima; für die ersteren wird

$$x=-\frac{\frac{m}{\alpha}\frac{m}{\alpha c}+c}{\sqrt{1+\frac{m^2}{\alpha^2 c^2}}}=-\sqrt{c^2+\frac{m^2}{\alpha^2}},$$

für die andern $x = \pm \sqrt{c^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}$. Da diess $> c$, so wird also die Ausdehnung der Schwingung grösser seyn als früher. Wenn also jedes Mal, wenn der Körper in seinem tiefsten (höchsten) Punkte angelangt ist, demselben ein wenn auch noch so kleiner Stoss ertheilt wird, so werden seine Schwingungen nothwendig immer weiter werden, so dass am Ende der Stab, wenn er diese grossen Ausdehnungen nicht ertragen kann, zerreissen muss. *

3) Man soll diejenige Kurve bestimmen, in der der Krümmungshalbmesser in allen Punkten derselbe ($= a$) ist. Man hat also (§. 56, III)

$$\pm \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = a, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \frac{1}{a}\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

folglich nach §. 103, III:

$$y = \pm \int \frac{a u \, \partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} + C, \quad x = \pm a \int \frac{\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} + C',$$

$$y = \mp \frac{a}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} + C, \quad x = \pm \frac{a u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} + C',$$

woraus

$$(y - C)^2 + (x - C')^2 = a^2,$$

d. h. die Kurve ist ein Kreis vom Halbmesser a. Sein Mittelpunkt ist beliebig wo.

4) Man soll

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)^2 = a^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = a\sqrt{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}, \quad [d^4 y = a\, dx^2 \sqrt{d^3 y\, dx},]$$

integriren. Nach IV, wo jetzt $n = 3$, $f(u) = a\sqrt{u}$:

$$x + C = \int \frac{\partial u}{a\sqrt{u}} = \frac{2}{a}\sqrt{u}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int u \frac{\partial x}{\partial u} \partial u = \int \frac{\sqrt{u}}{a} \partial u = \frac{2}{3a} u^{\frac{3}{2}} + C_1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} \partial u = \frac{2}{3a} \int \frac{u^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{u}} \partial u + C_1 \int \frac{\partial u}{a\sqrt{u}} = \frac{1}{3a^2} u^2 + \frac{2C_1}{a}\sqrt{u} + C_2;$$

$$y = \frac{1}{3a^2} \int \frac{u^2}{a\sqrt{u}} \partial u + \frac{2C_1}{a} \int \frac{\sqrt{u}}{a\sqrt{u}} \partial u + C_2 \int \frac{\partial u}{a\sqrt{u}} = \frac{2}{15a^3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2C_1}{a^2} u + \frac{2C_2}{a} u^{\frac{1}{2}} + C_3.$$

Aber

$$\sqrt{u} = \frac{ax}{2} + C, \quad y = \frac{2}{15a^3} u^{\frac{5}{2}} + C_1 u + C_2 u^{\frac{1}{2}} + C_3,$$

d. h.

$$y = \frac{2}{15a^3}\left(\frac{ax}{2} + C\right)^5 + C_1\left(\frac{ax}{2} + C\right)^2 + C_2\left(\frac{ax}{2} + C\right) + C_3,$$

oder was dasselbe ist

---

* Hierauf beruht die Erklärung der Beobachtung Savarts, dass wenn man den benetzten Finger in regelmässigen Zwischenzeiten an einem elastischen Stabe hin- und herführt, derselbe in Schwingungen von messbarer Weite versetzt werden kann. Dessgleichen erklärt sich hieraus das Zerreissen von Kettenbrücken unter dem regelmässigen Tritt der Soldaten u. s. w.

$$y = \frac{a^2 x^5}{240} + \frac{C a x^4}{24} + \frac{C^2 x^3}{6} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

5) $$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3 = -a; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{a}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3}$$

gibt nach V, wo $n = 2$, $f(u) = -\frac{a}{u^3}$, $\left(u = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$:

$$x = \pm\int\frac{\partial u}{\sqrt{C - 2a\int\frac{\partial u}{u^3}}} + C_1 = \pm\int\frac{\partial u}{\sqrt{C + \frac{a}{u^2}}} + C_1 = \pm\int\frac{u\,\partial u}{\sqrt{C u^2 + a}} + C_1 =$$

$$\pm\frac{1}{C}\sqrt{C u^2 + a} + C_1.$$

Hieraus folgt

$$(C x - C_1)^2 = C u^2 + a, \quad u^2 = \frac{(C x - C_1)^2 - a}{C},$$

so dass also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm\sqrt{\frac{(C x - C_1)^2 - a}{C}}, \quad y = \pm\iint\sqrt{\frac{(C x - C_1)^2 - a}{C}}\,\partial x^2 + C_2 x + C_3.$$

6) Man soll diejenige ebene Kurve finden, in welcher die von einem bestimmten Punkte anfangenden Bögen mit den Stücken der Ordinatenaxe, welche durch die Tangenten in den Endpunkten dieser Bögen abgeschnitten werden, in einem konstanten Verhältnisse stehen.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der gesuchten Kurve ist:

$$v - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\xi - x);$$

sie trifft die Ordinatenaxe in einem Punkte, dessen Ordinate $= y - x\frac{\partial y}{\partial x}$ ist. Sey also x_1 die Abszisse des Anfangspunktes eines Bogens, x die des Endpunktes; y_1, y die zugehörigen Ordinaten, so ist die Bogenlänge $= \pm\int_{x_1}^{x}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$, während das Stück der Ordinatenaxe zwischen den beiden Tangenten $= y - x\frac{\partial y}{\partial x} - \left[y_1 - x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right]$ ist, wo $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = x_1$ bezeichnet, so dass also

$$\pm\int_{x_1}^{x}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = a\left[y - x\frac{\partial y}{\partial x} - \left(y_1 - x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\right]. \qquad \text{(a)}$$

Da nun x_1, y_1 konstant sind, so folgt hieraus, wenn man nach x differenzirt (§. 85):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \mp a x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{n}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}, \quad n = \pm\frac{1}{a},$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Nach IV ist (für $\frac{\partial y}{\partial x} = u$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{n}{x}\sqrt{1+u^2}, \text{ also } \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} = -n\int\frac{\partial x}{x} + C \text{ (§. 91)},$$

$$l(u+\sqrt{1+u^2}) = -n\,l(x) + C,\; u+\sqrt{1+u^2} = C x^{-n},\; \sqrt{1+u^2} = C x^{-n} - u,$$

woraus

$$1+u^2 = C^2 x^{-2n} - 2 C u x^{-n} + u^2,\; u = \frac{C}{2}x^{-n} - \frac{1}{2C}x^n;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{C}{2}x^{-n} - \frac{1}{2C}x^n,\; y = -\frac{C}{2(n-1)}x^{1-n} - \frac{1}{2C(n+1)}x^{n+1} + C'.$$

Dabei gilt in $n = \pm\frac{1}{a}$ das obere Zeichen, wenn der Bogen wächst mit wachsendem x (§. 47).

Dieselbe Aufgabe kann auch etwas anders eingekleidet werden. Denken wir uns nämlich, es bewege sich ein Gegenstand in der Ordinatenaxe gleichförmig, während ein anderer sich mit ebenfalls gleichförmiger Geschwindigkeit gegen ihn bewegt, so beschreibt letzterer die fragliche Kurve, und wenn man in einem Punkte dieser Kurve die Tangente zieht, so trifft sie die Ordinatenaxe in dem Punkte, in dem der erste Gegenstand (Herr) sich befindet, während der zweite (Hund) in dem fraglichen Kurvenpunkt ist. Die Grösse a ist = der Geschwindigkeit des Hundes dividirt durch die des Herrn. Ist im Anfange der Zeit der Herr im Anfangspunkt der Koordinaten, der Hund im Punkte x_1, y_1, so muss für $x = x_1$ auch $y = y_1$ seyn, was eine Gleichung zur Bestimmung der zwei Konstanten liefert; da $n < 1$ seyn wird, so ist für $x = 0$, $y = C'$, also ist C' der ganze Weg, den der Herr zurücklegt, bis der Hund ihn einholt, so dass (da der Bogen wächst mit abnehmendem x), also $n = -\frac{1}{a}$:

$$-\int_{x_1}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = a C' = -\frac{1}{n}C'$$

seyn muss, was auf

$$\frac{C x_1^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{1}{2(1+n)C}x_1^{1+n} + \frac{C'}{n} = 0$$

führt, welches die zweite Gleichung ist zwischen den Konstanten C und C'. Uebrigens muss auch die Tangente an die Kurve im Punkte x_1, y_1 durch den Anfangspunkt gehen, d. h. es muss $y_1 - x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0$ seyn, und da $y_1 = +\frac{C}{2(1-n)}x_1^{1-n} - \frac{1}{2(n+1)C}x_1^{1+n} + C'$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{C}{2}x_1^{-n} - \frac{1}{2C}x_1^{-n}$, so erhält man dieselbe Gleichung wieder.

7) Man soll die Kurve finden, bei der der Krümmungshalbmesser im Punkte (x, y) gleich ist $n$mal der Länge des Stücks der Normale zwischen diesem Punkte und der Abszissenaxe.

Man hat also

$$\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = n y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{n y}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right],$$

so dass nach VII:

$$u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{n y}(1+u^2),\; \int\frac{u\,\partial u}{1+u^2} = \int\frac{\partial y}{n y} + C,\; \frac{1}{2}l(1+u^2) = \frac{1}{n}l(y) + C,$$

$$\sqrt{1+u^2}=Cy^{\frac{1}{n}},\ 1+u^2=Cy^{\frac{2}{n}},\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=Cy^{\frac{2}{n}}-1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{Cy^{\frac{2}{n}}-1},\ \pm\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy^{\frac{2}{n}}-1}}=x+C',$$

in welcher Gleichung nun n gegeben seyn muss, ehe man integriren kann. Dabei kann übrigens n positiv oder negativ seyn, da die erste Seite der gewählten Gleichung den positiven oder negativen Werth des Krümmungshalbmessers ausdrücken kann.

Sey z. B. $n=-2$, so ist

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy^{-1}-1}}=\int\frac{\sqrt{y}\,\partial y}{\sqrt{C-y}}=\int\frac{y\,\partial y}{\sqrt{Cy-y^2}}=-\sqrt{Cy-y^2}+\frac{C}{2}\,arc\left(sin=\frac{2y-C}{C}\right),$$

also

$$\pm(x+C')=\frac{C}{2}\,arc\left(sin=\frac{2y-C}{C}\right)-\sqrt{Cy-y^2},$$

was eine Cycloide ausdrückt. Für $n=2$ ist

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy-1}}=\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1},\ x+C'=\pm\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1},$$

eine Parabel.

8) Ein Körper bewegt sich geradlinig unter dem Einfluss der Schwerkraft (fällt vertikal herab) in einem Medium (Atmosphäre), das einen Widerstand leistet, der proportional ist dem Quadrate der Geschwindigkeit. Man soll seine Bewegung bestimmen.

Am Ende der Zeit t sey er in dem Abstande x von seinem Ausgangspunkte, so ist seine bewegende Kraft (§. 20, VIII) $=\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$; dieselbe ist aber auch $=p-pm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$, wenn m^2 ein gewisser Koeffizient ist, so dass pm^2 den Luftwiderstand für die Geschwindigkeit 1 ausdrückt (§. 20, VII), also ist

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=p-pm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=g-gm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2;$$

$\frac{\partial x}{\partial t}=u$ gesetzt gibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g(1-m^2u^2),\ g\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{1}{1-m^2u^2}\ (\S.\ 21),\ gt=\int\frac{\partial u}{1-m^2u^2}+C=$$

$$\frac{1}{2m}\,l\left(\frac{1+mu}{1-mu}\right)+C,\ 2mgt+C=l\left(\frac{1+mu}{1-mu}\right),$$

$$\frac{1+mu}{1-mu}=Ce^{2mgt},\ mu=\frac{Ce^{2mgt}-1}{Ce^{2mgt}+1}.$$

Ist für $t=0$ auch die Geschwindigkeit 0, so ist dann $u=0$, also $C=1$ und

$$mu=\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1},\ m\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1},\ mx=\int\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1}\partial t+C'$$

$$= \int \frac{e^{mgt} - e^{-mgt}}{e^{mgt} + e^{-mgt}} \partial t + C' = \frac{1}{mg} l(e^{mgt} + e^{-mgt}) + C',$$

und da $x = 0$ für $t = 0$, so ist $0 = \frac{1}{mg} l(2) + C'$, $C' = -\frac{1}{mg} l(2)$, also endlich

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{e^{mgt} - e^{-mgt}}{e^{mgt} + e^{-mgt}}, \quad x = \frac{1}{m^2 g} l\left(\frac{e^{mgt} + e^{-mgt}}{2}\right),$$

welche zwei Gleichungen für jede Zeit t die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg angeben. Wir haben dabei jeweils die willkürlichen Konstanten sogleich bestimmt, wie diess der Aufgabe angemessen war, wobei wir also annahmen, dass der Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit frei herabfalle.

9) Eine ebene Wand besteht aus mehreren parallelen Schichten, von denen jede für sich gleichartig ist. Sie wird von Wärme durchströmt und es ist bereits der Beharrungszustand derart eingetreten, dass die Temperatur in jedem Punkte immer dieselbe bleibt und in allen Punkten, die gleich weit von der äusseren Seite entfernt sind, ebenfalls dieselbe ist. Ferner sey die Wand auf der Seite, auf der die Wärme einströmt, von einem Raume umgeben, der beständig die Temperatur t_0 hat; auf der anderen Seite von einem eben solchen von der Temperatur t_1. Man soll den Zustand der Temperatur im Innern untersuchen.

Es bestehe die Wand aus n Schichten, deren Dicken $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ seyen; man nehme die Axe der x senkrecht auf die Wand und die Seite, auf der die Wärme einströmt, zur Ebene der yz; sey λ_0 der Koeffizient für das Einströmen der Wärme (in die erste Schichte), λ_n der für das Ausströmen (aus der n[ten]); k_1; $k_2, \ldots k_n$ die Koeffizienten für die Leitungsfähigkeit im Innern; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ die für den Uebergang der Wärme von der 1[ten] zur 2[ten], ..., von der n—1[ten] zur n[ten] Schichte, so ist jetzt die in §. 75, VIII mit v bezeichneto Temperatur von t, und eben so von y und z unabhängig, so dass für jede Schichte ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \text{ mithin } v = ax + b. \; *$$

Sind also $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Temperaturen in der 1[ten], ..., n[ten] Schichte, so ist

$$v_1 = a_1 x + b_1, \; v_2 = a_2 x + b_2, \ldots, v_n = a_n x + b_n,$$

wo $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ noch zu bestimmende Konstanten sind. In der ersten Gleichung geht x von 0 bis δ_1, in der zweiten von δ_1 bis $\delta_1 + \delta_2, \ldots$, in der n[ten] von $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_{n-1}$ bis $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n$. Demnach hat man jeweils für den Anfang und das Ende einer jeden Schichte folgende Temperaturen: 1[te] Schichte: b_1 und $a_1 \delta_1 + b_1$; 2[te] Schichte: $a_2 \delta_1 + b_2$ und $a_2(\delta_1 + \delta_2) + b_2$; ....; n[te] Schichte: $a_n(\delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) + b_n$ und $a_n(\delta_1 + \ldots + \delta_n) + b_n$; da ferner $\frac{\partial v}{\partial x} = a$, so hat man also nach §. 75, XII und XI:

$$a_1 k_1 = a_2 k_2 = \ldots, = a_n k_n; \; -a_1 k_1 = \lambda_1 [a_1 \delta_1 + b_1 - a_2 \delta_1 - b_2], \; -a_2 k_2 = \lambda_2 [a_2(\delta_1 + \delta_2) + b_2 - a_3(\delta_1 + \delta_2) - b_3], \ldots, -a_{n-1} k_{n-1} = \lambda_{n-1} [a_{n-1}(\delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) + b_{n-1} - a_n(\delta_1 + \ldots \delta_{n-1}) - b_n]; \; -k_1 a_1 = \lambda_0 (t_0 - b_1), \; -k_n a_n = \lambda_n [a_n(\delta_1 + \ldots + \delta_n) + b_n - t_1].$$

* Es ist selbstverständlich, dass man diese Gleichung auch unmittelbar ableiten kann, indem man sich auf die in §. 75 gemachten Annahmen stützt. Wir überlassen diess dem Leser, indem wir auf die Note zu Nr. 10 verweisen, wo wir diese unmittelbare Ableitung geben werden.

Daraus folgt:

$$a_1 k_1 = \frac{t_1 - t_0}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}},$$

$$b_1 = \frac{\frac{t_1}{\lambda_0} + t_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}\right)}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}};$$

$$a_r = \frac{k_1 a_1}{k_r}; \quad b_r = b_1 + a_1 k_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{r-1}} + \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \ldots + \frac{\delta_{r-1}}{k_{r-1}} - \frac{\delta_1 + \ldots + \delta_{r-1}}{k_r}\right].$$

Die Wärmemenge, welche (überall) durch die Einheit der Fläche in der Zeiteinheit strömt, ist gleich $-k_n a_n = -k_1 a_1$, d. h. gleich

$$\frac{t_0 - t_1}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}},$$

und wenn man diese kennt, so lässt sich t_1 aus t_0 bestimmen.

10) Wir wollen uns dieselbe Aufgabe wie in Nr. 9 vorlegen, nur seyen die Schichten konzentrische Kugelschichten. Die Grössen λ, k, t sollen dieselbe Bedeutung haben wie so eben; es seyen die inneren Halbmesser der ersten, zweiten, ..., n^{ten} Schichte gleich $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ und r_n der äussere Halbmesser der n^{ten} Schichte.

Darf man die obigen Voraussetzungen nebst denen in §. 75, IX machen, so ist

$$\frac{d^2(rv)}{dr^2} = 0, \quad rv = ar + b, \quad v = a + \frac{b}{r}, *$$

d. h. wenn $v_1, \ldots, v_n$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 9 haben:

---

* Die Voraussetzung ist hier, dass für alle Punkte die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, die Temperatur (immer) dieselbe sey, so dass also v bloss von r abhängt. Will man die Formel unmittelbar ableiten, so verfährt man so:

Man denke sich das bereits in §. 83, III näher bezeichnete Körperelement, das als ein Parallelepiped betrachtet werde. Die auf r senkrechte (innere) Fläche ist $r^2 \cos\psi \, \Delta\psi \, \Delta\varphi$; die Entfernung der entgegen stehenden Fläche: Δr; die Temperatur an der ersten Fläche ist v, an letzterer $v + \Delta v$. Demnach strömt in der Zeiteinheit durch die innere Fläche die Wärmemenge $-k r^2 \cos\psi \, \Delta\psi \, \Delta\varphi \frac{\Delta v}{\Delta r}$, durch die entgegengesetzte: $-k r^2 \cos\psi \, \Delta\psi \, \Delta\varphi \frac{\Delta v}{\Delta r} - k \cos\psi \, \Delta\varphi \, \Delta\psi \, \Delta\left(r^2 \frac{\Delta v}{\Delta r}\right)$, so dass im Element übrig bleibt: $+ k \cos\psi \, \Delta\psi \, \Delta\varphi \, \Delta\left(r^2 \frac{\Delta v}{\Delta r}\right)$. Da nun die Temperatur nicht geändert wird, so muss diese übrig bleibende Wärme = Null seyn, d. h.

$$\Delta\left(r^2 \frac{\Delta v}{\Delta r}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\left(r^2 \frac{\Delta v}{\Delta r}\right)}{\Delta r} = 0,$$

d. h. weil alle Grössen unendlich klein seyn müssen:

$$v_1 = a_1 + \frac{b_1}{r},\ v_2 = a_2 + \frac{b_2}{r},\ \ldots\ldots,\ v_n = a_n + \frac{b_n}{r}.$$

Da hier $\frac{\partial v}{\partial r}$ (§. 75, XI, XII) $= -\frac{b}{r^2}$, so hat man zur Bestimmung der $2n$ Konstanten $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, die folgenden Gleichungen:

a) wenn die Wärme von Innen nach Aussen geht, also t_0 die Temperatur auf der hohlen Seite der ersten Schichte, t_1 auf der erhabenen der letzten, λ_0 der Einstrahlungskoeffizient bei der ersten, λ_n der Ausstrahlungskoeffizient bei der letzten ist:

$$\frac{k_1 b_1}{r_0^2} = \lambda_0 \left(t_0 - a_1 - \frac{b_1}{r_0}\right),\ \frac{k_n b_n}{r_n^2} = \lambda_n \left(a_n + \frac{b_n}{r_n} - t_1\right);\ \frac{k_1 b_1}{r_1^2} = \frac{k_2 b_2}{r_1^2},\ \frac{k_2 b_2}{r_2^2} = \frac{k_3 b_3}{r_2^2}, \ldots,$$

$$\frac{k_{n-1} b_{n-1}}{r^2_{n-1}} = \frac{k_n b_n}{r^2_{n-1}};\ \frac{k_1 b_1}{r_1^2} = \lambda_1 \left[a_1 + \frac{b_1}{r_1} - a_2 - \frac{b_2}{r_1}\right],\ \frac{k_2 b_2}{r_2^2} = \lambda_2 \left[a_2 + \frac{b_2}{r_2} - a_3 - \frac{b_3}{r_2}\right], \ldots$$

$$\frac{k_{n-1} b_{n-1}}{r^2_{n-1}} = \lambda_{n-1} \left[a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{r_{n-1}} - a_n - \frac{b_n}{r_{n-1}}\right].$$

Hieraus folgt:

$$k_1 b_1 = \frac{t_0 - t_1}{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda_0 r_0^2} + \frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n^2} + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{1}{r_2} + \ldots \\ \qquad + \left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}}\right)\frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_0 k_1} - \frac{1}{r_n k_n}\end{array}\right.},$$

$$a_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} t_0 \left[\frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n^2} + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \ldots + \left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}}\right)\frac{1}{r_{n-1}}\right] + \frac{t_1}{\lambda_0 r_0^2} + \\ \qquad \frac{t_1}{k_1 r_0} - \frac{t_0}{k_n r_n} \end{array}\right\}}{\frac{1}{\lambda_0 r_0^2} + \frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r_0 k_1} - \frac{1}{r_n k_n}}.$$

$$a_m = a_1 - k_1 b_1 \left[\frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{m-1} r^2_{m-1}}\right] - k_1 b_1 \left[\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_{m-1}}\right)\frac{1}{r_{m-1}}\right],\ b_m = \frac{k_1 b_1}{k_m}.$$

Die durch die Einheit der Fläche in der Zeiteinheit in die erste Schichte einströmende Wärmemenge ist gleich $\frac{k_1 b_1}{r_0^2}$.

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0,\ r\frac{d^2}{dr^2}(rv) = 0.$$

Wir haben dabei auf die Wärme, welche durch die übrigen Seitenflächen in das Element einströmen könnte, nicht Rücksicht genommen, da dort die entgegengesetzten Flächen gleiche Temperatur haben, also keine Wärmeströmung stattfindet.

Die Gränzbedingungen sind, dass an der inneren und äussern Wandung die Grösse $-k r^2 \cos\psi\, \Delta\psi\, \Delta\varphi \frac{\partial v}{\partial r}$ gleich sey der in der Zeiteinheit durchströmenden Wärmemenge, welche auch durch $\gamma \tau r^2 \cos\psi\, \Delta\psi\, \Delta\varphi$ gegeben ist, wo τ der Temperaturunterschied. Ferner dass $-k r^2 \cos\psi\, \Delta\psi\, \Delta\varphi \frac{\partial v}{\partial r}$ dasselbe an der Gränze zweier Schichten, und auch gleich $\lambda \tau r^2 \cos\psi\, \Delta\psi\, \Delta\varphi$ sey, wo wieder τ der Temperaturunterschied.

b) wenn die Wärme von Aussen nach Innen geht, so gilt dieselbe Auflösung, nur muss man dann die Schichten von Aussen nach Innen zählen; t_0 als die Temperatur auf der erhabenen Seite der ersten, t_1 als die auf der hohlen Seite der letzten Schichte ansehen.

Man sieht aus Nr. 9 und 10, dass in beiden Fällen die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit strömende Wärmemenge der Temperaturdifferenz $t_0 - t_1$ proportional ist.

§. 105.

Gleichungen, die sich nach Art homogener Gleichungen behandeln lassen.

I. Sieht man $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots$ an als Grössen von der Ordnung 1, 0, -1, -2, ..., so nennen wir eine Differentialgleichung höherer Ordnung homogen, wenn alle ihre einzelnen Glieder denselben Grad haben. Setzt man also

$$y = xz, \frac{\partial y}{\partial x} = u, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{v}{x}, \ldots.,$$

so wird in allen Gliedern dieselbe Potenz von x ausgeschieden werden können, und die bleibende Grösse kein x mehr enthalten.

Eine (solche) homogene Gleichung der zweiten Ordnung kann dadurch immer auf eine der ersten Ordnung zurückgeführt werden. Durch die angegebene Einsetzung erhält man eine Gleichung zwischen z, u, v, aus der eine dieser Grössen durch die zwei andern gefunden wird, während

$$u = x\frac{dz}{dx} + z, \quad \frac{du}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Vermittelst dieser Beziehungen wird man immer eine Differentialgleichung zwischen u und z, oder v und z, oder u und v herstellen können, wozu folgende Formeln dienen:

$$(\alpha) \quad v = \varphi(u, z): x\frac{dz}{dx} = u - z, \quad x\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dz}{du} = \frac{u-z}{v} \text{ (§. 21)};$$

$$(\beta) \quad u = \psi(v, z): \quad \frac{du}{dz} = \frac{v}{u-z}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{dv}{dz} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{dv}{dz} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{v}{u-z};$$

$$(\gamma) \quad z = f(u, v): \quad \frac{dz}{du} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{u-z}{v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u-z}{v}.$$

Kann man diese Gleichung integriren, so hat man eine weitere Beziehung zwischen u, v, z, und mittelst derselben lässt sich y durch x ausdrücken. So wenn etwa u und v in z ausgedrückt sind, gibt $x\frac{\partial z}{\partial x} = u - z$ die Gleichung zwischen x und z; $y = xz$ die zwischen y und x, u. s. w.

1) $$a x^3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \text{ [nach } (\alpha)]$$

gibt

$$a v = (z-u)^2,\ v = \frac{(z-u)^2}{a},\quad \frac{dz}{du} = -\frac{a}{z-u},\quad \frac{du}{dz} = \frac{u-z}{a},$$

welche Gleichung nach §. 92, I integrirt, gibt:

$$u = e^{\frac{1}{a}\int\partial z}\left[C - \frac{1}{a}\int z e^{-\frac{1}{a}\int\partial z}\partial z\right] = e^{\frac{z}{a}}\left[C - \frac{1}{a}\int z e^{-\frac{z}{a}}\partial z\right] = C e^{\frac{z}{a}} + z + a,$$

$$u - z = C e^{\frac{z}{a}} + a,\ x\frac{dz}{dx} = C e^{\frac{z}{a}} + a,\ \int\frac{\partial z}{C e^{\frac{z}{a}} + a} = \int\frac{\partial x}{x} + C';$$

setzt man hier $e^{\frac{z}{a}} = \varphi$, $z = a\,l(\varphi)$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{a}{\varphi}$, so ist:

$$\int\frac{\partial z}{C e^{\frac{z}{a}} + a} = \int\frac{a\,\partial\varphi}{\varphi(C\varphi + a)} = l\left(\frac{\varphi}{C\varphi + a}\right) = l(e^{\frac{z}{a}}) - l(C e^{\frac{z}{a}} + a),$$

also

$$l(e^{\frac{z}{a}}) - l(C e^{\frac{z}{a}} + a) = l(x) + C',\quad \frac{e^{\frac{z}{a}}}{C e^{\frac{z}{a}} + a} = C_1 x,\quad z = \frac{y}{x},$$

so dass die Integralgleichung ist

$$e^{\frac{y}{ax}} = C_1 x(C e^{\frac{y}{ax}} + a),\ e^{\frac{y}{ax}} = C x e^{\frac{y}{ax}} + C_1 a x,\ e^{\frac{y}{ax}} = \frac{C_1 a x}{1 - C x},$$

2)
$$y = x\frac{\partial y}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \text{[nach } (\gamma)],$$

gibt

$$z = u + v,\ \frac{dz}{du} = 1 + \frac{dv}{du},\ \frac{dz}{du} = \frac{u-z}{v} = -1,\ \frac{dv}{du} = -1 - 1 = -2,\ v = -2u + C;$$

$$x\frac{du}{dx} = v = -2u + C,\ \int\frac{\partial u}{C - 2u} = \int\frac{\partial x}{x} + C',\ l[\sqrt{2u - C}] = -l(x) + C',\ \sqrt{2u - C} = \frac{C_1}{x},$$

$$u = \frac{C_1}{2x^2} + \frac{C}{2}\ \text{(wo } C_1 \text{ für } C_1^2 \text{ gesetzt wurde)};$$

$$z = u + v = C - u = \frac{C}{2} - \frac{C_1}{2x^2} = \frac{y}{x};$$

$$y = -\frac{C_1}{2x} + \frac{C}{2}x,\ \text{oder } y = Cx + \frac{C_1}{x}.$$

II. Wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung erst homogen, wenn man y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ als vom n^{ten}, $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ansieht, so setze man

$$y = x^n z,\ \frac{\partial y}{\partial x} = x^{n-1}u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x^{n-2}v$$

und erhält eine Gleichung zwischen z, u, v. Dann ist

$$n x^{n-1} z + x^n\frac{dz}{dx} = x^{n-1}u;\ (n-1)x^{n-2}u + x^{n-1}\frac{du}{dx} = x^{n-2}v,$$

d. h.

$$nz + x\frac{dz}{dx} = u;\ (n-1)u + x\frac{du}{dx} = v;\ x\frac{dz}{dx} = u - nz,\ x\frac{du}{dx} = v - (n-1)u,$$

woraus auch

$$\frac{dz}{du} = \frac{u - nz}{v - (n-1)u}.$$

3)
$$x^4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial y}{\partial x} - 2xy\frac{\partial y}{\partial x} + 4y^2 = 0;$$

$$y = x^2 z,\ \frac{\partial y}{\partial x} = xu,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v:\ v - u - 2zu + 4z^2 = 0,\ v = u + 2zu - 4z^2,\ v - u = 2z(u - 2z);$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{u - 2z}{v - u} = \frac{1}{2z},\ \int 2z\,\partial z = u + C,\ z^2 = u + C.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2xz + x^2\frac{dz}{dx} = xu = x(z^2 - C),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2z}{x} - \frac{z^2}{x} + \frac{C}{x} = 0,\ \int\frac{\partial z}{-z^2 + 2z + C} + \int\frac{\partial x}{x} = C',$$

$$l(x) = C_1 + \int\frac{\partial z}{z^2 - 2z - C} = C_1 + \frac{1}{2\sqrt{1+C}}\,l\left(\frac{z - 1 - \sqrt{1+C}}{z - 1 + \sqrt{1+C}}\right),$$

$$\frac{z - 1 - c}{z - 1 + c} = c_1 x^{2c},\ \frac{y - x^2(1+c)}{y - x^2(1-c)} = c_1 x^{2c}.$$

§. 106.

Behandlung ähnlicher Fälle.

I. Ist die vorgelegte Gleichung so beschaffen, dass y ausfällt, wenn man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uy,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = vy$$

setzt, so erhält man eine Gleichung zwischen x, u, v und da

$$u\frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} = vy,\ \text{d. h. } u^2 y + y\frac{\partial u}{\partial x} = vy,\ u^2 + \frac{\partial u}{\partial x} = v,$$

so wird man eine Gleichung zwischen u und x finden können, aus der dann die zwischen y und x folgen wird.

1)
$$ay\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = y\frac{\partial y}{\partial x}$$

gibt

$$av + bu^2 = u,\ v = \frac{u - bu^2}{a},\ u^2 + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u - bu^2}{a},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u - (a+b)u^2}{a},\ \int\frac{\partial u}{u - (a+b)u^2} = \frac{x}{a} + C,$$

$$l(u) - l[1 - (a+b)u] = \frac{x}{a} + C,\ \frac{u}{1 - (a+b)u} = Ce^{\frac{x}{a}},\ u = \frac{Ce^{\frac{x}{a}}}{1 + (a+b)Ce^{\frac{x}{a}}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=u y,\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{Ce^{\frac{x}{a}}}{1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}},\ l(y)=C\int\frac{e^{\frac{x}{a}}\partial x}{1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}}+C'.$$

$$l(y)=\frac{a\,l[1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}]}{a+b}+C',\ y=C_1[1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}]^{\frac{a}{a+b}}.$$

II. Die Einführung neuer Veränderlichen statt x und y, die in irgend welcher Weise mit diesen Grössen zusammenhängen, wird eben so in manchen Fällen entweder die Gleichung auf eine niedrigere Ordnung, oder aber auf eine andere zurückführen, die leichter zu integriren ist. Als Beispiele mögen die folgenden dienen.

2)
$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+a^2y^2=0.\ *$$

Man setze $y=e^u,\ \frac{\partial y}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=e^u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+e^u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, so ist die vorgelegte Gleichung:

$$e^{2u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+e^{2u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-e^{2u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+a^2e^{2u}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+a^2=0,$$

also wenn man $\frac{\partial u}{\partial x}=v$ setzt:

$$v\frac{\partial v}{\partial x}+v^2+a^2=0,\ 2v\frac{\partial v}{\partial x}+2v^2+2a^2=0\ (\text{§. 92, II, } Y=v^2):$$

$$v^2=e^{-2\int\partial x}[c-2a^2\int e^{2\int\partial x}\partial x]=ce^{-2x}-a^2,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{ce^{-2x}-a^2},$$

$$u=\int\sqrt{ce^{-2x}-a^2}\,\partial x=-\sqrt{ce^{-2x}-a^2}+a\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{ce^{-2x}-a^2}}{a}\right)+C',$$

$$l(y)=-\sqrt{ce^{-2x}-a^2}+a\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{ce^{-2x}-a^2}}{a}\right)+C_1.$$

3)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a x^m y^n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^r.$$

Man setze $y=x^\alpha s,\ \frac{\partial y}{\partial x}=x^{\alpha-1}t,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=x^{\alpha-2}u$, so ist (§. 105, II)

$$x^{\alpha-2}u=ax^m x^{n\alpha}s^n x^{r\alpha-r}t^r,\ u=ax^{m+n\alpha+r\alpha-r-\alpha+2}s^n t^r,$$

* In anderer Form:

$$dy\,d^2y+(dy)^2dx-\frac{1}{y}(dy)^3+a^2y^2(dx)^3=0,$$

wo nun alle Glieder unendlich klein der dritten Ordnung sind (§. 75, I, Note zu §. 103, I). Die Differentialgleichung gibt also die Verhältnisse dieser unendlich kleinen Grössen gegen einander an. Dass nur unendlich kleine Grössen derselben Ordnung vorkommen können, ist aus §. 75 sofort klar.

und also, wenn α so bestimmt wird, dass $m+n\alpha+r\alpha-r-\alpha+2=0$, $\alpha=-\frac{(m-r+2)}{n+r-1}$, so ist

$$u=a s^n t^r.$$

Aber

$$x^{\alpha-1}t=\alpha x^{\alpha-1}s+x^\alpha\frac{ds}{dx},\quad t=\alpha s+x\frac{ds}{dx},\quad x\frac{ds}{dx}=t-\alpha s;$$

$$x^{\alpha-2}u=(\alpha-1)x^{\alpha-2}t+x^{\alpha-1}\frac{dt}{dx},\quad u=(\alpha-1)t+x\frac{dt}{dx},\quad x\frac{dt}{dx}=u-(\alpha-1)t;$$

hieraus durch Division:

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{u-(\alpha-1)t}{t-\alpha s}=\frac{a s^n t^r-(\alpha-1)t}{t-\alpha s},\quad (t-\alpha s)\frac{\partial t}{\partial s}=a s^n t^r-(\alpha-1)t,$$

welche Gleichung erster Ordnung zwischen t und s zu integriren ist. Hat man dann t als Funktion von s, so ergibt $x\frac{\partial s}{\partial x}=t-\alpha s$ die Gleichung zwischen x und s, und dann $y=x^\alpha s$ die zwischen y und x. Die obige Auflösung ist unzulässig, wenn $n+r=1$ ist, da dann $\alpha=\infty$ würde. In diesem Falle setze man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y v,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=y w,\quad \text{also } y w=a x^m y^n y^r v^r=a x^m y v^r,\quad w=a x^m v^r.$$

$$y w=y\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial y}{\partial x}=y\frac{\partial v}{\partial x}+v^2 y,\quad w=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=w-b^2;$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=a x^m v^r-v^2,$$

welche Gleichung den Zusammenhang zwischen v und x, und dann $\frac{\partial y}{\partial x}=y v$ zwischen y und x gibt.

Für $r=1$ und $m=-1$ hätte man etwa $\alpha=0$, wenn nicht $n=0$; alsdann wäre also

$$t\frac{\partial t}{\partial s}=a s^n t+t,\quad \frac{\partial t}{\partial s}=a s^n+1,\quad t=\frac{a s^{n+1}}{n+1}+s+C;\quad y=s,\quad x\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a y^{n+1}}{n+1}+y+C.$$

§. 107.

Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

I. Die Gleichung

$$P_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+P_2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+P_n y=X, \qquad \text{(a)}$$

in der $P_0, P_1, \ldots, P_n$, X weder y noch die Differentialquotienten von y enthalten, heisst eine lineare Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung. Man sagt, sie habe einen zweiten Theil, wenn X nicht Null ist; im andern Falle hat die Gleichung keinen zweiten Theil. Den letzteren Fall nun, als den einfacheren, wollen wir zunächst annehmen, d. h. voraussetzen, man habe die Gleichung

$$P_0 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x} + P_n y = 0.* \qquad \text{(b)}$$

Gesetzt nun, y_1, y_2, ..., y_r seyen bekannte Funktionen von x so beschaffen, dass sie für y gesetzt der Gleichung (b) genügen, so wird dieser Gleichung auch durch den Werth

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_r y_r \qquad \text{(c)}$$

Genüge geschehen, wenn C_1, ..., C_r willkürliche Konstanten sind. Denn da y_1, ..., y_r der Gleichung (b) genügen, so hat man

$$P_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_n y_1 = 0,$$

$$\vdots$$

$$P_0 \frac{\partial^n y_r}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_r}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y_r}{\partial x} + P_n y_r = 0.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen bezüglich mit C_1, C_2, ..., C_r, addirt sie und beachtet, dass aus (c) folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + C_r \frac{\partial y_r}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \ldots + C_r \frac{\partial^n y_r}{\partial x^n},$$

so erhält man die Gleichung (b), der also auch durch den Werth (c) Genüge geleistet wird. Daraus folgt, dass wenn man n Funktionen y_1, y_2, ..., y_n, die sämmtlich von einander verschieden sind, kennt, welche für y gesetzt der (b) genügen, das allgemeine Integral von (b) seyn werde:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n. \qquad \text{(d)}$$

II. Kennt man nur einen Werth y_1, der (b) genügt, so lässt sich diese Gleichung auf eine der $(n-1)^{ten}$ Ordnung erniedrigen. Denn man setze

$$y = y_1 \int \varphi \, \partial x,$$

wo φ eine noch unbekannte Funktion von x irt, so ist (§. 18'):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x} \int \varphi \, \partial x + y_1 \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \int \varphi \, \partial x + 2 \frac{\partial y_1}{\partial x} \varphi + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\vdots$$

---

* In anderer Form (Note zu §. 103, I) heisst diese Gleichung auch:

$$P_0 d^n y + P_1 d^{n-1} y \, dx + P_2 d^{n-2} y \, (dx)^2 + \ldots + P_{n-1} dy \, (dx)^{n-1} + P_n y \, (dx)^n = 0,$$

wo nun die sämmtlichen Glieder unendlich klein der n^{ten} Ordnung sind (§. 75, I). Die Gleichung (b) gibt also das Verhältniss dieser Grössen gegen einander an. Unendlich Kleine höherer Ordnung können in ihr nicht zugleich vorkommen, da sie neben denen n^{ter} Ordnung verschwinden würden. — Die (b) wäre hiernach die Gränzgleichung von

$$P_0 \Delta^n y + P_1 \Delta^{n-1} y \, \Delta x + \ldots + P_{n-1} \Delta y \, (\Delta x)^{n-1} + P_n y \, (\Delta x)^n = 0$$

mit abnehmendem Δx (§. 56, II).

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n}\int \varphi\, \partial x + n\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}}\varphi + \ldots + y_1 \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}},$$

also, wenn man diess in (b) einsetzt:

$$\left(P_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_n y_1\right)\int \varphi\, \partial x + Q_1 \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}} + Q_2 \frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial x^{n-2}} + \ldots Q_n \varphi = 0,$$

wo $Q_1, \ldots, Q_n$ bekannte Funktionen von x sind. Da der Koeffizient von $\int \varphi\, \partial x$ Null ist, indem y_1 der (b) genügt, so hat man also zur Bestimmung von φ eine Gleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung.

III. Kennt man zwei Werthe y_1, y_2, die der (b) genügen, so kann man (b) um zwei Ordnungen erniedrigen. Denn setzt man zuerst wieder $y = y_1 \times \int \varphi\, \partial x$, so erhält man zur Bestimmung von φ wieder die so eben erhaltene Gleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung; da aber auch y_2 der Gleichung genügt, so gibt es also einen Werth φ so, dass $y_2 = y_1 \int \varphi\, \partial x$, $\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ ist. Da man hiernach einen Werth von φ kennt, so kann man, indem man $\varphi = \varphi_1 \int \psi\, \partial x$ setzt, wo $\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, die so eben erhaltene Gleichung nochmals um eine Einheit erniedrigen. *

IV. Kennt man überhaupt r Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_r$, welche der Gleichung (b) genügen, so kann man dieselbe auf eine Differentialgleichung der $n-r^{ten}$ Ordnung zurückführen, wenn man nach folgender Uebersicht verfährt:

$$y = y_1 \int \varphi\, \partial x;\quad \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),\quad \varphi = \varphi_1 \int \psi\, \partial x;\quad \psi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right),\quad \psi = \psi_1 \int \mu\, \partial x;$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_3}{y_1}\right),\qquad \psi_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi_{r-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_r}{y_1}\right),\qquad \psi_{r-2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_1}\right),$$

---

* Genügt y_1 der (b), so genügt $y_1 \int \varphi\, \partial x$ derselben Gleichung, wenn φ aus $Q_1 \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}} + \ldots + Q_n \varphi = 0$ bestimmt ist. Umgekehrt, wenn φ so bestimmt wird, dass $y_1 \int \varphi\, \partial x$ der (b) genügt, so wird φ der eben angegebenen Gleichung genügen müssen. Denn setzt man $y_1 \int \varphi\, \partial x$ in (b) ein, so erhält man unmittelbar die Gleichung in φ. — Genügt nun y_2 der (b) und man setzt $\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, so wird $y_1 \int \varphi\, \partial x$ der (b) genügen, also $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ der Gleichung $Q_1 \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}} + \ldots + Q_n \varphi = 0$.

$$\mu_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right), \quad \mu = \mu_1 \int \nu \, \partial x; \quad \nu_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right), \quad \nu = \nu_1 \int \lambda \, \partial x \text{ u. s. w.}$$

$$\mu_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right), \qquad \nu_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_3}{\mu_1}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mu_{r-3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{r-2}}{\psi_1}\right), \qquad \nu_{r-4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_{r-3}}{\mu_1}\right).$$

V. Für den speziellen Fall einer Gleichung zweiter Ordnung ist

$$y = y_1 \int \varphi \, \partial x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x} \int \varphi \, \partial x + y_1 \varphi, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \int \varphi \, \partial x + 2 \frac{\partial y_1}{\partial x} \varphi + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

so dass die Gleichung $P_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_1 \frac{\partial y}{\partial x} + P_2 y = 0$ wird:

$$P_0 y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(2 P_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_1 y_1\right) \varphi = 0, \quad \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{P_1}{P_0} = 0,$$

$$l(\varphi) + 2 l(y_1) + \int \frac{P_1 \, \partial x}{P_0} = l(C), \quad \varphi = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int \frac{P_1 \, \partial x}{P_0}},$$

$$y = [C \int \frac{e^{-\int \frac{P_1}{P_0} \partial x}}{y_1^2} \partial x + C_1] y_1 = C_1 y_1 + C y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{P_1}{P_0} \partial x}}{y_1^2} \partial x.* \qquad \text{(e)}$$

VI. Es folgt hieraus auch leicht, dass die Integralgleichung von (b) nothwendig die Form (d) haben muss. — Denn es genüge ihr y_1, so genügt ihr nothwendig auch $y_1 \int \varphi \, \partial x$, wo φ durch eine lineare Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt ist, welche die Form der (b) wieder hat. Setzt man also $y_1 \int \varphi \, \partial x = y_2$, so genügt der (b) nothwendig auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$. — Daraus folgt, dass jeder linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung nothwendig die Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt. — Der Gleichung in φ genügt jedenfalls ein Werth für φ, der φ_1 heissen mag; da sie linear ist, so genügt ihr also auch die Form $C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2$, mithin der (b) die Grösse $\int [C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2] \, \partial x = C_1 y_2 + C_2 y_3$, so dass ihr jetzt $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ genügt. Eine solche Form genügt also nothwendig jeder linearen Differentialgleichung, also auch der in φ, u. s. w.

Da man für jeden einzelnen Werth, welcher der (b) genügt, die Differentialgleichung um eine Ordnung erniedrigen kann, so ist es unmöglich, dass mehr als n verschiedene Werthe ihr genügen. Jede Funktion also, welche der (b) genügt, muss die Form der Grösse y in (d) haben. (Verschieden sind die Werthe, wenn sie nicht linear zusammenhängen.)

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{x^2} y = 0$$

wird befriedigt für $y = x$, so dass also $y_1 = x$, $P_0 = 1$, $P_1 = -\frac{1}{x}$, $\int \frac{P_1}{P_0} \partial x = -l(x)$, also

$$y = Cx + C' x \int \frac{x}{x^2} \partial x = Cx + C' x \, l(x).$$

---

* Vergleiche, als hieher gehörig, den Satz im „Anhang" unter A, X Schluss.

2) $$x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-3x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+6x\frac{\partial y}{\partial x}-6y=0$$

wird befriedigt für $y=x$, also setze man $y=x\int\varphi\,\partial x$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\int\varphi\,\partial x+x\varphi$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2\varphi+x\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=3\frac{\partial\varphi}{\partial x}+x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, und erhält

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \varphi=Cx+C',\quad \int\varphi\,\partial x=Cx^2+C'x+C'',$$

also

$$y=Cx^3+C'x^2+C''x \text{ (§. 109).}$$

3) $$x^2[l(x)-1]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-x\frac{\partial y}{\partial x}+y=0$$

wird ebenfalls befriedigt für $y=x$, also da $P_0=x^2[l(x)-1]$, $P_1=-x$, $\int\frac{P_1}{P_0}\partial x=-\int\frac{\partial x}{[l(x)-1]x}=-l[l(x)-1]$, so ist

$$y=Cx+C'x\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x=Cx+C'l(x).$$

Wie wir nachher sehen werden, genügt es, die Gleichung (b) integriren zu können, um in allen Fällen das allgemeine Integral der Gleichung (a) zu finden, so dass wir uns nun die Aufgabe vorlegen wollen, die Gleichung (b) in einigen besonderen Fällen zu integriren, da eine allgemeine Integration derselben noch unbekannt ist. Diese besonderen Fälle betreffen natürlich den Bau der Koeffizienten $P_0, P_1, \ldots, P_n$, dessen Beschaffenheit die Aufgabe mehr oder minder schwierig machen wird.

§. 108.

Lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Der erste Hauptfall, den wir betrachten wollen, ist der, da $P_0, \ldots, P_n$ konstant sind, man also die Gleichung

$$A_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+A_n y=0 \qquad (f)$$

hat, in der $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (reelle) Konstanten sind. Setzt man hier $y=e^{mx}$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=me^{mx}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=m^2e^{mx}$, ..., $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=m^ne^{mx}$, so wird die Gleichung (f) zu

$$e^{mx}[A_0m^n+A_1m^{n-1}+\ldots+A_{n-1}m+A_n]=0.$$

Bestimmt man also m so, dass die Gleichung

$$A_0m^n+A_1m^{n-1}+\ldots+A_{n-1}m+A_n=0 \qquad (g)$$

richtig ist, so genügt $y=e^{mx}$ der Gleichung (f). Die Gleichung (g) wird im Allgemeinen nun mehrere Werthe von m liefern, so dass also auch mehrere Werthe von y gefunden sind, die der Gleichung (f) genügen. In dieser Beziehung müssen wir folgende Fälle unterscheiden.

Verschiedene Wurzeln.

I. Die Gleichung (g) gebe für m lauter reelle von einander verschiedene Werthe, die alsdann der Anzahl nach n seyn werden. Sind $m_1, m_2, \ldots, m_n$ diese Werthe, so ist gemäss §. 107 das allgemeine Integral der Gleichung (f):

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots C_n e^{m_n x}. \qquad (h)$$

II. Die Gleichung (g) habe zwar lauter verschiedene Wurzeln, seyen jedoch darunter auch imaginäre. Ist also etwa $m_1 = \alpha + \beta i$, so gibt es bekanntlich noch eine zweite Wurzel $m_2 = \alpha - \beta i$; in diesem Falle nun ist

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}[C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}] =$$
$$e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + i C_1 \sin(\beta x)] + C_2 [\cos(\beta x) - i C_2 \sin(\beta x)] \text{ (§. 54, IV)} =$$
$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos(\beta x) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta x)],$$

und da $C_1 + C_2$, $i(C_1 - C_2)$ eben auch Konstanten sind, die wir kurzweg mit C_1, C_2 bezeichnen wollen, so folgt daraus, dass man in (h) die zwei Glieder, welche zu $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$ gehören, ersetzen muss durch $[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] e^{\alpha x}$. Dass man in ganz ähnlicher Weise für zwei andere imaginäre Wurzeln zu verfahren habe, versteht sich von selbst.

Gleiche Wurzeln.

III. Die Gleichung (g) hat zwar lauter reelle Wurzeln, sie sind aber nicht alle von einander verschieden. Wir wollen einmal voraussetzen, es sey $m_1 = m_2$, sonst keine Wurzel diesen gleich, in welchem Falle die zwei Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ in Wahrheit bloss das eine $(C_1 + C_2) e^{m_1 x}$ bilden würden, so dass in (h) bloss $n - 1$ willkürliche Konstanten vorkommen würden, man also das allgemeine Integral nicht gefunden hätte. Setzen wir aber zunächst $m_2 = m_1 + \varepsilon$ voraus, so sind die zwei betreffenden Glieder in (h):

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{(m_1+\varepsilon)x} = e^{m_1 x}[C_1 + C_2 e^{\varepsilon x}] = e^{m_1 x}[C_1 + C_2 + C_2 \varepsilon x + C_2 \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \ldots\ldots.]$$

(§. 54), so dass, wenn man $C_1 + C_2 = A$, $C_2 \varepsilon = B$ setzt, der Gleichung (f) ganz gewiss durch

$$e^{m_1 x}[A + Bx + \frac{B\varepsilon x^2}{2} + \frac{B\varepsilon^2 x^3}{2.3} + \ldots,] \qquad (i)$$

für y genügt wird, wenn nur ε die Differenz der zwei Wurzeln m_1 und m_2 ist, wobei dann A und B die Konstanten sind. Wie gesagt, die Form (i) genügt sicher der Gleichung (f), vorausgesetzt, dass $m = m_1$ und $m = m_1 + \varepsilon$ der Gleichung (g) genügen. Lässt man hier ε abnehmen, so bleibt die Behauptung immer in Kraft, und wenn ε unbegränzt gegen Null geht, so folgt daraus, dass falls m_1 zweimal Wurzel der Gleichung (g) ist, der Gleichung (f) Genüge geschieht durch $e^{m_1 x}(A + Bx)$, welche Grösse in (h) an Stelle der Summe $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} (m_2 = m_1)$ tritt.

Gesetzt nun, die drei Wurzel m_1, m_2, m_3 seyen gleich, weiter aber keine diesen gleich, so würden in (h) die drei Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} +$

$C_3 e^{m_3 x}$ sich in ein einziges zusammenziehen. Wie so eben wird nun aber gezeigt, dass an die Stelle der zwei ersten tritt $e^{m_1 x}(A+Bx)$, so dass also, wenn zuerst $m_3 = m_1 + \varepsilon$, die Gleichung (f) befriedigt ist durch

$$e^{m_1 x}[A+Bx+C_3 e^{\varepsilon x}] = e^{m_1 x}[A+Bx+C_3+C_3\varepsilon x+\frac{C_3\varepsilon^2 x^2}{2}+\frac{C_3\varepsilon^3 x^3}{2.3}+\ldots],$$

wenn $m_2 = m_1$, $m_3 = m_1 + \varepsilon$. Setzt man aber $A + C_3 = M$, $B + C_3\varepsilon = N$, $\frac{C_3\varepsilon^2}{2} = L$, so weiss man also, dass der Gleichung (f) genügt wird durch

$$e^{m_1 x}[M+Nx+Lx^2+\frac{L\varepsilon x^3}{3}+\frac{L\varepsilon^2 x^4}{3.4}+\ldots].$$

Lässt man hier wieder ε unendlich abnehmen, so folgt daraus, dass wenn m_1 dreimal Wurzel von (g) ist, an die Stelle von $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$ in (h) tritt $e^{m_1 x}[M+Nx+Lx^2]$, wo M, N, L Konstanten sind. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar, so dass wenn m_1 $r$mal Wurzel von (g) ist, aber nicht mehrmal, dann an die Stelle der in eines zusammengehenden Glieder in (h) zu setzen ist

$$e^{m_1 x}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots. C_r x^{r-1}].$$

Diese Art des Beweises hat immerhin etwas Anstössiges und wir haben sie nur wegen der Leichtigkeit, mit der die Form des Integrals sich findet, beibehalten. Um zur vollen Gewissheit zu gelangen, muss man in solchen Fällen immer thatsächlich zeigen, dass der gefundene Werth der Differentialgleichung genügt. Diess geschieht in folgender Weise.

Hat die (g) die r gleichen Wurzeln $m_1 = m_2 = \ldots = m_r$, so muss, wenn wir die erste Seite der Gleichung (g) mit $f(m)$ bezeichnen, bekanntlich für $m = m_1$ seyn:

$$f(m)=0,\; f'(m)=0,\; f''(m)=0, \ldots, f^{r-1}(m)=0. *$$

Wir wollen nun zeigen, dass $e^{m_1 x}x^\alpha$ auch der (f) genügt, wenn nur die ganze Zahl α kleiner als r ist. Setzt man in (f) $y = e^{mx}x^\alpha$ (wobei wir für m uns denken m_1), entwickelt nach §. 18′ und ordnet, so wird die erste Seite von (f):

$$e^{mx}[A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + \ldots\ldots + A_n] + e^{mx}\Big[\frac{n}{1}A_0 m^{n-1} + \frac{n-1}{1}A_1 m^{n-2}$$
$$+\ldots.+A_1\Big]\alpha x^{\alpha-1} + e^{mx}\Big[\frac{n(n-1)}{1.2}A_0 m^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}A_1 m^{n-3} + \ldots$$
$$+\frac{2.1}{1.2}A_2\Big]\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \ldots\ldots\ldots + e^{mx}\Big[\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}A_0 m^{n-\alpha}$$

---

* Eine algebraische Gleichung $f(m)=0$ hat die r gleichen Wurzeln m_1, wenn $f(m)$ sich durch $(m-m_1)^r$ dividiren lässt. Aber es ist (§. 53, wenn $a+h=m$, $a=m_1$):

$$f(m) = f(m_1) + \frac{m-m_1}{1}f'(m_1) + \ldots + \frac{(m-m_1)^{r-1}}{1..r-1}f^{r-1}(m_1)$$
$$+\frac{(m-m_1)^r}{1..r}f^r(m_1) + \ldots + \frac{(m-m_1)^n}{1\ldots n}f^n(m_1).$$

Demnach lässt sich $f(m)$ nur dann durch $(m-m_1)^r$ dividiren, wenn die Grössen $f(m_1)$, $f'(m_1)$, ..., $f^{r-1}(m_1)$ Null sind.

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha)}{1.2\ldots\ldots\alpha}A_1 m^{n-1-\alpha}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 1}{1.2\ldots\alpha}A_\alpha\Big]\alpha(\alpha-1)\ldots 1$$

$$=e^{mx}[f(m)+\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1}f'(m)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^{\alpha-2}f''(m)+\ldots\ldots+f^\alpha(m)].$$

Da aber, wegen $\alpha < r$, für $m=m_1$ die Grössen $f(m)$, $f'(m)$, ..., $f^\alpha(m)$ Null sind, so ist also die (f) erfüllt, wenn $y=x^\alpha e^{m_1 x}$. Demnach genügen ihr: $e^{m_1 x}$, $x e^{m_1 x}$, $x^2 e^{m_1 x}$, ..., $x^{r-1} e^{m_1 x}$, woraus dann nach §. 107, I leicht folgt, dass ihr auch

$$e^{m_1 x}[C_1+C_2 x+C_3 x^2+\ldots+C_r x^{r-1}]$$

genügt.

IV. Die Gleichung (g) hat auch imaginäre gleiche Wurzeln. In diesem Falle tritt offenbar das Verfahren von III ganz wieder ein. Ist also $\alpha+\beta i$ r mal Wurzel von (g), mithin auch $\alpha-\beta i$ r mal Wurzel, so kommen in (g) die Glieder vor:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}[C_1+C_2 x+\ldots\ldots+C_r x^{r-1}]+e^{(\alpha-\beta i)x}[C'_1+C'_2 x+\ldots+C'_r x^{r-1}]$$
$$=e^{\alpha x}[(C_1+C'_1)\cos\beta x+i(C_1-C'_1)\sin\beta x+x(C_2+C'_2)\cos\beta x+ix(C_2-C'_2)\sin\beta x+$$
$$\ldots\ldots+x^{r-1}(C_r+C'_r)\cos\beta x+ix^{r-1}(C_r-C'_r)\sin\beta x],$$

d. h. jetzt hat man die $2r$ Glieder zu ersetzen durch:

$$e^{\alpha x}[C_1+C_2 x+C_3 x^2+\ldots+C_r x^{r-1}]\cos(\beta x)+e^{\alpha x}[C'_1+C'_2 x+\ldots+C'_r x^{r-1}]\sin(\beta x).$$

Wie man bei einer Verbindung mehrerer dieser Fälle verfahren muss, ist wohl klar.

Beispiele.

1) $$a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b\frac{\partial y}{\partial x}+cy=0.$$

$$am^2+bm+c=0,\quad m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ist nun $b^2-4ac>0$, so ist $y=C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}+C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}$;

$b^2-4ac=0$, „ „ $y=e^{-\frac{b}{2a}x}[C_1+C_2 x]$;

$b^2-4ac<0$, „ „ $y=e^{-\frac{b}{2a}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right]$.

2) $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-14\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+64\frac{\partial y}{\partial x}-96y=0;$$

$m^3-14m^2+64m-96=0$, $m=6, 4, 4$; $y=C_1 e^{6x}+e^{4x}[C_2+C_3 x]$.

3) $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+7\frac{\partial y}{\partial x}-5y=0;$$

$m^3-3m^2+7m-5=0$; $m=1$; $1+2i$, $1-2i$.

$y=C_1 e^x+e^x[C_2\cos 2x+C_3\sin 2x]$.

4) $$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+ay=0;\ a>0;$$

$$m^4+a=0;\ m=\sqrt[4]{-a}=-\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{a}\,e^{\frac{(2r+1)\pi i}{4}},\ r=0,1,2,3\ (\S.\ 9,\ II),$$

demnach sind die vier Wurzeln dieser Gleichung:

$$\sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ \sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);\ \sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$$

$$\sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\text{ d. h. }\sqrt[4]{a}\left[\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right],\ \sqrt[4]{a}\left[\cos\frac{3\pi}{4}\pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right],\text{ oder}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{4}}(1\pm i),\quad \sqrt[4]{\frac{a}{4}}(-1\pm i),$$

und also

$$y=e^{x\sqrt[4]{\frac{a}{4}}}\left[c_1\cos x\left(\sqrt[4]{\frac{a}{4}}\right)+c_2\sin\left(x\sqrt[4]{\frac{a}{4}}\right)\right]+e^{-x\sqrt[4]{\frac{a}{4}}}\left[\cos\left(x\sqrt[4]{\frac{a}{4}}\right)\right.$$
$$\left.+c_4\sin\left(x\sqrt[4]{\frac{a}{4}}\right)\right].$$

5) $$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}-5a\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+10a^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-10a^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+5a^4\frac{\partial y}{\partial x}-a^5=0,$$

$$m^5-5am^4+10a^2m^3-10a^3m^2+5a^4m-a^5=0,\ (m-a)^5=0;\ m=a,a,a,a,a.$$
$$y=e^{ax}[C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^4].$$

6) $$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-4\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+14\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-20\frac{\partial y}{\partial x}+25y=0;$$

$$m^4-4m^3+14m^2-20m+25=0;\ (m^2-2m+5)^2=0,$$

also sind die vier Wurzeln: $1\pm 2i$, jede doppelt, so dass

$$y=e^x(c_1+c_2x)\cos 2x+e^x(c_3+c_4x)\sin 2x.$$

7) Man soll eine Funktion $f(x)$ bestimmen, welche die in der Gleichung

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)\tag{k}$$

ausgesprochene Eigenschaft habe. *

---

* Man gelangt zu dieser Gleichung bei folgender Untersuchung.

Seyen zwei gleiche Kräfte R unter einem bestimmten Winkel 2x gegen einander geneigt, so nehmen wir an, dass ihre Mittelkraft S den Winkel 2x halbirt, also den Winkel x mit jeder der Kräfte R mache. Diese Mittelkraft (Resultirende) ist jedenfalls eine Funktion von R und x, so dass wir sie $= F(R, x)$ setzen können. Nun aber ist klar, dass wenn bei ungeändertem x die Kräfte R sich verdoppeln, verdreifachen u. s. w., diess auch mit S der Fall ist. Daraus folgt, dass

$$F(nR, x)=nF(R, x).$$

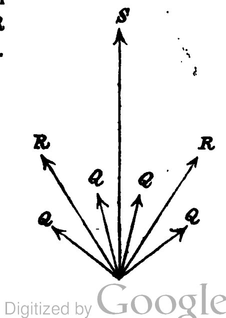


Fig. 57.

Die $F(R, x)$ ist also so beschaffen, dass

$$F(ay, b)=yF(a, b).$$

Durch Differenzirung nach y zieht man hieraus (wenn $ay=z$):

$$\frac{\partial F(z,b)}{\partial z}a=F(a,b),\ \frac{\partial^2 F(z,b)}{\partial z^2}a^2=0,\ \frac{\partial^2 F(z,b)}{\partial z^2}=0.$$

Man differenzire diese Gleichung zwei Mal nach x und y, so zieht man daraus:

$$f''(x+y)+f''(x-y)=f(y)f''(x),\quad f''(x+y)+f''(x-y)=f(x)f''(y),$$

mithin

$$f(y)f''(x)=f(x)f''(y),\ \text{d. h.}\ \frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{1}{f(y)}\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}.$$

In dieser Gleichung enthält die erste Seite kein y, die zweite kein x; da aber x und y unabhängig von einander sind, so kann dieselbe nur bestehen, wenn jede Seite dieselbe Konstante ist. Demnach

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=a f(x),\ \text{a konstant nach x (und y).}$$

Hieraus folgt nach Nr. 1:

$$f(x)=A e^{x\sqrt{a}}+B e^{-x\sqrt{a}},\ \text{oder}\ f(x)=A\cos(x\sqrt{-a})+B\sin(x\sqrt{-a}),$$

je ob $a>0$ oder $a<0$. Wir wollen Letzteres voraussetzen und $a=-\alpha^2$ annehmen, so ist

$$f(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x,$$

welche Gleichung nun die Funktion f(x) bestimmt. Setzt man diesen Werth in die (k) ein, so ergibt sich

$$A\cos\alpha(x+y)+B\sin\alpha(x+y)+A\cos\alpha(x-y)+B\sin\alpha(x-y)$$
$$=(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x)(A\cos\alpha y+B\sin\alpha y),$$

d. h.

$$2A\cos\alpha x\cos\alpha y+2B\sin\alpha x\cos\alpha y=A^2\cos\alpha x\cos\alpha y+AB\sin\alpha x\cos\alpha y$$
$$+AB\cos\alpha x\sin\alpha y+B^2\sin\alpha x\sin\alpha y.$$

Diese Gleichung muss für alle x und y richtig seyn. Setzt man also etwa $x=y=0$, so ergibt sich:

$$2A=A^2,\ \text{d. h.}\ A=0\ \text{oder}=2.$$

Für $A=0$ wäre

$$2B\sin\alpha x\cos\alpha y=B^2\sin\alpha x\sin\alpha y,$$

Demnach (§. 103, I):

$$F(z,b)=Az+B,$$

wo A und B Konstanten. Für $R=0$ ist aber auch $S=0$, d. h. es ist $F(0,b)=0$. Aber $F(0,b)=B$, so dass $B=0$ und $F(R,b)=AR$, wo A unabhängig von R, also bloss Funktion von x seyn kann. Demnach ist.

$$S=Rf(x). \qquad (\alpha)$$

Was f(x) anbelangt, so ist für $x=0$ nothwendig $S=2R$, also $f(0)=2$; für $x=\frac{\pi}{2}$ sind die beiden Kräfte R entgegengesetzt gerichtet, also $S=0$, so dass $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Wird x zu π, so hat S abermals den Werth 2R u. s. w. — Um nun f(x) zu bestimmen, denken wir uns vier gleiche Kräfte Q, von denen je zwei mit einer Kraft R gleiche Winkel y machen und so beschaffen, dass R die Mittelkraft ist, d. h. so dass $R=Qf(y)$. Die vier Kräfte Q ersetzen die zwei R; die Mittelkraft derselben muss also gleich S seyn. Die Mittelkraft der zwei äussersten Kräfte Q ist nach (α) gleich $Qf(x+y)$, der zwei innern gleich $Qf(x-y)$; beide sind nach S gerichtet, so dass $S=Qf(x+y)+Qf(x-y)$ und da $S=Rf(x)=Qf(y)f(x)$, so erhält man die Gleichung (k) des Textes.

was allgemein nur für $B=0$ zulässig ist; da aber A und B nicht beide Null seyn werden, so ist also $A=2$. Dann hat man

$$2B \sin\alpha x \cos\alpha y = 2B \sin\alpha x \cos\alpha y + 2B \cos\alpha x \sin\alpha y + B^2 \sin\alpha x \sin\alpha y,$$

woraus für $x=0$:

$$0 = 2B \sin\alpha y, \text{ d. h. } B=0.$$

Demnach hat man

$$f(x) = 2\cos\alpha x, \qquad (k')$$

welche Funktion der (k) vollkommen genügt. *

§. 109.

Gleichung mit den Koeffizienten $A(a+bx)^m$.

Als zweiter Fall sey die Gleichung

$$A_0(a+bx)^n \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + A_1(a+bx)^{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}(a+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + A_n y = 0 \qquad (K)$$

vorgelegt, worin a, b, $A_0, A_1, \ldots A_n$ Konstanten sind. Man setze

$$y=(a+bx)^r,\ \frac{\partial y}{\partial x} = rb(a+bx)^{r-1},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = r(r-1)b^2(a+bx)^{r-2}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = r(r-1)\ldots(r-n+1)b^n(a+bx)^{r-n},$$

so wird die Gleichung (K) zu

$$(a+bx)^r[A_0 b^n r(r-1)\ldots(r-n+1) + A_1 b^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots\ldots + A_{n-1} br + A_n] = 0,$$

so dass also, wenn r ein Werth ist so beschaffen, dass

---

* Für den in der vorigen Note betrachteten Fall muss $f(0)=2$ seyn, was sich auch aus (k') ergibt. Uebrigens folgt aus (k) für $x=y=0$: $2f(0)=f(0)^2$, also $f(0)=2$. Für $x=\frac{\pi}{2}$ muss aber $f(x)=0$ seyn, so dass $2\cos\alpha\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\alpha\frac{\pi}{2}=0$, und mithin $\alpha=1$ oder 3, 5, ..., allgemein $\alpha=2n+1$, wo n eine ganze Zahl. Man hat also $f(x) = 2\cos(2n+1)x$. Diese Grösse ist übrigens auch Null, wenn $(2n+1)x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2(2n+1)}$. Es wäre also die Mittelkraft Null, wenn die zwei Kräfte den Winkel $\frac{\pi}{2n+1}$ machen, was nicht der Fall seyn kann, da sie nur Null ist, wenn jener Winkel $=\pi$. Daraus folgt, dass $n=0$, d. h. dass

$$S = 2R\cos x.$$

Hieraus leitet sich dann leicht das Parallelogramm der Kräfte ab.

Wollte man die Form $Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$ zulasssen (wo a positiv $=\alpha^2$), so fände sich, wenn man in (k) einsetzt und $x=0$ macht: $e^{\alpha y}+e^{-\alpha y} = Ae^{\alpha y}+Be^{-\alpha y}$, was bei beliebigem y nur für $A=B=1$ zulässig ist, so dass $f(x)=e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}$, welche Form der (k) ebenfalls genügt. Für $x=\frac{\pi}{2}$ ist diess aber nicht 0, da $e^{\alpha x}$, $e^{-\alpha x}$ immer positiv sind. Demnach kann nicht a positiv seyn, was unsere Annahme rechtfertigt.

$$A_0 b^n r(r-1)\dots(r-n+1)+A_1 b^{n-1} r(r-1)\dots(r-n+2)+\dots+A_{n-1} br+A_n=0, \quad (l)$$

der Werth $(a+bx)^r$ für y der Gleichung (K) genügen wird. Da die Gleichung (l) in Bezug auf r vom n^{ten} Grade ist, so gibt sie im Allgemeinen n Werthe von r und man wird, wie in §. 108 folgende Fälle unterscheiden müssen.

I. Die n Werthe von r, die aus (l) folgen, sind alle reell und verschieden: sie seyen $r_1, \dots, r_n$. Alsdann ist (§. 107)

$$y=C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}+\dots+C_n(a+bx)^{r_n}. \quad (m)$$

II. Die Werthe seyen wohl verschieden, jedoch nicht alle reell. Sey also etwa $r_1=\alpha+\beta i$, $r_2=\alpha-\beta i$, so ist in (m):

$$C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}=C_1 e^{(\alpha+\beta i)\, l(a+bx)}+C_2 e^{(\alpha-\beta i)\, l(a+bx)}=e^{\alpha\, l(a+bx)}$$
$$[C_1 e^{\beta i\, l(a+bx)}+C_2 e^{-\beta i\, l(a+bx)}]=(a+bx)^\alpha[(C_1+C_2)\cos\{\beta\, l(a+bx)\}$$
$$+i(C_1-C_2)\sin\{\beta\, l(a+bx)\},$$

so dass also in diesem Falle an die Stelle von $C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}$ tritt:

$$(a+bx)^\alpha\{C_1\cos[\beta\, l(a+bx)]+C_2\sin[\beta\, l(a+bx)]\},$$

u. s. w. bei mehreren imaginären Wurzeln.

III. Die Wurzeln der Gleichung (l) sind wohl reell, aber nicht ungleich. Sey zuerst wieder $r_2=r_1+\varepsilon$, so ist

$$C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2(a+bx)^\varepsilon]=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2 e^{\varepsilon\, l(a+bx)}]$$
$$=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2+C_2\varepsilon\, l(a+ax)+\frac{C_2\varepsilon^2}{2}l(a+bx)^2+\dots],$$

woraus wie in §. 108 folgt, dass jetzt die Summe $C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}$ zu ersetzen ist durch

$$(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2\, l(a+bx)].$$

Ist allgemein $r_1=r_2=\dots=r_m$, so ist $C_1(a+bx)^{r_1}+\dots+C_m(a+bx)^{r_m}$ zu ersetzen durch

$$(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2\, l(a+bx)+C_3\{l(a+bx)\}^2+\dots+C_m\{l(a+bx)\}^{m-1}].$$

IV. Sind endlich gleiche imaginäre Wurzeln in (l), kommt also etwa die Wurzel $\alpha+\beta i$ m mal, also auch $\alpha-\beta i$ m mal vor, so hat man die betreffenden Glieder in (m) zu ersetzen durch

$$(a+bx)^\alpha[C_1+C_2\, l(a+bx)+\dots+C_m\{l(a+bx)\}^{m-1}]\cos[\beta\, l(a+bx)]$$
$$+(a+bx)^\alpha[C'_1+C'_2\, l(a+bx)+\dots+C'_m\{l(a+bx)\}^{m-1}]\sin[\beta\, l(a+bx)]. \; *$$

---

*. Setzt man in der Gleichung (K) $l(a+bx)=u$, $a+bx=e^u$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=be^{-u}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=b^2e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ u. s. w., so dass alsdann die Gleichung genau die Form der Gleichung (f) des §. 108 erhält. Man braucht also diesen zweiten Hauptfall im Grunde nicht besonders zu behandeln.

Beispiele.

1) $$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+ax\frac{\partial y}{\partial x}+by=0.$$

$$r(r-1)+ar+b=0,\ r^2+(a-1)r+b=0,\ r=\frac{1-a\pm\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}.$$

Ist also $(1-a)^2-4b>0$, so ist $y=C_1 x^{\frac{1-a+\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}}+C_2 x^{\frac{1-a-\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}}$;

„ „ $(1-a)^2-4b=0$, „ „ $y+[C_1+C_2 l(x)]x^{\frac{1-a}{2}}$;

„ „ $(1-a)^2-4b<0$, „ „ $y=x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_2 \cos\left\{\frac{\sqrt{4b-(1-a)^2}}{2}l(x)\right\}\right.$

$$\left.+C_2 \sin\left\{\frac{\sqrt{4b-(1-a)^2}}{2}l(x)\right\}\right].$$

2) Setzt man in der Gleichung $x^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=0$, $y^2=z$, so wird sie zu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}+2z=0$$

und gibt

$$z=C_1x^2+C_2x=y^2.$$

3) $$(2+3x)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+7(2+3x)\frac{\partial y}{\partial x}+4y=0.$$

$$9r(r-1)+21r+4=0,\ 9r^2+12r+4=0,\ r=-\frac{2}{3},-\frac{2}{3};$$

$$y=(2+3x)^{-\frac{2}{3}}[C_1+C_2 l(2+3x)].$$

4) Wir wollen annehmen, eine zylindrische Wand bestehe aus n parallelen (zylindrischen) Schichten, in derselben Weise, wie in §. 104, Nr. 10 man sich eine kugelförmige Wand gedacht. Dieselben Bezeichnungen sollen auch hier gelten, nur werden $r_0, r_1, \ldots, r_n$ die Halbmesser der Schichten, von der (gemeinschaftlichen) Zylinderaxe aus gezählt seyn. Darf man dieselben Voraussetzungen machen (d. h. dass die Temperatur in den einzelnen Punkten der Wand bloss mit der Entfernung von der Axe sich ändere), so hat man nach §. 75, X:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=0,\ r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}=0;\ v=r^m,\ m(m-1)+m=0;\ m=0,0,$$

$$v=r^0[a+b\,l(r)]=a+b\,l(r);\ \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{b}{r}.$$

Demnach

$$v_1=a_1+b_1 l(r),\ v_2=a_2+b_2 l(r);\ \ldots,\ v_n=a_n+b_n l(r).$$

$$k_1b_1=k_2b_2=\ldots=k_nb_n;\ -\frac{k_1b_1}{r_0}=\lambda_0[t_0-a_1-b_1 l(r_0)],-\frac{k_nb_n}{r_n}=\lambda_n[a_n+b_n l(r_n)-t_1],$$

$$-\frac{k_1b_1}{r_1}=\lambda_1[a_1+b_1 l(r_1)-a_2-b_2 l(r_1)],\ldots,-\frac{k_{n-1}b_{n-1}}{r_{n-1}}=\lambda_{n-1}[a_{n-1}+b_{n-1} l(r_{n-1})$$

$$-a_n-b_n l(r_{n-1})].$$

Daraus

$$-k_1 b_1 = \frac{t_0 - t_1}{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda_0 r_0} + \frac{1}{\lambda_1 r_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) l(r_1) + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}\right) l(r_2) + \ldots\ldots \\ \quad + \left(\frac{1}{k_{n-1}} - \frac{1}{k_n}\right) l(r_{n-1}) - \frac{l(r_0)}{k_1} + \frac{l(r_n)}{k_n}\end{array}\right\}}$$

$$a_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} t_0 \left[\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) l(r_1) + \ldots + \left(\frac{1}{k_{n-1}} - \frac{1}{k_n}\right) l(r_{n-1})\right] \\ \quad + \frac{t_1}{\lambda_0 r_0} - \frac{t_1 l(r_0)}{k_1} + \frac{t_0 l(r_n)}{k_n}\end{array}\right\}}{\frac{1}{\lambda_0 r_0} + \ldots\ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) l(r_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{l(r_n)}{k_n}},$$

$$a_m = a_1 + k_1 b_1 \left[\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{m-1} r_{m-1}} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) l(r_1) + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{k_{m-1}} - \frac{1}{k_m}\right) l(r_{m-1})\right], \quad b_m = \frac{b_1 k_1}{k_m}.$$

Die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit in die erste Schichte einströmende Wärmemenge ist $-\frac{k_1 b_1}{r_0}$, so dass, wenn h die Höhe des Zylinders ist, die denselben durchströmende Wärmemenge $= -2\pi k_1 b_1 h$ ist. (Vergl. Redtenbacher, die Gesetze des Lokomotivbaus, S. 37 ff.)

§. 110.

Gleichung mit den Koeffizienten a + b x. Integration durch bestimmte Integrale.

Als dritter Hauptfall sey uns endlich die Gleichung

$$(a_n + b_n x) \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots\ldots + (a_1 + b_1 x) \frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (n)$$

vorgelegt, in der $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ beliebige Konstanten sind.

I. Wir wollen nun untersuchen, ob dieser Gleichung etwa Genüge geleistet werden könne durch

$$y = \int_\alpha^\beta e^{ux} U \partial u,$$

worin U eine noch unbekannte Funktion von u, α und β aber noch zu bestimmende Konstanten (nach u und x) sind. Aus dieser Annahme folgt (§. 85):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \int_\alpha^\beta u e^{ux} U \partial u, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_\alpha^\beta u^2 e^{ux} U \partial u, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \int_\alpha^\beta u^n e^{ux} U \partial u.$$

Setzt man diese Werthe in (n) ein, und zur Abkürzung

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = \varphi, \quad b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0 = \psi,$$

so wird jene Gleichung zu

$$\int_\alpha^\beta (\varphi + x\psi) e^{xu} U \partial u = 0, \quad \int_\alpha^\beta \varphi e^{xu} U \partial u + x \int_\alpha^\beta e^{xu} \psi U \partial u = 0.$$

Aber (§. 27)

$$\int e^{ux}\psi U \partial u = \frac{e^{ux}\psi U}{x} - \frac{1}{x}\int e^{ux}\frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\partial u,$$

demnach

$$x\int_\alpha^\beta e^{ux}\psi U\partial u = (e^{ux}\psi U)_\beta - (e^{ux}\psi U)_\alpha - \int_\alpha^\beta e^{ux}\frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\partial u,$$

wo wir durch $(e^{ux}\psi U)_\beta$ den Werth von $e^{ux}\psi U$ für $u=\beta$ bezeichnen u. s. w. Also ist die Gleichung (n) auch

$$\int_\alpha^\beta\left[\varphi U - \frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\right]e^{ux}\partial u + (e^{ux}\psi U)_\beta - (e^{ux}\psi U)_\alpha = 0.$$

Sey nun

$$\varphi U - \frac{\partial(\psi U)}{\partial u} = 0,\ \varphi U = \psi\frac{\partial U}{\partial u} - U\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,\ \frac{\varphi}{\psi} - \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,$$

$$\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u - l(U) - l(\psi) = C,\ U = \frac{C}{\psi}e^{\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u},$$

so hat man bloss noch α und β so zu bestimmen, dass

$$\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_\beta - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_\alpha = 0. \qquad (p)$$

Sucht man also Werthe von u, für welche

$$e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u} = k, \qquad (p')$$

wo k von u unabhängig ist, so wird man dieselben für α und β wählen können und dadurch Werthe finden, die für y gesetzt der Gleichung (n) genügen. Sind $u_0, u_1, u_2, \ldots$ solche Werthe von u, so wäre dann (§. 107):

$$y = C_1\int_{u_0}^{u_1}\frac{e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}}{\psi}\partial u + C_2\int_{u_0}^{u_2}\frac{e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}}{\psi}\partial u + \ldots\ldots \qquad (q)$$

II. Würde man etwa nachweisen wollen, dass (q) der (n) genügt, so hätte man nur obige Rechnung zu wiederholen, und fände, dass wenn (q) in (n) eingesetzt wird, seyn müsse:

$$C_1\left[\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_1} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0}\right]$$
$$+ C_2\left[\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_2} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0}\right] + \ldots = 0.$$

Daraus folgt aber auch, dass wenn $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so gewählt sind, dass

$$\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_1} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0} = A_1 f(x),$$

$$\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_2} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0} = A_2 f(x), \ldots,$$

die Gleichung (q) immer noch besteht, wenn nur

$$A_1 C_1 + A_2 C_2 + \ldots = 0 \qquad (r)$$

gesetzt wird. Immerhin aber müssen die Gränzen $u_0, u_1, \ldots$ von u und x unabhängig seyn, da wenn sie von x abhängig wären, die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots$ nicht in der oben angegebenen Weise gebildet würden (§. 85). Hat die Gleichung (q) n Glieder, so hat man das allgemeine Integral gefunden; ist diess nicht der Fall, so hat man wenigstens einige besondere Werthe erhalten, die der Gleichung genügen, was nach §. 107, IV immerhin von bedeutendem Vortheil ist.

III. Es kann sich aber auch ereignen, dass $y = e^{ux}$, wo u eine noch zu bestimmende Konstante ist, der Gleichung (n) genügt. Man erhält nämlich,

$$(\varphi + x\psi) e^{ux} = 0,$$

und dieser Gleichung kann unabhängig von x Genüge geschehen, wenn φ und ψ einen gemeinschaftlichen Faktor $u - \alpha$ haben; alsdann ist für $u = \alpha$ sowohl $\varphi = 0$, als $\psi = 0$ und mithin genügt der vorgelegten Gleichung $e^{\alpha x}$. Ist $(u - \alpha)^m$ gar ein Faktor von φ sowohl als ψ, so genügt der (n) der Werth $x^r e^{\alpha x}$ für y, wenn $r = 0, 1, \ldots, m - 1$, was wie in §. 108 bewiesen wird. * Alsdann tritt in (q) ein

$$e^{\alpha x}[C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}].$$

IV. Legen wir uns (zur Anwendung des Vorstehenden) allgemein die Gleichung zweiter Ordnung

$$(a_2 + b_2 x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (s)$$

vor, so lässt sich diese Gleichung immer auf eine etwas einfachere zurückführen. Sey nämlich nicht $b_2 = 0$, so setze man $x = u - \frac{a_2}{b_2}$ und hat $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, so dass die vorgelegte Gleichung auch ist:

$$b_2 u \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \left(a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2} + b_1 u\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \left(a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + b_0 u\right) y = 0,$$

und wenn man noch mit b_2 dividirt, so erhält man, wie man leicht sieht, die Gleichung von der Form:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x) y = 0.$$

---

* Man würde jetzt etwa so verfahren. Ist $u - \alpha$ gemeinschaftlicher Faktor in φ und ψ, so genügt $e^{\alpha x}$ der (n); ist $u - \alpha'$ ein anderer Faktor, so genügt $e^{\alpha' x}$, also auch (§. 107) $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha' x}$. Wird aber $\alpha' = \alpha$, so ist $(u - \alpha)^2$ ein Faktor von φ und ψ, und wenn man zuerst $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ setzt, genügt der (n) der Werth $e^{\alpha x}(A + Bx + \frac{B}{2}\varepsilon x^2 + \ldots)$, woraus für $\alpha' = \alpha$, d. h. $\varepsilon = 0$ folgt, dass $e^{\alpha x}(A + Bx)$ genügt, u. s. w.

Ist dagegen $b_2 = 0$, so wird, wenn man mit a_2 dividirt, die vorgelegte Gleichung die Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

haben. Ist hier nicht $b_1 = 0$, so erhält man, wenn man $x = u - \frac{a_1}{b_1}$ setzt, eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b_1 x\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x)y = 0.$$

Es kann nun aber hier diese allgemeine Untersuchung schon der zu grossen Ausdehnung wegen nicht durchgeführt werden. Wir wollen desshalb bloss einige Beispiele besonders betrachten, die uns Gelegenheit geben werden, die wichtigsten Methoden, die hier in Anwendung kommen können, näher zu betrachten.* (Siehe auch §. 162, VII, so wie für ein allgemeineres Beispiel „Anhang" unter $\mathfrak{P}$).

§. 111.

Behandlung der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2xy = 0$, $a > 0$. (a)

I. Hier ist $n = 2$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = -b^2$; $\varphi = au$, $\psi = u^2 - b^2$; $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{au}{u^2-b^2} = \frac{1}{2}a\frac{1}{u-b} + \frac{1}{2}a\frac{1}{u+b}$; $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u$ $= l[(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}]$; $e^{xu+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u} = e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}$.

Setzt man in (p') $k=0$, so wird jener Gleichung durch $u = \pm b$ jedenfalls genügt, so dass also

$$\int_{-b}^{+b} e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u \qquad \text{(b)}$$

ein Werth ist, welcher der (a) genügt.

Da möglicher Weise $\frac{1}{2}a - 1 < 0$, also $(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}$ für $u = \pm b$ unendlich seyn kann, so fragt es sich, ob das Integral (b) immer zulässig ist. Entwickelt man e^{xu} in eine unendliche Reihe (§. 54, III), so erhält man die Integrale

$$\int_{-b}^{+b}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,\ \int_{-b}^{+b}u(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u, \ldots\ldots$$

Sind diese bestimmbar, so ist es auch (b) [§. 57, I].

Nach §. 33 ist aber

* Wir verweisen den Leser, der eine allgemeine Untersuchung wünscht, auf: „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Von Simon Spitzer." (Wien 1860), wozu 1861 die „erste Fortsetzung" erschien. Eine zusammenhängende Darstellung lieferte Schlömilch in seiner Zeitschrift, V, S. 223—345.



$$\int u^m (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u = \frac{u^{m+1}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}}{a b^2} - \frac{m+a+1}{a b^2}\int u^m (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}\partial u,$$

so dass, da $\frac{1}{2}a > 0$:

$$\int_{-b}^{+b} u^m (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u = -\frac{m+a+1}{a b^2}\int_{-b}^{+b} u^m (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}\partial u.$$

Da nun das zweite Integral angebbar ist, so ist es das erste auch. Demnach ist für $a > 0$ jedenfalls das Integral (b) zulässig.

II. Ist $\frac{1}{2}a - 1$ eine ganze (positive) Zahl, gleich n, so dass $a = 2n+2$, so ist das Integral (b) gleich $\int_{-b}^{+b} e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$ und lässt sich, wenn man etwa $(u^2-b^2)^n$ nach dem binomischen Satze entwickelt, unmittelbar bestimmen.

Setzt man voraus, es enthalte die bestimmte Grösse $\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$ keine willkürliche Konstante nach u (die also etwa x enthalten könnte), so ist $\frac{\partial}{\partial x}\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u = \int u e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u = \int u^2 e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$, wenn für die letzten Integrale dieselbe Bemerkung gemacht wird (§. 37). Setzt man nun $y = \int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$ so ergibt sich

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2n+2)\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = \int e^{xu}(u^2-b^2)^n [x u^2 + (2n+2)u - b^2 x]\partial u$$

$$= x\int e^{xu}(u^2-b^2)^{n+1}\partial u + (2n+2)\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u.$$

Aber (§. 27)

$$\int e^{xu}(u^2-b^2)^{n+1}\partial u = \frac{1}{x}e^{xu}(u^2-b^2)^{n+1} - \frac{(2n+2)}{x}\int u e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u,$$

mithin

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2n+2)\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = e^{xu}(u^2-b^2)^{n+1}.$$

Die erste Seite ist also Null für $u = +b$ und $u = -b$, so dass der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2n+2)\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0$ genügt wird durch $\left[\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u\right]_{u=b}$ und $\left[\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u\right]_{u=-b}$. Demnach also genügt man der (a) für $a = 2n+2$ durch:

$$y = C_1\left[\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u\right]_{u=b} + C_2\left[\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u\right]_{u=-b} \quad (b')$$

(Vergl. §. 162, VIII).

Die Behauptung, dass $\frac{\partial}{\partial x}\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u = \int u e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u$ wird sich leicht erweisen lassen. Denn $\int e^{xu}(u^2-b^2)^n \partial u = \int e^{xu}u^{2n}\partial u - n b^2\int e^{xu}u^{2n-2}\partial u + \dots\dots$

$\pm b^{2n}\int e^{xu}\,\partial u$; $\int u\,e^{xu}(u^2-b^2)^n\,\partial u = \int e^{xu}u^{2n+1}\,\partial u - n b^2 \int e^{xu}u^{2n-1}\,\partial u + \dots\dots\dots \pm b^{2n}\int u\,e^{xu}\,\partial u$. Ferner $\int e^{ux}u^m\,\partial u = \frac{u^m e^{ux}}{x} - \frac{m\,e^{ux}u^{m-1}}{x^2} + \dots\dots \pm \frac{m(m-1)\dots 1\,e^{ux}}{x^{m+1}}$; $\int e^{ux}u^{m+1}\,\partial u = \frac{e^{ux}u^{m+1}}{x} - \frac{(m+1)\,e^{ux}u^m}{x^2} + \dots\dots\dots\dots \pm \frac{(m+1)\,m\dots 1\,e^{ux}}{x^{m+2}}$; dann $\frac{\partial}{\partial x}\int e^{ux}u^m\,\partial u = \frac{u^{m+1}e^{ux}}{x} - \frac{u^m}{x^2}e^{ux}(1+m) + \frac{m\,e^{ux}u^{m-1}}{x^3}(2+m-1) - m(m-1)e^{ux}\frac{u^{m-2}}{x^4}(3+m-2) + \dots\dots\dots \mp m(m-1)\dots 1\,e^{ux}\frac{(m+1)}{x^{m+2}} = \frac{u^{m+1}e^{ux}}{x} - \frac{(m+1)\,e^{ux}u^m}{x^2} + \frac{(m+1)\,m\,e^{ux}u^{m-1}}{x^3} - \dots \mp \frac{(m+1)\,m\dots 1\,e^{ux}}{x^{m+2}} = \int e^{ux}u^{m+1}\,\partial u$, wodurch der Satz erwiesen ist.

III. Der Ausdruck (b) liefert nur einen Werth.* Ein zweiter könnte allerdings nach §. 107, V daraus erhalten werden und damit das allgemeine Integral; allein wenn sich (b) nicht in geschlossener Form ermitteln lässt, nützt jene Formel nicht, so dass wir einen zweiten Werth suchen müssen. Wir setzen zu dem Ende $y = x^m z$, wo m eine noch unbestimmte Konstante ist, und erhalten aus (a):

$$x^{m+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [2m\,x^m + a\,x^m]\frac{\partial z}{\partial x} + [m(m-1)\,x^{m-1} + a\,m\,x^{m-1} - b^2 x^{m+1}]\,z = 0.$$

Bestimmt man nun m aus der Gleichung $m(m-1) + am = 0$, so lässt sich diese Differentialgleichung durch x^m dividiren und liefert:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (a+2m)\frac{\partial z}{\partial x} - b^2 x z = 0. \qquad \text{(c)}$$

Aus $m(m-1) + am = 0$ folgt $m = 0$, was wir begreiflich verwerfen, und $m = 1 - a$, so dass dann

$$y = x^{1-a}z,\quad x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (2-a)\frac{\partial z}{\partial x} - b^2 x z = 0. \qquad \text{(c')}$$

Die Gleichung (c') stimmt mit (a) überein, wenn man in letzterer 2—a statt a setzt. Ist also $2 - a > 0$, d. h. $a < 2$, so genügt der (c'):

$$z = \int_{-b}^{+b} e^{ux}(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial u,$$

der (a) mithin

$$x^{1-a}\int_{-b}^{+b} e^{xu}(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial u. \qquad \text{(d)}$$

Liegt also in (a) die Konstante a zwischen 0 und 2, so ist

$$y = C_1\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial u + C_2\,x^{1-a}\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial u \qquad \text{(e)}$$

---

* Der in II behandelte Fall ist jetzt nicht maassgebend, da man wenn $\frac{1}{2}a-1$ keine ganze Zahl ist, die unbestimmten Integrale nicht ermitteln kann. Sonst würde allerdings die (b') gelten.

die allgemeine Integralgleichung. * Für $u = b\cos\varphi$ wird diese Gleichung auch:

$$y = C_1 \int_0^\pi e^{bx\cos\varphi} \sin^{a-1}\varphi\,\partial\varphi + C_2 x^{1-a} \int_0^\pi e^{bx\cos\varphi} \sin^{1-a}\varphi\,\partial\varphi. \quad (e')$$

III. Für $a = 1$ fallen beide Werthe in (e) zusammen, so dass man immerhin nur ein besonderes Integral gefunden hat. Setzt man aber $(b^2 - u^2)^{\frac{1}{2}a-1} = \xi$, $b^2 - u^2 = \zeta$, so sind die zwei Werthe in (e):

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi\,\partial u, \quad \int_{-b}^{+b} e^{ux}(x\zeta)^{1-a}\xi\,\partial u,$$

und man sieht leicht, dass der (a) auch genügt wird durch die Werthe:

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi\,\partial u, \quad \left[\int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi(x\zeta)^{1-a}\partial u - \int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi\,\partial u\right]\frac{1}{1-a},$$

von welchen der letztere auch ist

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi\,\frac{(x\zeta)^{1-a} - 1}{1-a}\,\partial u.$$

Für $a = 1$ wird die Grösse $\frac{(x\zeta)^{1-a} - 1}{1-a}$ zu $\frac{0}{0}$, und liefert nach §. 22 alsdann den Werth $l(x\zeta)$, so dass also für $a = 1$ jener Werth gleich

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}\xi\,l(x\zeta)\,\partial u = \int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\,l[x(b^2 - u^2)]\,\partial u$$

ist. Jetzt wird also das allgemeine Integral seyn:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\partial u + C_2 \int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\,l[x(b^2 - u^2)]\,\partial u. \quad (f)$$

Wie bereits in §. 108, III bemerkt, bedarf es jedoch bei dieser Beweisführung immer noch schliesslich des unmittelbaren Nachweises der Richtigkeit. Dazu gehört, dass wir zeigen, das zweite Integral in (f) genüge der (a), wenn $a = 1$. Setzt man dasselbe in $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - b^2xy$ ein, so erhält man (§. 85):

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[u^2x\,l\left\{x(b^2 - u^2)\right\} + 2u - \frac{1}{x} + u\,l\left\{x(b^2 - u^2)\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{x} - b^2x\,l\left\{x(b^2 - u^2)\right\}\right]\partial u = \int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(u^2 - b^2)x\,l\left\{x(b^2 - u^2)\right\}\right.$$
$$\left. + 2u + u\,l\left\{x(b^2 - u^2)\right\}\right]\partial u.$$

Aber es ist

* Wir haben $b^2 - u^2$ an die Stelle von $u^2 - b^2$ gesetzt, was bloss den konstanten Faktor $(-1)^{\frac{1}{2}a-1}$ oder $(-1)^{-\frac{1}{2}a}$ einführt.

$$\int e^{ux}(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} x (u^2-b^2)\, l[x(b^2-u^2)]\,\partial u = -\int e^{ux}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}} x\, l[x(b^2-u^2)]\,\partial u =$$

$$-\int (b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\, l[x(b^2-u^2)] \frac{\partial e^{ux}}{\partial u}\partial u = -(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\, l[x(b^2-u^2)]\, e^{ux}$$

$$-\int e^{ux}(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[u\, l\left\{x(b^2-u^2)\right\} + 2u\right]\partial u \ (\S.\ 27);$$

$$\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} x (u^2-b^2)\, l[x(b^2-u^2)]\,\partial u =$$

$$-\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{u\, l[x(b^2-u^2)] + 2u\right\}\partial u.$$

Hiedurch aber wird die oben stehende Grösse identisch Null, womit erwiesen ist, dass (f) der (a) genügt.

V. Wir wollen nun annehmen, a sey grösser als 2, und setzen $\frac{1}{2}a = n + \mu$, wo $\mu < 1$ und n eine positive ganze Zahl ist. Wir wollen weiter die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial z}{\partial x} - b^2 x z = 0 \qquad (g)$$

betrachten, wo $2\mu < 2$, also (g) durch eine Formel wie (e) integrirt werden kann. Wir setzen in (g): $z = e^{bx} z_1$ und erhalten:

$$x\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2(\mu + bx)\frac{\partial z_1}{\partial x} + 2b\mu z_1 = 0.$$

Diese Gleichung wollen wir n mal nach den Formeln des §. 18' differenziren, wodurch wir erhalten, wenn wir $\frac{\partial^n z_1}{\partial x^n} = z_2$ setzen $(a = 2n + 2\mu)$:

$$x\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + (n + 2\mu + 2bx)\frac{\partial z_2}{\partial x} + ab z_2 = 0.$$

Setzen wir hier $z_2 = e^{-2bx} v$, so ergibt sich:

$$x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (n + 2\mu - 2bx)\frac{\partial v}{\partial x} - 2b\mu v = 0.$$

Differenzirt man wieder n mal und setzt $\frac{\partial^n v}{\partial x^n} = v_1$, so ergibt sich:

$$x\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (a - 2bx)\frac{\partial v_1}{\partial x} - ab v_1 = 0,$$

und wenn $v_1 = e^{bx} v_2$:

$$x\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + a\frac{\partial v_2}{\partial x} - b^2 x v_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber die (a), nur ist v_2 an die Stelle von y getreten. Nun ist

$$v_2 = e^{-bx} v_1 = e^{-bx}\frac{\partial^n v}{\partial x^n} = e^{-bx}\frac{d^n}{dx^n}[e^{2bx} z_2] = e^{-bx}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{2bx}\frac{\partial^n z_1}{\partial x^n}\right]$$

$$= e^{-bx}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{2bx}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-bx} z)\right].$$

Kann man also (g) integriren, und es ist diess nach III immer möglich, so findet sich auch das Integral von (a), wenn $a = 2n + 2\mu$ nach der Formel:

$$y = e^{-bx}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{2bx}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-bx}z)\right]. \qquad \text{(h)}$$

Für $\mu = 0$ gibt die (g) einfach $z = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}$; alsdann aber führt die (h) auf $y = 0$, gibt also eigentlich keine Auflösung. Der Fall $\mu = 0$ ist aber in II bereits erledigt.

Nach (e) besteht der Werth von z aus zwei Theilen, wovon der erste gleich $\int_{-b}^{+b} e^{ux}(b^2 - u^2)^{\mu-1}\,\partial u$ ist. Wird dieser in (h) eingesetzt, so hat man

$$e^{-bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[e^{2bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{-b}^{+b} e^{x(u-b)}(b^2-u^2)^{\mu-1}\,\partial u\right]$$

$$= e^{-bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[e^{2bx}\int_{-b}^{+b} e^{x(u-b)}(u-b)^n(b^2-u^2)^{\mu-1}\,\partial u\right]$$

$$= e^{-bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{-b}^{+b} e^{x(u+b)}(u-b)^n(b^2-u^2)^{\mu-1}\,\partial u$$

$$= e^{-bx}\int_{-b}^{+b} e^{x(u+b)}(u^2-b^2)^n(b^2-u^2)^{\mu-1}\,\partial u = (-1)^n\int_{-b}^{+b} e^{xu}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial u,$$

d. h. die erste Form in (e), wie natürlich, da jene in **allen** Fällen der (a) genügt. Man braucht also in (h) bloss den zweiten Theil des Werthes von z einzusetzen.

§. 112.

Behandlung der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial y}{\partial x} + b^2xy = 0$, $a > 0$. (k)

I. Die Gleichung (k) geht aus der (a) in §. 111 hervor, wenn man in letzterer bi statt b setzt. Daraus folgt, dass für $a < 2$ der (k) genügen:

$$\int_{-bi}^{+bi} e^{xu}(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial u,\quad x^{1-a}\int_{-bi}^{+bi} e^{xu}(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial u.$$

Was diese Integrale betrifft, so setze man in denselben $u = vi$, und lasse die konstanten Faktoren weg. Dadurch ergibt sich:

$$\int_{-b}^{+b} e^{xvi}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial v,\quad x^{1-a}\int_{-b}^{+b} e^{xvi}(b^2-v^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial v.$$

Das erste ist gleich

$$\int_{-b}^{+b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,[\cos(vx) + i\sin(vx)]\,\partial v = \int_{-b}^{+b}\cos(vx)\,(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial v$$

$$= 2\int_0^b \cos(vx)\,(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial v \ (\S.\ 42,\ \text{VII});$$

eben so das zweite gleich

$$x^{1-a}\int_{-b}^{+b}\cos(xv)\,(b^2-v^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial v = 2x^{1-a}\int_0^b \cos(xv)\,(b^2-v^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial v.$$

Demnach ist das allgemeine Integral:

$$y = C_1\int_0^b \cos(xu)(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial u + C_2\,x^{1-a}\int_0^b \cos(xu)(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}a}\,\partial u,\quad a<2. \quad \text{(l)}$$

Die übrigen Fälle werden sich aus §. 111 leicht ziehen lassen. (§. 162, VIII.)

$$\text{Die Gleichung } x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2xy = 0,\ a>0. \quad \text{(m)}$$

II. Hier ist $\varphi = -au$, $\psi = u^2 - b^2$, $\frac{\varphi}{\psi} = -\frac{\frac{1}{2}a}{u+b} - \frac{\frac{1}{2}a}{u-b}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u = -\frac{1}{2}a\,l(u^2-b^2)$; $e^{xu+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u} = \frac{e^{xu}}{(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}}$. Setzt man in (p′) des §. 110 wieder $k=0$, so wird der Gleichung

$$\frac{e^{xu}}{(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}} = 0$$

nur genügt, wenn $u = \pm\infty i$, so dass also der (m) genügt wird durch

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial u.$$

In diesem Integrale setze man wieder $u = vi$ und lasse die konstanten Faktoren weg, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{vxi}}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial v = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(vx)+i\sin(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial v = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial v$$
$$= 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial v \ (\text{§. 42, VII}),$$

so dass jetzt der (m) genügt wird durch

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\,\partial v. \quad \text{(n)}$$

Ist $\frac{1}{2}a+1$ eine ganze Zahl, so lässt sich dieses Integral nach §. 87, II berechnen. Für $a=2$ z. B. fände sich $\frac{\pi}{4b^3}e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right)$, so dass dann der (m) durch $e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right)$ genügt würde.

III. Die Integration der Gleichung (m) lässt sich übrigens auf die des §. 111 zurückführen. Setzt man nämlich $y = x^{1+a}z$, so ergibt sich aus (m):

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (2+a)\frac{\partial z}{\partial x} - b^2xz = 0, \quad \text{(m′)}$$

wo nun $2+a>2$, also der Fall des §. 111, V eintritt.

Man wird leicht übersehen, dass die Bestimmung des Integrals (n) dadurch auf die Integration einer Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. (Vergl. damit §. 92, I, 4.)

Die Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial y}{\partial x} + b(a - bx)y = 0$. (p)

IV. Hier ist $\varphi = a(u + b)$, $\psi = u^2 - b^2$, $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{a}{u - b}$. Demnach genügt der (p) nach §. 110, III: e^{-bx}. Das allgemeine Integral ist dann nach §. 107, V:

$$y = C_1 e^{-bx} + C_2 e^{-bx}\int\frac{e^{2bx}}{x^a}\partial x.$$

Die Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + by = 0$, $a > 0$, $b > 0$. (q)

V. Jetzt ist $\varphi = u^2 + b$, $\psi = au$, $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{u^2 + b}{au} = \frac{u}{a} + \frac{b}{au}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u = \frac{u^2}{2a} + \frac{b}{a}l(u)$, $e^{xu + \int\frac{\varphi}{\psi}\partial u} = e^{xu + \frac{u^2}{2a}}u^{\frac{b}{a}}$. Setzt man also wieder

$$e^{xu + \frac{u^2}{2a}}u^{\frac{b}{a}} = 0,$$

so genügt man dieser Gleichung durch $u = 0$, $u = \pm\infty i$, so dass

$$y = C_1\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{xu + \frac{u^2}{2a}}u^{\frac{b}{a} - 1}\partial u + C_2\int_0^{\infty i} e^{xu + \frac{u^2}{2a}}u^{\frac{b}{a} - 1}\partial u.$$

Für $u = vi$ ist diess

$$C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)](vi)^{\frac{b}{a} - 1} i\,\partial v$$

$$+ C_2\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)](iv)^{\frac{b}{a} - 1} i\,\partial v,$$

oder wenn man $i^{\frac{b}{a}}$ mit den Konstanten zusammenzieht:

$$C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)]v^{\frac{b}{a} - 1}\partial v$$

$$+ C_2\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)]v^{\frac{b}{a} - 1}\partial v$$

$$= C_1\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)]v^{\frac{b}{a} - 1}\partial v$$

$$+ C_1\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)]v^{\frac{b}{a} - 1}\partial v$$

$$+ C_2\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}[\cos(vx) + i\sin(vx)]v^{\frac{b}{a} - 1}\partial v$$

$$= (C_1 + C_2)\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2a}}v^{\frac{b}{a} - 1}[\cos(vx) + i\sin(vx)]\partial v$$

$$+ C_1 (-1)^{\frac{b}{a}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2a}} [\cos(vx) - i \sin(vx)]\, v^{\frac{b}{a}-1}\, \partial v$$

$$= [C_1 + C_2 + (-1)^{\frac{b}{a}} C_1] \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2a}} v^{\frac{b}{a}-1} \cos(vx)\, \partial v$$

$$+ [C_1 + C_2 - (-1)^{\frac{b}{a}} C_1]\, i \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2a}} v^{\frac{b}{a}-1} \sin(vx)\, \partial v.$$

Daraus folgt leicht, dass der Gleichung (q) genügt wird durch

$$y = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2a}} v^{\frac{b}{a}-1} \cos(vx)\, \partial v + C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2a}} v^{\frac{b}{a}-1} \sin(vx)\, \partial v. \quad \text{(r)}$$

Ist $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl; so gehören diese Integrale zu §. 86, IV und §. 92, I, 4.

§. 113.

Zurückführung auf die Form des §. 110.

Auf die in §§. 110—112 behandelte Form lässt sich die Gleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x^m)\, x \frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m})\, y = 0 \qquad \text{(a)}$$

zurückführen. Man setze nämlich $x^m = u$, $y = u^n z$, wo n eine noch unbestimmte Konstante ist. Alsdann hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{d(u^n z)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(u^n \frac{\partial z}{\partial u} + n u^{n-1} z\right) m x^{m-1}, \quad x \frac{\partial y}{\partial x} = m u \left(u^n \frac{\partial z}{\partial u} + n u^{n-1} z\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{du} [m x^{m-1} (u^n \frac{\partial z}{\partial u} + n u^{n-1} z)] \frac{\partial u}{\partial x} = m(m-1) x^{m-2} (u^n \frac{\partial z}{\partial u} + n u^{n-1} z)$$

$$+ m x^{m-1} [u^n \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 n u^{n-1} \frac{\partial z}{\partial u} + n(n-1) u^{n-2} z]\, m x^{m-1},$$

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)\, u\, (u^n \frac{\partial z}{\partial u} + n u^{n-1} z) + m^2 u^2 [u^n \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 n u^{n-1} \frac{\partial z}{\partial u} + n(n-1) u^{n-2} z],$$

so dass, wenn man diese Werthe in (a) einsetzt:

$$m^2 u^{n+2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2 n m^2 u^{n+1} + m(m-1) u^{n+1} + a_1 m u^{n+1} + b_1 m u^{n+2}] \frac{\partial z}{\partial u}$$
$$+ [n m (m-1) u^n + m^2 n (n-1) u^n + a_1 m n u^n + b_1 m n u^{n+1} + a_0 u^n$$
$$+ b_0 u^{n+1} + c_0 u^{n+2}]\, z = 0,$$

und wenn man n so bestimmt, dass,

$$n m (m-1) + m^2 n (n-1) + a_1 m n + a_0 = 0, \qquad \text{(b)}$$

so wird diese Gleichung, die man alsdann durch u^{n+1} dividiren kann:

$$m^2 u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2 n m^2 + m(m-1) + a_1 m + b_1 m u] \frac{\partial z}{\partial u} + (b_1 m n + b_0 + c_0 u)\, z = 0 \quad \text{(c)}$$

und gehört unmittelbar zu der in §. 110, IV betrachteten Form. Die Gleichung (b) liefert

$$n = \frac{1-a_1}{2m} \pm \sqrt{-\frac{a_0}{m^2} + \left(\frac{a_1-1}{2m}\right)^2},$$

von welchen zwei Werthen jeder gewählt werden kann.

1) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 x^r y = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 x^{r+2} y = 0.$$

Hier ist $a_1 = b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = \pm a^2$, $c_0 = 0$, $m = r+2$, also $u = x^{r+2}$; die (b) ist $n(r+2)(r+1) + (r+2)^2 n(n-1) = 0$, der genügt wird durch $n = 0$, so dass $z = y$. Die (c) ist jetzt

$$(r+2)^2 u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (r+2)(r+1)\frac{\partial z}{\partial u} \pm a^2 z = 0, \quad u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{r+1}{r+2}\frac{\partial z}{\partial u} \pm \frac{a^2}{(r+2)^2} z = 0$$

und gehört zu §. 111 und §. 112. Ist diese Gleichung zwischen z und u integrirt, so setzt man $u = x^{r+2}$, $z = y$.

Der Fall $r = -2$ ist aber hier ausgeschlossen; alsdann hat man $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 y = 0$, welche Gleichung zu §. 109 gehört, wo sie in Nr. 1 bereits integrirt ist.

2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left[a^2 - \frac{r(r+1)}{x^2}\right] y = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial y}{\partial x} + [a^2 x^2 - r(r+1)] y = 0,$$

wo r eine positive ganze Zahl. $a_1 = 2$, $b_1 = 0$, $a_0 = -r(r+1)$, $b_0 = 0$, $c_0 = a^2$, $m = 1$, mithin die (b):

$$n(n-1) + 2n - r(r+1) = 0, \quad n = r; \quad x = u, \quad y = u^r z;$$

also die (c):

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(r+1)\frac{\partial z}{\partial x} + a^2 x z = 0,$$

welcher Gleichung nun (§. 112, I) das Integral

$$z = \int_0^a \cos(ux)(a^2 - u^2)^r \partial u$$

genügt. (Vergl. §. 162, VIII.) Setzt man $u = a \sin\varphi$, so erhält man:

$$z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax \sin\varphi) \cos^{2r+1}\varphi \, \partial\varphi$$

so dass der vorgelegten genügt:

$$y = x^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax \sin\varphi) \cos^{2r+1}\varphi \, \partial\varphi$$

3) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + b x^r y = 0; \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a x \frac{\partial y}{\partial x} + b x^{r+2} y = 0.$$

$a_1 = a$, $b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = b$, $m = \frac{r+2}{2}$; $u = x^{\frac{r+2}{2}}$, $n = 0$, $y = z$:

$$\left(\frac{r+2}{2}\right)^2 u \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \left[\frac{r(r+2)}{4} + a\frac{r+2}{2}\right]\frac{\partial y}{\partial u} + b u y = 0,$$

$$u \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{r+2a}{r+2}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{4b}{(r+2)^2} u y = 0,$$

welche Gleichung zu §. 111 gehört. Für $r = -2$ gehört sie zu §. 109. (§. 162, IX.)

§. 114.

Differentialgleichungen, denen gegebene bestimmte Integrale genügen.

Die seither mittelst bestimmter Integrale durchgeführte Integration von Differentialgleichungen hat den mittelbaren Weg eingehalten. Es ist aber leicht, auch den unmittelbaren einzuschlagen, d. h. eine Differentialgleichung zu bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt, wie diess namentlich schon Euler gethan, dem im Wesentlichen also der Grundgedanke obiger Methode zukommt. Wir wollen diess an Beispielen erläutern.

I. Sey

$$y=\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^n \partial u,$$

wo ξ eine beliebige Funktion von x ist, während α und β Konstanten nach x und u sind, so hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=n\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-1}\frac{\partial \xi}{\partial x}\partial u,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=n\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\partial u$$
$$+n(n-1)\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\partial u.$$

Sind L, M, N noch zu bestimmende Funktionen von x, so ist hieraus:

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-2}\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right.$$
$$\left.+Mn(u+\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x}+N(u+\xi)^2\right]\partial u.$$

Gesetzt nun es werden L, M, N so bestimmt, dass das unbestimmt genommene Integral der zweiten Seite $=R(u+\xi)^{n-1}$, wo R eine noch zu bestimmende Funktion von u ist, so muss seyn

$$U(u+\xi)^{n-2}\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\ldots+N(u+\xi)^2\right]=\frac{\partial R}{\partial u}(u+\xi)^{n-1}+(n-1)R(u+\xi)^{n-2},$$

$$U\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Mn(u+\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x}+N(u+\xi)^2\right]=\frac{\partial R}{\partial u}(u+\xi)$$
$$+(n-1)R.$$

Sind A, B, C, a, b, c beliebige Konstanten, so wollen wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}&N=A+a\xi,\ 2N\xi+nM\frac{\partial \xi}{\partial x}+nL\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=B+b\xi,\\&N\xi^2+nM\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+nL\xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=C+c\xi,\end{aligned}\right\}\ (a)$$

wodurch obige Gleichung zu

$$U[(A+a\xi)u^2+(B+b\xi)u+C+c\xi]=u\frac{\partial R}{\partial u}+\xi\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R$$

wird, wo nun U und R so bestimmt werden sollen, dass

$$U(c+bu+au^2)=\frac{\partial R}{\partial u},\ U(C+Bu+Au^2=u\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R.$$

Alsdann ist obige Gleichung identisch und man hat:

$$\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}=\frac{u\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R}{\frac{\partial R}{\partial u}},\ (n-1)\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial u}}=\frac{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C}{au^2+bu+c},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{(n-1)(au^2+bu+c)}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},\\
&l(R)=(n-1)\int\frac{(au^2+bu+c)\,\partial u}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},\\
&U=\frac{1}{au^2+bu+c}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{(n-1)R}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},
\end{aligned}\right\}\quad (b)$$

während

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=[R(u+\xi)^{n-1}]_{u=\beta}-[R(u+\xi)^{n-1}]_{u=\alpha}.$$

Aus den Gleichungen (a) folgt:

$$N=A+a\xi,\ L=\frac{C+(c-B)\xi+(A-b)\xi^2+a\xi^3}{n(n-1)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2},\ M=\frac{B+b\xi-2N\xi-nL\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{n\frac{\partial\xi}{\partial x}};\quad (c)$$

ist man also im Stande, α und β unabhängig von x zu bestimmen, so dass

$$[R(u+\xi)^{n-1}]_{u=\alpha}=[R(u+\xi)^{n-1}]_{u=\beta},$$

so genügt der Werth

$$y=\int_\alpha^\beta\frac{R(u+\xi)^n\,\partial u}{au^3+(b-A)u^2+(c-B)u-C}$$

der Gleichung

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0,\quad (d)$$

wenn L, M, N durch (c), R durch (b) gegeben ist und A, B, C, a, b, c, n beliebige Konstanten sind.

II. Man setze hier etwa $\xi=x$, so ist $N=A+ax$, $L=\frac{C+(c-B)x+(A-b)x^2+ax^3}{n(n-1)}$, $M=\frac{B+(b-2A)x-2ax^2}{n}$, so dass also der Gleichung

$$\frac{C+(c-B)x+(A-b)x^2+ax^3}{n(n-1)}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{B+(b-2A)x-2ax^2}{n}\frac{\partial y}{\partial x}+(A+ax)y=0\quad (e)$$

genügt wird durch

$$y=\int_\alpha^\beta\frac{R(u+x)^n\,\partial u}{au^3+(b-A)u^2+(c-B)u-C},$$

wo

$$l(R)=(n-1)\int\frac{(au^2+bu+c)\,\partial u}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},$$

$$[R(u+x)^{n-1}]_{u=\alpha}=[R(u+x)^{n-1}]_{u=\beta}.$$

Man setze nun spezieller noch in (e): $a=0$, $\frac{C}{n(n-1)}=a_2$, $\frac{c-B}{n(n-1)}=b_2$, $\frac{A-b}{n(n-1)}=c_2$, $\frac{B}{n}=a_1$, $\frac{b-2A}{n}=b_1$, $A=a_0$, so ist $C=n(n-1)a_2$, $A=a_0$, $b=nb_1+2a_0$, $B=na_1$, $c=n(n-1)b_2+na_1$, so dass wegen $A-b=n(n-1)c_2$ auch noch

$$n(n-1)c_2+nb_1+a_0=0$$

seyn muss. Bestimmt man hieraus n, so sind a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 ganz beliebige Grössen, und man kann also sagen, dass der Gleichung

$$(a_2+b_2 x+c_2 x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a_1+b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x}+a_0 y=0 \qquad \text{(f)}$$

genügt wird durch

$$y=\int_\alpha^\beta \frac{R(u+x)^n \partial u}{c_2 u^2-b_2 u+a_2},$$

wenn

$$l(R)=\frac{1}{n}\int\frac{(nb_1+2a_0)u+n(n-1)b_2+na_1}{c_2 u^2-b_2 u+a_2}\partial u,\ n(n-1)c_2+nb_1+a_0=0,$$
$$[R(u+x)^{n-1}]_{u=\alpha}=[R(u+x)^{n-1}]_{u=\beta},$$

wo wir die konstanten Faktoren von y gleich weggelassen haben. *

Die Grösse n darf nicht Null seyn, wenn a_0 es nicht ist, da sonst R nicht bestimmbar wäre. So lange aber a_0 von Null verschieden, ist es auch n. Für $c_2=b_1=0$ ist n nicht bestimmbar: alsdann gehört aber auch (f) nicht hieher, sondern zu §. 110.

III. Auf die Gleichung (f) kommt die folgende Gleichung zurück:

$$(x-1)x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(ax+b)x\frac{\partial y}{\partial x}+(cx+d)y=0. \qquad \text{(g)}$$

---

* Für den Fall, dass n eine positive ganze Zahl ist, wird offenbar y nach Potenzen von x entwickeln lassen, so dass man setzen kann:

$$y=A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\dots+A_1 x+A_0,$$

wo $A_n,\dots,A_0$ bestimmte Konstanten sind. Die Werthe derselben wird man erhalten, wenn man obigen Werth von y in (f) einsetzt, und dann der Gleichung identisch zu genügen sucht, d. h. die Coeffizienten der einzelnen Potenzen von x Null setzt. Wenigstens einer der Coeffizienten A bleibt willkürlich

Ist $a_2+b_2 x+c_2 x^2$ ein vollständiges Quadrat$=c_2(x+\alpha)^2$, so erhält man für $x+\alpha=\frac{1}{u}$, $y=u^r z$, wenn $c_2 r^2+(c_2-b_1)r+a_0=0$:

$$c_2 u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[2(r+1)c_2-b_1-(a_1-b_1\alpha)u]\frac{\partial z}{\partial u}-r(a_1-b_1\alpha)z=0,$$

welche Gleichung zu §. 110 gehört.

Den Fall, dass n als negative ganze Zahl aus $n(n-1)c_2+nb_1+a_0=0$ erhalten wird, behandeln wir im „Anhang", unter D, II. Es bliebe somit nur noch der Fall besonders zu betrachten, da $a_2+b_2 x+c_2 x^2$ (also auch $a_2-b_2 u+c_2 u^2$) kein vollständiges Quadrat ist. Denselben behandelt Spitzer in der „Fortsetzung", von welcher in der Note zu §. 110, IV die Rede war.

Ein allgemeines Beispiel findet sich in „Anhang" unter A.

Denn setzt man $y = x^n z$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1} z + x^n \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1) x^{n-2} z + 2n x^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} + x^n \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, so erhält man nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors x^n:

$$x^2(x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [2nx(x-1) + (ax+b)x]\frac{\partial z}{\partial x} + [n(n-1)(x-1) + (ax+b)n + cx + d] z = 0,$$

so dass, wenn man n aus der Gleichung

$$n(n-1) - nb - d = 0$$

bestimmt, man die ganze Gleichung durch x dividiren kann und erhält:

$$x(x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [(2n+a)x + b - 2n]\frac{\partial z}{\partial x} + [n(n-1) + an + c] y = 0,$$

welche Gleichung unmittelbar zu (f) gehört. Die Bestimmung von n ist immer möglich. Die Gleichung

$$(x-h)x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (ax+b)x\frac{\partial y}{\partial x} + (cx+d) y = 0 \qquad (g')$$

kommt auf (g) zurück, wenn man $x = hu$ setzt.

IV. Ferner reduzirt sich die Gleichung

$$(x-h)^2 x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (ax+b)(x-h)\frac{\partial y}{\partial x} + (cx+d) y = 0 \qquad (h)$$

auf (g), wenn man $x = h(1-u)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ setzt, wodurch erhalten wird:

$$hu^2(1-u)\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + [ah(1-u) + b] u\frac{\partial y}{\partial u} + [ch(1-u) + d] y = 0,$$

$$(u-1)u^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \left[au - \left(a + \frac{b}{h}\right)\right] u\frac{\partial y}{\partial u} + [cu - \frac{d}{h} - c] y = 0.$$

V. Endlich kann die Gleichung

$$(x-h)^2 x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (ax+b)(x-h)x\frac{\partial y}{\partial x} + (cx^2+dx+f) y = 0 \qquad (i)$$

auf die Form von (h) zurückgeführt werden. Man setze nämlich $y = x^n z$, so erhält man, nach Weglassung von x^n:

$$(x-h)^2 x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [2nx(x-h)^2 + (ax+b)(x-h)x]\frac{\partial z}{\partial x} + [n(n-1)(x-h)^2 + (ax+b)(x-h)n + cx^2 + dx + f] z = 0,$$

so dass, wenn man n aus der Gleichung

$$n(n-1)h^2 - bhn + f = 0$$

bestimmt, man durch x dividiren kann und sofort die Form (h) erhält.

Für $h = 0$ lässt sich n hieraus nicht bestimmen. Alsdann setze man $x = \frac{1}{u}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -u^2\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2u^3\frac{\partial y}{\partial u} + u^4\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, und erhält:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\left[\frac{2}{u}-\left(\frac{a}{u}+b\right)\right]\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{c}{u^2}+\frac{d}{u}+f\right)y=0,$$

d. h.

$$u^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+[2-a-bu]u\frac{\partial y}{\partial u}+(c+du+fu^2)y=0,$$

welche Gleichung zu §. 113 gehört.

§. 115.

Fortsetzung. Integral von der Form $\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi} \partial u$.

I. Sey

$$y=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi} \partial u,$$

wo ξ eine bekannte Funktion von x, U eine noch unbekannte Funktion von u ist, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi} nu\frac{\partial \xi}{\partial x}\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi}\left[n^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+nu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right]\partial u,$$

also

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi}\left[Ln^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Lnu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mnu\frac{\partial \xi}{\partial x}+N\right]\partial u,$$

so dass, wenn das unbestimmte Integral der zweiten Seite $= R e^{nu\xi}$ setzt:

$$U\left[Ln^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Lnu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mnu\frac{\partial \xi}{\partial x}+N\right]=\frac{\partial R}{\partial u}+n\xi R$$

seyn muss. Ist also

$$Ln^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2=A+a\xi,\ Ln\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mn\frac{\partial \xi}{\partial x}=B+b\xi,\ N=C+c\xi,$$

so ist

$$U[(A+a\xi)u^2+(B+b\xi)u+C+c\xi]=\frac{\partial R}{\partial u}+n\xi R,$$

und also

$$U(Au^2+Bu+C)=\frac{\partial R}{\partial u},\ U(au^2+bu+c)=nR,$$

woraus

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{n(Au^2+Bu+C)}{au^2+bu+c},\ l(R)=n\int\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}\partial u,$$

und dann

$$U=\frac{nR}{au^2+bu+c}.$$

Bestimmt man dann α und β so, dass

$$(R e^{nu\xi})_\beta=(R e^{nu\xi})_\alpha,$$

so ist das bestimmte Integral Null, und man hat somit den Satz:

Der Gleichung

$$L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial y}{\partial x} + N y = 0$$

genügt

$$y = \int_\alpha^\beta \frac{R e^{nu\xi}}{au^2 + bu + c} \partial u,$$

wenn

$$L = \frac{A + a\xi}{n^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2},\ M = \frac{B + b\xi - nL \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{n \frac{\partial \xi}{\partial x}},\ N = C + c\xi,\ l(R) = n \int \frac{Au^2 + Bu + C}{au^2 + bu + c} \partial u.$$

II. Setzt man hier $\xi = x$, $n = 1$, so gelangt man auf §. 110. Setzt man $\xi = x^2$, so ist

$$L = \frac{A + ax^2}{4n^2x^2},\ M = \frac{-A + (2nB - a)x^2 + 2nbx^4}{4n^2x^3},\ N = C + cx^2.$$

Ist hier $A = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $a = 1$, also

$$L = 1,\ M = \frac{B - 1 + bx^2}{x},\ N = C + cx^2,$$

und setzt man $B - 1 = a_1$, $b = b_1$, $C = a_2$, $c = b_2$, so folgt hieraus, dass der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a_1 + b_1 x^2}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + (a_2 + b_2 x^2) y = 0$$

genügt wird durch

$$y = \int_\alpha^\beta \frac{R e^{\frac{1}{2}ux^2} \partial u}{u^2 + b_1 u + b_2},\ l(R) = \frac{1}{2} \int \frac{(a_1 + 1)u + a_2}{u^2 + b_1 u + b_2} \partial u,\ (R e^{\frac{1}{2}ux^2})_\beta = (R e^{\frac{1}{2}ux^2})_\alpha.$$

III. Setzt man eben so $\xi = \frac{1}{x}$, so ist $L = \frac{(Ax + a)x^3}{n^2}$, $M = -\frac{bx}{n} + \frac{2a - nB}{n^2} x^2 + \frac{2Ax^3}{n^2}$, $N = \frac{Cx + c}{x}$, und wenn etwa $A = 0$, $n = 1$, $a = 1$, $b = -a_1$, $2 - B = b_1$, $C = b_2$, $c = a_2$, so hat man:

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a_1 + b_1 x}{x^2} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a_2 + b_2 x}{x^4} y = 0$$

genügt

$$y = \int_\alpha^\beta \frac{R e^{\frac{u}{x}} \partial u}{u^2 - a_1 u + a_2},\ l(R) = \int \frac{(2 - b_1)u + b_2}{u^2 - a_1 u + a_2} \partial u,\ (R e^{\frac{u}{x}})_\beta = (R e^{\frac{u}{x}})_\alpha.$$

(Vergl. auch §. 114, (i) für $h = 0$.)

Integral von der Form $\zeta \int_\alpha^\beta e^{u\xi} U \partial u$.

IV. Sey

$$y = \zeta \int_\alpha^\beta e^{u\xi} U \partial u,$$

wo ζ, ξ bekannte Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}+u\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2u\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+u^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+u\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right]\partial u,$$

also $L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=$

$$\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2Lu\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+Lu^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+Lu\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Mu\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}+N\zeta\right]\partial u,$$

und wenn man das unbestimmte Integral $=e^{u\xi}R$ setzt:

$$U\left[L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2Lu\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Lu^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+Lu\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Mu\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}+N\zeta\right]=\frac{\partial R}{\partial u}+\xi R,$$

so dass, wenn

$$\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 L=A+a\xi,\ 2L\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+L\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}=B+b\xi,\ L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+N\zeta=C+c\xi,$$

und

$$U[Au^2+Bu+C]=\frac{\partial R}{\partial u},\ U[au^2+bu+c]=R,$$

man hat

$$l(R)=\int\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}\partial u,\ U=\frac{R}{au^2+bu+c},$$

und wenn dann α und β so bestimmt werden, dass die Grösse $e^{u\xi}R$ für $u=\alpha$ und $u=\beta$ denselben Werth gibt, so genügt $y=\zeta\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\,\partial u$ der Gleichung $L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0$, wo

$$L=\frac{A+a\xi}{\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2},\ M=\frac{B+b\xi-L\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)}{\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}},\ N=\frac{C+c\xi-\left(L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\zeta},$$

V. Für $\xi=x$ ist

$$L=\frac{A+ax}{\zeta},\ M=\frac{(B+bx)\zeta-2(A+ax)\frac{\partial\zeta}{\partial x}}{\zeta^2},$$

$$N=\frac{(C+cx)\zeta^2-(B+bx)\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}+2(A+ax)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-(A+ax)\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}}{\zeta^3},$$

so dass also der Gleichung

$$(A+ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{(B+bx)\zeta-2(A+ax)\frac{\partial\zeta}{\partial x}}{\zeta}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+\frac{(C+cx)\zeta^2-(B+bx)\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}+2(A+ax)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-(A+ax)\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}}{\zeta^2}y=0$$

genügt wird durch $y=\zeta\int_\alpha^\beta e^{ux}U\partial u$. Für $\zeta=e^x$ kommt man auf die Form des §. 110; für $\zeta=x$ hat man

$$(A+ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{-2A+(B-2a)x+bx^2}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{2A-(B-2a)x+(C-b)x^2+cx^3}{x^2}y = 0.$$

VI. Setzt man dagegen $\zeta = e^{mx^2}$, so ist

$$L = (A+ax)e^{-mx^2},\ M = \{B + (b-4mA)x - 4max^2\}e^{-mx^2},\ N = \{C - 2mA + (c-2mB-2am)x + (4Am^2 - 2mb)x^2 + 4am^2x^3\}e^{-mx^2};$$

also wenn etwa $a=0$, $A=1$, $B=a_1$, $b-4m=b_1$; $C-2m=a_0$, $c-2ma_1=b_0$, $4m^2-2mb=c_0$, wo also m derart bestimmt werden muss, dass

$$4m^2 + 2mb_1 + c_0 = 0,$$

so wird die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)y = 0$$

integrirt werden durch *

$$y = e^{mx^2}\int_\alpha^\beta \frac{e^{ux}R\,\partial u}{(b_1+4m)u + 2ma_1 + b_0},\quad l(R) = \int \frac{u^2 + a_1 u + 2m + a_0}{(b_1+4m)u + 2ma_1 + b_0}\partial u,$$
$$(e^{ux}R)_\beta = (e^{ux}R)_\alpha.$$

---

* Diese Gleichung kann übrigens durch Umformung leicht auf eine andere zurückgeführt werden. Setzt man $y = e^{\alpha x^2 + \beta x}z$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \left[(2\alpha x + \beta)z + \frac{\partial z}{\partial x}\right]e^{\alpha x^2+\beta x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[(4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 + 2\alpha)z + 2(2\alpha x + \beta)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]e^{\alpha x^2+\beta x}$, so dass dieselbe liefert:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [4\alpha x + 2\beta + a_1 + b_1 x]\frac{\partial z}{\partial x} + [4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 + 2\alpha$$
$$+ 2a_1\alpha x + a_1\beta + 2\alpha b_1 x^2 + b_1\beta x + a_0 + b_0 x + c_0 x^2]z = 0.$$

Man bestimme nun α, β aus

$$4\alpha^2 + 2\alpha b_1 + c_0 = 0,\ 4\alpha\beta + 2a_1\alpha + b_0 + b_1\beta = 0,$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + [2\beta + a_1 + (4\alpha + b_1)x]\frac{\partial z}{\partial x} + (\beta^2 + 2\alpha + a_1\beta + a_0)z = 0,$$

welche Gleichung zu §. 110 gehört.

Man findet $\alpha = -\frac{1}{4}b_1 \pm \frac{1}{4}\sqrt{b_1^2 - 4c_0}$; ist $b_1^2 = 4c_0$, so ist $\alpha = -\frac{1}{4}b_1$, so dass die zweite obiger Gleichungen kein β enthält, und mit der ersten im Allgemeinen nicht zugleich bestehen hann.

Setzt man aber jetzt $y = e^{\alpha x^2}z$, und $4\alpha^2 + 2\alpha b_1 + c_0 = 0$, so wird die vorgelegte Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a_1\frac{\partial z}{\partial x} + [(b_0 - \frac{1}{2}a_1 b_1)x + (a_0 - \frac{1}{2}b_1)]z = 0,$$

die ebenfalls zu §. 110 gehört.

VII. Als besondern Fall wollen wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (2x+1)\frac{\partial y}{\partial x} + (x^2+x-1)y = 0$$

betrachten. Verglichen mit VI ist $a_1 = -1$, $b_1 = -2$, $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$; also m zu bestimmen aus $4m^2 - 4m + 1 = 0$, $(2m-1)^2 = 0$, $m = \frac{1}{2}$. Dann $l(R) = \int \frac{u^2-u}{0} \partial u$.

Da $l(R)$ unendlich ausfällt, so wäre es möglich, dass $R = 0$ und $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$. Wirklich genügt dieser Werth auch der vorgelegten Gleichung. Nach §. 107, V findet sich dann

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2} + C_2 e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}.$$

§. 116.

Integration der linearen Differentialgleichung mit zweitem Theile.

I. Wir haben seither nur die linearen Differentialgleichungen ohne zweiten Theil (§. 107) betrachtet; die Integration dieser Gleichungen mit zweitem Theile lässt sich aber ganz leicht auf das im Seitherigen Angegebene zurückführen. Gesetzt nämlich, es sey die Gleichung

$$X_0 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X_n y = X \qquad \text{(a)}$$

vorgelegt, in welcher X_0, $X_1, \ldots, X_n$, X bekannte Funktionen von x sind, und man habe als allgemeines Integral der Gleichung

$$X_0 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X_n y = 0 \qquad \text{(b)}$$

gefunden:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad \text{(c)}$$

wo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ebenfalls bekannte Funktionen von x sind, so lässt sich hieraus immer das allgemeine Integral der Gleichung (a) finden. Denken wir uns nämlich, in der Gleichung (c) bedeuten einmal $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nicht mehr Konstanten, sondern (noch unbekannte) Funktionen von x, während $y_1, \ldots, y_n$ immer noch Funktionen von x sind, die so beschaffen sind, dass

$$\left.\begin{array}{l} X_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + X_n y_1 = 0, \\ \vdots \\ X_0 \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y_n}{\partial x} + X_n y_n = 0, \end{array}\right\} \qquad \text{(d)}$$

und versuchen, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als Funktionen von x so zu bestimmen, dass (c) auch der Gleichung (a) genüge.

Aus (c) folgt unter den jetzigen Voraussetzungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=C_1\frac{\partial y_1}{\partial x}+C_2\frac{\partial y_2}{\partial x}+\ldots+C_n\frac{\partial y_n}{\partial x}+y_1\frac{\partial C_1}{\partial x}+y_2\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+y_n\frac{\partial C_n}{\partial x},$$

und wenn wir nun $C_1, \ldots, C_n$ so bestimmen, dass

$$y_1\frac{\partial C_1}{\partial x}+y_2\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+y_n\frac{\partial C_n}{\partial x}=0, \tag{e_1}$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=C_1\frac{\partial y_1}{\partial x}+C_2\frac{\partial y_2}{\partial x}+\ldots+C_n\frac{\partial y_n}{\partial x}. \tag{f_1}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}+\ldots+C_n\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, \tag{f_2}$$

wenn wir $C_1, \ldots, C_n$ so bestimmen, dass

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial y_n}{\partial x}\frac{\partial C_n}{\partial x}=0. \tag{e_2}$$

Aus (f_2) folgt wieder

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=C_1\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}+C_2\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}+\ldots+C_n\frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3}, \tag{f_3}$$

wenn $C_1, \ldots, C_n$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}\frac{\partial C_n}{\partial x}=0 \tag{e_3}$$

genügen. Wie man so weiter gehen kann, ist klar. Man hat

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}=C_1\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}}+C_2\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}}+\ldots+C_n\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}}, \tag{f_{n-1}}$$

wenn wieder

$$\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_n}{\partial x}=0. \tag{e_{n-1}}$$

Aus (f_{n-1}) folgt endlich

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=C_1\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n}+C_2\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n}+\ldots+C_n\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n}+\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_n}{\partial x},$$

und wenn man die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wie sie diese Gleichungen geben, in (a) einsetzt, dabei aber die Gleichungen (d) beachtet, so erhält man

$$X_0\left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_n}{\partial x}\right]=X. \tag{e_n}$$

Daraus folgt nun, dass wenn man $C_1, \ldots, C_n$ als Funktionen von x durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_n \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
\vdots \\
\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_n}{\partial x} = \frac{X}{X_0}
\end{array}\right\} \quad (e)$$

bestimmt, alsdann die Gleichung (c) der (a) genügen wird. Aus (e) folgt aber immer unzweideutig

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \xi_1, \; \frac{\partial C_2}{\partial x} = \xi_2, \ldots\ldots, \; \frac{\partial C_n}{\partial x} = \xi_n, \quad (e')$$

wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (bekannte) Funktionen von x sind, während nun aus (e′) sich ergibt:

$$C_1 = \int \xi_1 \, \partial x + E_1, \; C_2 = \int \xi_2 \, \partial x + E_2, \ldots C_n = \int \xi_n \, \partial x + E_n,$$

wo $E_1, \ldots, E_n$ willkürliche Konstanten sind. Demnach wird der (a) genügt durch

$$y = y_1 \left(\int \xi_1 \, \partial x + E_1\right) + y_2 \left(\int \xi_2 \, \partial x + E_2\right) + \ldots + y_n \left(\int \xi_n \, \partial x + E_n\right), \quad (g)$$

welche Gleichung, da sie n willkürliche Konstanten enthält, das allgemeine Integral von (a) vorstellt.

II. Gesetzt aber man kenne nicht das allgemeine Integral von (b), sondern bloss n—1 besondere Werthe: $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, die der Gleichung (b) genügen, so dass also

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} \quad (h)$$

zwar wohl der (b) genügt, aber eine Konstante zu wenig hat, um das allgemeine Integral dieser Gleichung zu seyn. Lässt man wieder $C_1, \ldots, C_{n-1}$ Funktionen von x seyn, und setzt die Gleichungen $(e_1), (e_2), \ldots, (e_{n-2})$, d. h. die n—2 ersten Gleichungen von (e) fest, in denen jedoch C_n fehle, so hat man

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = C_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + C_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \ldots + C_{n-1} \frac{\partial^n y_{n-1}}{\partial x^n} + 2\left(\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_{n-1}}{\partial x^2},$$

und wenn man dann diese Werthe in (a) einsetzt, dabei die Gleichungen (d)

beachtet, so folgt, dass (h) der (a) genügen werde, wenn $C_1, \ldots C_{n-1}$ so bestimmt werden, dass:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_{n-1} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-3} y_2}{\partial x^{n-3}}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-1}}{\partial x^{n-3}}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&X_1\left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right] + 2X_0\left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots,\right.\\
&\left. + \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right] + X_0\left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^2 C_{n-1}}{\partial x^2}\right] = X.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

Aus den $n-2$ ersten Gleichungen (i) folgt

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \zeta_2 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = \zeta_3 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = \zeta_{n-1}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \qquad \text{(k)}$$

wo $\zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ bekannte Funktionen von x sind; setzt man nun diese Werthe in die letzte Gleichung (i) ein, so erhält man eine Gleichung

$$Q\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + P\frac{\partial C_1}{\partial x} = X, \qquad \text{(l)}$$

in der P und Q bekannte Funktionen von x sind. Kann man (l) allgemein mit zwei willkürlichen Konstanten integriren, so geben dann (k) die $C_2, \ldots, C_{n-1}$ mit weiteren $n-2$ willkürlichen Konstanten, und (h) gibt das allgemeine Integral von (a). Für $X = 0$ gäbe die (l):

$$\frac{\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}}{\frac{\partial C_1}{\partial x}} = -\frac{P}{Q}, \quad l\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\right) = -\int\frac{P}{Q}\partial x + E, \quad C_1 = E\int e^{-\int\frac{P}{Q}\partial x}\partial x + E',$$

wie bereits in §. 107, V gefunden. (Es ist nämlich $X_1\, y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + 2X_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + X_0\, y_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = 0$, $Q = X_0\, y_1$, $P = X_1\, y_1 + 2X_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\int\frac{P}{Q}\partial x = \int\left(\frac{X_1}{X_0} + \frac{2}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\partial x$ $= l(y_1^2) + \int\frac{X_1}{X_0}\partial x$, $e^{-\int\frac{P}{Q}\partial x} = \frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}\partial x}}{y_1^2}$).

III. Man sieht leicht, dass wenn man nur $n-2$ besondere Werthe: $y_1, \ldots, y_{n-2}$ kennen würde, die der Gleichung (b) genügen, man das allgemeine Integral von (a) erhalten würde, wenn man die Gleichungen annähme:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_{n-2} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = 0, \\
\vdots \\
\frac{\partial^{n-4} y_1}{\partial x^{n-4}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-4} y_{n-2}}{\partial x^{n-4}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = 0, \\
X_2 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + 2 X_1 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots\ldots\right. \\
\left. + \frac{\partial^{n-2} y_{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + X_1 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^2 C_{n-2}}{\partial x^2}\right] \\
+ 3 X_0 \left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_{n-2}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + 3 X_0 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots\right. \\
\left. + \frac{\partial^{n-2} y_{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_{n-2}}{\partial x^2}\right] + X_0 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^3 C_{n-2}}{\partial x^3}\right] = X,
\end{array}\right\} \quad (m)$$

woraus zunächst folgt:

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \zeta_2 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = \zeta_{n-2} \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad (n)$$

und dann

$$P \frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + Q \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + R \frac{\partial C_1}{\partial x} = X. \quad (n')$$

Ist aus (n′) C_1 mit drei Konstanten erhalten, so folgen $C_2, \ldots, C_{n-2}$ aus (n) mit weiteren $n-3$ Konstanten und

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_{n-2} y_{n-2}$$

gibt das allgemeine Integral von (a). Wie man diese Betrachtungen weiter fortsetzen kann, ist klar. Eben so, wenn $X = 0$, dass die (l), (n′)... dazu dienen werden, aus $n-1$, oder $n-2$,.. besonderen Werthen von y das allgemeine Integral von (b) zu finden. (Vergl. „Anhang" unter 𝔐, X.)

§. 117.

Beispiele zu §. 116.

Wir wollen nun vor Allem die Methode des §. 116 auf eine Reihe von Beispielen anwenden.

1) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A \frac{\partial y}{\partial x} + B y = X, \quad (d^2 y + A\, dy\, dx + B y\, dx^2 = X dx^2),$$

wenn A, B Konstanten. Hier ist (§. 108): $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$, wenn m_1, m_2 die Wurzeln von $m^2 + A m + B = 0$ sind, vorausgesetzt diese Wurzeln seyen ungleich; sind sie gleich, so ist $y_1 = e^{m x}$, $y_2 = x e^{m x}$. Also sind die (e):

$$e^{m_1 x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + e^{m_2 x} \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \quad m_1 e^{m_1 x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + m_2 e^{m_2 x} \frac{\partial C_2}{\partial x} = X;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{X e^{-m_1 x}}{m_1 - m_2}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{X e^{-m_2 x}}{m_2 - m_1}; \quad C_1 = \frac{1}{m_1 - m_2} \int X e^{-m_1 x} \partial x + E_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{m_2 - m_1} \int X e^{-m_2 x} \partial x + E_2;$$

$$y = \frac{1}{m_1 - m_2}\left[e^{m_1 x}\int X e^{-m_1 x}\partial x - e^{m_2 x}\int X e^{-m_2 x}\partial x\right] + E_1 e^{m_1 x} + E_2 e^{m_2 x}.$$

Für $m_1 = m_2$ ist

$$e^{mx}\frac{\partial C_1}{\partial x} + x e^{mx}\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\quad m e^{mx}\frac{\partial C_1}{\partial x} + (1+mx)e^{mx}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = -xXe^{-mx},\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = Xe^{-mx};\ C_1 = -\int xXe^{-mx}\partial x + E_1;\ C_2 = \int Xe^{-mx}\partial x + E_2;$$

$$y = (E_1 + E_2 x)e^{mx} - e^{mx}\int xXe^{-mx}\partial x + xe^{mx}\int Xe^{-mx}\partial x.$$

2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = \cos x.$$

$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$ (§. 108, II); also

$$\cos x\frac{\partial C_1}{\partial x} + \sin x\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ -\sin x\frac{\partial C_1}{\partial x} + \cos x\frac{\partial C_2}{\partial x} = \cos x;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = -\cos x \sin x,\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = \cos^2 x,\ C_1 = -\int \sin x \cos x\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\sin^2 x + E_1,$$

$$C_2 = \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + \tfrac{1}{2}x + E_2,$$

und

$$y = -\tfrac{1}{2}\sin^2 x\cos x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x\cos x + \tfrac{1}{2}x\sin x + E_1\cos x + E_2\sin x = \tfrac{1}{2}x\sin x + E_1\cos x + E_2\sin x.$$

3) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

$y_1 = x,\ y_2 = x\,l(x)$ (§. 107, Nr. 1, oder §. 109, Nr. 1).

$$x\frac{\partial C_1}{\partial x} + x\,l(x)\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial C_1}{\partial x} + [l(x)+1]\frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{-l(x)}{x},\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{1}{x};\ C_1 = -\frac{1}{2}[l(x)]^2 + E_1,\ C_2 = l(x) + E_2;$$

$$y = -\frac{x}{2}l^2(x) + x\,l^2(x) + E_1 x + E_2 x\,l(x) = \frac{1}{2}x\,l^2(x) + E_1 x + E_2 x\,l(x).\,*$$

4) $$x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 6x\frac{\partial y}{\partial x} - 6y = x,$$

$y_1 = x$, wie man leicht sieht; also nach (m), wenn dort $n = 3$, $y_1 = x$, $X_2 = 6x$, $X_1 = -3x^2$, $X_0 = x^3$, $X = x$:

$$6x\,x\frac{\partial C_1}{\partial x} - 6x^2\frac{\partial C_1}{\partial x} - 3x^2 x\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3x^3\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + x^3 x\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} = x,$$

$$\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} = \frac{1}{x^3},\ C_1 = \frac{1}{2}l(x) + E_1 x^2 + E_2 x + E_3;$$

$$y = \frac{1}{2}x\,l(x) + E_1 x^3 + E_2 x^2 + E_3 x. \quad \text{(§. 107 und §. 109.)}$$

5) $$x^2[l(x) - 1]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = -\frac{x}{l(x)}.$$

---

* Das Zeichen $l^2(x)$ bedeutet das Quadrat von $l(x)$, ist also zu unterscheiden von $l(x^2)$.

$y_1 = x$; also in (i) $n=2$, $X_1 = -x$, $X_0 = x^2[l(x)-1]$, $X = -\frac{x}{l(x)}$;

$$-x^2\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2x^2[l(x)-1]\frac{\partial C_1}{\partial x} + x^3[l(x)-1]\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = -\frac{x}{l(x)},$$

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2[l(x)-1]l(x)}.$$

Setzt man hier $\frac{\partial C_1}{\partial x} = \varphi$, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\varphi = -\frac{1}{x^2 l(x)[l(x)-1]},$$

also (§. 92, I):

$$\varphi = e^{-\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x}\left[C - \int\frac{e^{\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x}}{x^2 l(x)[l(x)-1]}\partial x\right].$$

Aber

$$\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x = \int\frac{2\partial x}{x} - \int\frac{\partial x}{x[l(x)-1]} = 2l(x) - l[l(x)-1] = l\frac{x^2}{l(x)-1}.$$

$$\varphi = \frac{l(x)-1}{x^2}\left[C - \int\frac{\partial x}{l(x)[l(x)-1]^2}\right].$$

Setzt man $l(x) = z$, $x = e^z$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{l(x)[l(x)-1]^2} = \int\frac{e^z\partial z}{z(z-1)^2} = \int\frac{e^z\partial z}{z} + \int\frac{e^z\partial z}{(z-1)^2} - \int\frac{e^z\partial z}{z-1} = \int\frac{e^z\partial z}{z} - \frac{e^z}{z-1}$$

$$+\int\frac{e^z\partial z}{z-1} - \int\frac{e^z\partial z}{z-1}\ (\S.\ 27) = \frac{-e^z}{z-1} + \int\frac{e^z\partial z}{z} = \frac{-x}{l(x)-1} + \int\frac{\partial x}{l(x)},$$

$$\varphi = C\frac{l(x)-1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)}.$$

$$C_1 = C\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x + l(x) - \int\frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)}\partial x + C'.$$

$$\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x = -\frac{1}{x}l(x),\ \int\frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)}\partial x = -\frac{1}{x}l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)} + \int\frac{1}{x}l(x)\frac{1}{l(x)}\partial x =$$
$$-\frac{1}{x}l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)} + l(x),$$

also

$$C_1 = -\frac{C}{x}l(x) + \frac{1}{x}l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)} + C';\quad y = -C\,l(x) + C'x + l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)}.$$

6) $$(1+x)^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + (1+x)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3(1+x)\frac{\partial y}{\partial x} - 8y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Nach §. 109 ist $A_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = -8$, $a = 1$, $b = 1$, $n = 3$, also
$r(r-1)(r-2) + r(r-1) + 3r - 8 = 0$, $r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$, $r = 2$, $\pm 2i$;
$y_1 = (1+x)^2$, $y_2 = \cos[l(1+x)^2]$, $y_3 = \sin[l(1+x)^2]$, also

$$(1+x)^2\frac{\partial C_1}{\partial x} + \cos l(1+x)^2\frac{\partial C_2}{\partial x} + \sin l(1+x)^2\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0,$$

$$(1+x)\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{\sin l(1+x)^2}{1+x}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\frac{\cos l(1+x)^2}{1+x}\frac{\partial C_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{2\cos l(1+x^2)-\sin l(1+x)^2}{(1+x)^2}\frac{\partial C_2}{\partial x}-\frac{2\sin l(1+x)^2+\cos l(1+x)^2}{(1+x)^2}\frac{\partial C_3}{\partial x}$$
$$=\frac{x}{2(1+x)^{\frac{7}{2}}};$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}=\frac{x}{8(1+x)^{\frac{7}{2}}},\ \frac{\partial C_2}{\partial x}=\frac{\sin l(1+x)^2-\cos l(1+x)^2}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}x,\ \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{\sin l(1+x)^2+\cos l(1+x)^2}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}x,$$

$$C_1=\int\frac{x\,\partial x}{8(1+x)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{8}\left[-\frac{1+x}{3}+\frac{1}{5}\right]\frac{2}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{12}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{20}\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}+E_1,$$

$$C_2=\frac{1}{8}\int\frac{\sin l(1+x)^2 x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{8}\int\frac{\cos l(1+x)^2 x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}};\ (1+x=e^z),\int\frac{\sin l(1+x)^2 x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\int\frac{\sin 2z}{e^{\frac{3}{2}z}}(e^z-1)e^z\,\partial z=\int\sin(2z)e^{\frac{1}{2}z}\,\partial z-\int\sin(2z)e^{-\frac{1}{2}z}\,\partial z=\frac{e^{\frac{1}{2}z}(\frac{1}{2}\sin 2z-2\cos 2z)}{4+\frac{1}{4}}$$

$$-\frac{e^{-\frac{1}{2}z}(-\frac{1}{2}\sin 2z-2\cos 2z)}{4+\frac{1}{4}}(\S.35)=\frac{e^{\frac{1}{2}z}(2\sin 2z-8\cos 2z)}{17}+\frac{e^{-\frac{1}{2}z}(2\sin 2z+8\cos 2z)}{17}$$

$$=\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}[2\sin l(1+x)^2-8\cos l(1+x)^2]}{17}+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}[2\sin l(1+x)^2+8\cos l(1+x)^2]}{17}.$$

Bestimmt man die andern Integrale in ähnlicher Weise, so erhält man:

$$C_2=-\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{68}[5\cos l(1+x)^2+3\sin l(1+x)^2]+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{68}[5\sin l(1+x)^2+3\cos l(1+x)^2]$$
$$+E_2,$$

$$C_3=-\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{68}[5\sin l(1+x)^2-3\cos l(1+x)^2]+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{68}[3\sin l(1+x)^2-5\cos l(1+x)^2]$$
$$+E_3.$$

Also

$$y=C_1(1+x)^2+C_2\cos l(1+x)^2+C_3\sin l(1+x)^2$$
$$=E_1(1+x)^2+E_2\cos l(1+x)^2+E_3\sin l(1+x)^2-\frac{8}{51}\sqrt{1+x}+\frac{8}{85\sqrt{1+x}}.^*$$

7) Man soll die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{4}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+x^4\frac{\partial y}{\partial x}-6x^8y=x$$

integriren. Lässt man zunächst den zweiten Theil weg, so handelt es sich um

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{4}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+x^4\frac{\partial y}{\partial x}-6x^8y=0,\ x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(x^5-4)x\frac{\partial y}{\partial x}-6x^{10}y=0,$$

---

* Hier ist $l(1+x)^2=l[(1+x)^2]$, also für $1+x>0: l(1+x)^2=2l(1+x)$.

so dass also in §. 113 $a_1 = -4$ $b_1 = 1$, $m = 5$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = -6$; $x^5 = u$, $y = u^n z$, wo n bestimmt ist aus

$$20n + 25n(n-1) - 20n = 0, \quad n = 0, \quad y = z$$

und die neue Gleichung ist

$$25u\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 5u\frac{\partial y}{\partial u} - 6uy = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{1}{5}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{6}{25}y = 0 \text{ (§. 108)}:$$

$$m^2 + \frac{1}{5}m - \frac{6}{25} = 0; \quad m = \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}; \quad y = C_1 e^{\frac{2}{5}u} + C_2 e^{-\frac{3}{5}u} = C_1 e^{\frac{2}{5}x^5} + C_2 e^{-\frac{3}{5}x^5}.$$

$$e^{\frac{2}{5}x^5}\frac{\partial C_1}{\partial x} + e^{-\frac{3}{5}x^5}\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \quad 2x^4 e^{\frac{2}{5}x^5}\frac{\partial C_1}{\partial x} - 3x^4 e^{-\frac{3}{5}x^5}\frac{\partial C_2}{\partial x} = x,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{5x^3}; \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{5x^3};$$

$$C_1 = \frac{1}{5}\int\frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{x^3}\partial x + E_1, \quad C_2 = -\frac{1}{5}\int\frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{x^3}\partial x + E_2;$$

$$y = E_1 e^{\frac{2}{5}x^5} + E_2 e^{-\frac{3}{5}x^5} + \frac{e^{\frac{2}{5}x^5}}{5}\int\frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{x^3}\partial x - \frac{e^{-\frac{3}{5}x^5}}{5}\int\frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{x^3}\partial x.$$

8) Denken wir uns, der in §. 75, VII betrachtete Stab sey bereits so lange der Einwirkung der Wärmequelle ausgesetzt, dass er in den Beharrungszustand eingetreten ist, d. h. dass sich die Temperatur seiner einzelnen Querschnitte mit der Zeit nicht mehr ändert. Da alsdann v unabhängig ist von t, so ist $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{w\gamma}{\omega k}v = 0 \quad (\text{wenn } b = 0)$$

die Gleichung der Wärmebewegung, wenn ω und k für den ganzen Stab konstant sind, und wo nun ω den (konstanten) Querschnitt des Stabes, k die innere Leitungsfähigkeit, γ das Ausstrahlungsvermögen und w den Umfang des Querschnitts bezeichnet. Aus der obigen Gleichung folgt nach §. 108:

$$v = C e^{x\sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}} + C' e^{-x\sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}} = C e^{ax} + C' e^{-ax}, \quad a = \sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}.$$

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, wollen wir annehmen, der Stab habe die Länge L und seine beiden Enden seyen immer auf den Temperaturen v_0, v_1 erhalten; alsdann muss für $x = 0$, $v = v_0$ und für $x = L$, $v = v_1$ seyn, d. h. man hat

$$v_0 = C + C', \quad v_1 = C e^{aL} + C' e^{-aL}; \quad C = \frac{v_0 e^{-aL} - v_1}{e^{-aL} - e^{aL}}, \quad C' = \frac{v_0 e^{aL} - v_1}{e^{aL} - e^{-aL}}.$$

Also ist unter diesen Voraussetzungen

$$v = \frac{(v_1 - v_0 e^{-aL})e^{ax} + (v_0 e^{aL} - v_1)e^{-ax}}{e^{aL} - e^{-aL}} = \frac{v_1(e^{ax} - e^{-ax}) + v_0(e^{a(L-x)} - e^{-a(L-x)})}{e^{aL} - e^{-aL}},$$

welche Formel die Temperatur v des Stabes in der Entfernung x vom Anfangspunkte (dem $v = v_0$ entspricht) gibt.

Wäre $v_0 = v_1$, so hätte man

$$v = v_0 \frac{e^{ax} - e^{-ax} + e^{a(L-x)} - e^{-a(L-x)}}{e^{aL} - e^{-aL}} = v_0 \frac{e^{a(L+x)} - e^{a(L-x)} + e^{a(2L-x)} - e^{ax}}{e^{2aL} - 1}$$

$$= v_0 \frac{(e^{ax} + e^{a(L-x)})(e^{aL} - 1)}{(e^{aL} + 1)(e^{aL} - 1)} = v_0 \frac{e^{ax} + e^{a(L-x)}}{e^{aL} + 1}.$$

Diess Letztere hat etwa in einem dünnen Ringe von der Länge L Statt, der nur einer Wärmequelle von der unveränderlichen Temperatur v_0 unterworfen ist.

Nehmen wir in unserem Stabe drei Schnitte an, deren Abstand je λ sey, so dass sie vom Anfang um x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ entfernt sind. Alsdann sind die Temperaturen v', v'', v''' derselben:

$$v' = Ce^{ax} + C'e^{-ax}, \; v'' = Ce^{a(x+\lambda)} + C'e^{-a(x+\lambda)}, \; v''' = Ce^{a(x+2\lambda)} + C'e^{-a(x+2\lambda)},$$

woraus folgt

$$\frac{v' + v'''}{v''} = \frac{Ce^{ax}(1 + e^{2a\lambda}) + C'e^{-ax}(1 + e^{-2a\lambda})}{Ce^{ax}e^{a\lambda} + C'e^{-ax}e^{-a\lambda}}$$

$$= \frac{Ce^{a(x+\lambda)}(e^{a\lambda} + e^{-a\lambda}) + C'e^{-a(x+\lambda)}(e^{a\lambda} + e^{-a\lambda})}{Ce^{a(x+\lambda)} + C'e^{-a(x+\lambda)}} = e^{a\lambda} + e^{-a\lambda},$$

welche Grösse von x unabhängig ist. Wo also auch der erste Querschnitt gewählt wird, die Grösse $\frac{v'+v'''}{v''}$ bleibt dieselbe, wenn λ ungeändert bleibt. Dieses merkwürdige Resultat wurde durch Versuche bestätigt. (Lamé, Cours de Physique, leçon XVI, 260.)

Ist der Stab unbegränzt, so muss die Konstante $C = 0$ seyn, da sonst die Temperatur mit x unbegränzt wachsen würde. Alsdann ist bloss

$$v = C'e^{-ax}, \; C' = v_0, \; v = v_0 e^{-ax},$$

wenn v_0 die unveränderliche Temperatur der Quelle. Sollen also zwei Stäbe von verschiedenem Stoffe u. s. w., die derselben Wärmequelle ausgesetzt sind, dieselbe Temperatur in den um x und x' abstehenden Querschnitten haben, so ist $ax = a'x'$, d. h.

$$x : x' = \sqrt{\frac{w'\gamma'}{\omega' k'}} : \sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}},$$

und wenn $w = w'$, $\omega = \omega'$:

$$x : x' = \sqrt{\frac{\gamma'}{k'}} : \sqrt{\frac{\gamma}{k}},$$

aus welcher Proportion, wie man sieht, mittelst Erfahrung das Verhältniss des Bruches $\frac{\gamma}{k}$ für den einen Stab zu dem für den andern Stab erhalten werden kann.

Wir haben bei diesem Beispiel Gelegenheit gehabt, die willkürlichen Konstanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen. Im Allgemeinen werden, wenn n willkürliche Konstanten in dem allgemeinen Integrale vorkommen, eben so viele Bedingungen gegeben seyn müssen, um dieselben zu bestimmen. Diese können nun darin bestehen, dass man für n verschiedene Werthe von x die zugehörigen Werthe von y kennt; oder dass

man etwa für denselben Werth von x die Werthe von y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ kennt, oder dass eine Mischung dieser beiden Bestimmungweisen Statt findet, u. s. w.

§. 118.

Durchgang durch Differentialgleichungen niederer Ordnung.

I. Wir haben seither meistens die Integralgleichung einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in so ferne gesucht, als wir die Gleichung zwischen x und y mit n willkürlichen Konstanten zu erhalten suchten, die der gegebenen Differentialgleichung genügt. In manchen Fällen kann man diess nicht oder zieht es vor, anders zu verfahren, indem man nämlich zunächst aus der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung eine der $n-1^{ten}$ Ordnung zu erhalten sucht, die ihr genügt und eine willkürliche Konstante mehr erhält; dann aus dieser eine der $n-2^{ten}$ Ordnung u. s. w Da die Schlussgleichung mit n willkürlichen Konstanten all' den so einzeln erhaltenen Differentialgleichungen genügt, so müssen diese letzteren durch Elimination der willkürlichen Konstanten sich aus jener bilden lassen. Um aber zu der Gleichung der $n-1^{ten}$ Ordnung zu gelangen, muss man $n-1$ willkürliche Konstanten eliminiren und nur eine noch beibehalten; welche der n diess sey, bleibt willkürlich. Daraus folgt aber wieder, dass eine jede Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung n Differentialgleichungen der $n-1^{ten}$ Ordnung als erste Integralgleichungen haben wird, jede mit einer anderen willkürlichen Konstanten. Ist man im Stande, diese n Gleichungen herzustellen, so gibt die Elimination von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ aus denselben dann die letzte (eigentliche) Integralgleichung mit n willkürlichen Konstanten. (Vergl. §. 102).

1) C sey der Mittelpunkt der Erde (Fig. 58); ein Körper, dessen Gewicht an der Oberfläche $= p$ ist, sey zu Anfang der Zeit in der Entfernung $CA = r + h$ vom Mittelpunkte, wo r der Erdhalbmesser und $BA = h$ ist; dieser Körper falle zur Erde, indem er von A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ausgehe, wo v_0 nach AC gerichtet ist. Man soll seine Bewegung untersuchen.

Fig. 58.

Am Ende der Zeit t sey der Körper in M, und $AM = x$, so ist (§. 20, VIII) die bewegende Kraft $= \frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$; allein diese Kraft ist die Anziehungskraft der Erde, die nach C gerichtet ist, und sich im Gewichte des Körpers äussert, wobei jedoch bekannt ist, dass dieselbe abnimmt nach dem Quadrat der Entfernung von C, mithin die bewegende Kraft in M (die in B gleich p ist) nur $\frac{p r^2}{(r+h-x)^2}$ ist, so dass also die Gleichung der Bewegung ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g r^2}{(r+h-x)^2}.$$

Hieraus folgt, da $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$:

$$2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{2gr^2}{(r+h-x)^2}\frac{\partial x}{\partial t},\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2gr^2\int\frac{\partial x}{(r+h-x)^2} + C = \frac{2gr^2}{r+h-x} + C.$$

Für $t=0$ ist $x=0$ und $\frac{\partial x}{\partial t} = v_0$ (§. 20, VII), also

$$v_0^2 = \frac{2gr^2}{r+h} + C;\ C = v_0^2 - \frac{2gr^2}{r+h},\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2gr^2\left[\frac{1}{r+h-x} - \frac{1}{r+h}\right] + v_0^2,$$

welche Gleichung die Geschwindigkeit in jedem Punkte des Weges bestimmt. Für B ist z. B. $x=h$ und wenn dort v_1 die Geschwindigkeit, so ist

$$v_1^2 = 2gr^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h}\right] + v_0^2 = \frac{2grh}{r+h} + v_0^2.$$

Aus obiger Gleichung folgt, wenn $\frac{-2gr^2}{r+h} + v_0^2 = a$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{2gr^2}{r+h-x} + a} = \sqrt{\frac{2gr^2 + a(r+h) - ax}{r+h-x}},\ \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\sqrt{r+h-x}}{\sqrt{b-ax}},$$

$[b = 2gr^2 + a(r+h)]$, (§. 21, I),

$$t = \int\frac{\sqrt{r+h-x}}{\sqrt{b-ax}}\partial x + C' = \int\frac{(r+h-x)\,\partial x}{\sqrt{b(r+h) - (b+ar+ah)x + ax^2}} + C'.$$

Für die Zeit des Falls von A nach B folgt hieraus

$$\int_0^h\frac{(r+h-x)\,\partial x}{\sqrt{b(r+h) - (b+ar+ah)x + ax^2}},$$

da für $t=0$ auch $x=0$ ist. Ist $v_0 = 0$, so ist $a = \frac{-2gr^2}{r+h}$, $b=0$, $a(r+h) = -2gr^2$, also diese Zeit

$$\sqrt{\frac{r+h}{2gr^2}}\int_0^h\frac{r+h-x}{\sqrt{(r+h)x - x^2}}\partial x = \sqrt{\frac{r+h}{2gr^2}}\left[(r+h)\,arc\left(sin = \sqrt{\frac{h}{r+h}}\right) + \sqrt{rh}.\right]$$

2)
$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + X = 0,$$

wenn X nur x enthält, gibt, da $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$:

$$y\frac{\partial y}{\partial x} + \int X\,\partial x + C = 0,\ \text{woraus}\ \frac{y^2}{2} + \iint X\,\partial x^2 + Cx + C' = 0.$$

3)
$$c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (a-x)\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = a - x,\ 2c\int\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 2ax - x^2 + C.$$

d. h.

$$\frac{2c\frac{\partial y}{\partial x}}{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=2ax-x^2+C\ (\S.\ 103,\ \mathrm{VI}),\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{(2ax-x^2+C)^2}{4c^2-(2ax-x^2+C)^2}.$$

II. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+Y'=0,$$

wo Y, Y' blosse Funktionen von y sind: $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=z$, also $2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ (§. 21), so hat man

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}+Yz+Y'=0,$$

welche Gleichung zwischen y und z nach §. 92, I integrirt wird. Folgt daraus $z=f(y)$, so ist dann

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=f(y),\ \frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{f(y)},\ \int\frac{\partial y}{\sqrt{f(y)}}=\pm x+C.\quad (\S.\ 91.)$$

III. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\frac{\partial y}{\partial x}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0,$$

in der X bloss x, Y bloss y enthält, wird integrirt, indem man setzt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=u\,e^{-\int X\partial x},$$

wo u eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. Daraus folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=e^{-\int X\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-Xu\right)$, also

$$e^{-\int X\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-Xu\right)+Xue^{-\int X\partial x}+Yu^2e^{-2\int X\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}+Yu^2e^{-\int X\partial x}=0,$$

oder da $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}u\,e^{-\int X\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+uY=0,\ u=Ce^{-\int Y\partial y}\ (\S.\ 91),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Ce^{-\int Y\partial y}e^{-\int X\partial x},\ e^{\int Y\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=Ce^{-\int X\partial x},$$

$$\int e^{\int Y\partial y}\partial y=C\int e^{-\int X\partial x}\partial x+C',$$

welche Gleichung das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist. (Vergl. hieher auch §. 138, IV u. V.)

§. 119.

Integration mittelst einer angenommenen Gleichung.

Gesetzt man habe die Gleichung

$$a y + b x = c,$$

so folgt daraus

$$a \frac{\partial y}{\partial x} + b = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

eine jede Differentialgleichung mithin, deren allgemeines Integral die vorgelegte seyn soll, muss $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ geben. Hat man aber

$$a y^2 + 2 b x y + c x^2 + 2 d y + 2 e x = f, \tag{a}$$

so folgt hieraus:

$$a y \frac{\partial y}{\partial x} + b x \frac{\partial y}{\partial x} + b y + c x + d \frac{\partial y}{\partial x} + e =,$$

$$a y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2 b \frac{\partial y}{\partial x} + b x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c + d \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

$$a y \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3 a \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3 b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b x \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + d \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

$$a y \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 4 a \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3 a \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + 4 b \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + b x \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + d \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,$$

$$a y \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 5 a \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 10 a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 5 b \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + b x \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + d \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0.$$

Bestimmt man aus den letzten zwei Gleichungen a und b und setzt diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$-45 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 9 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 40 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3 = 0,$$

d. h. da sicher nicht $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$:

$$-45 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 9 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 40 \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3 = 0. \tag{b}$$

Eine jede Differentialgleichung nun, deren allgemeines Integral die Form (a) haben soll, muss dieser Gleichung (b) genügen. Zieht man also aus der vorgelegten Differentialgleichung die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, um sie in (b) einzusetzen, so muss diese Gleichung erfüllt seyn, wenn (a) das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung seyn soll. Da (a) in Wahrheit fünf willkürliche Konstanten enthält (indem man die ganze Gleichung durch einen der sechs Koeffizienten dividiren kann und dann nur die fünf Brüche als wirklich verschiedene Konstanten bleiben), so ist es wohl möglich, dass sie zu viel Konstanten enthält. Allein es werden sich dann immer Beziehungen zwischen den Konstanten aufstellen lassen, so dass die überflüssigen entfernt werden können.

Man habe etwa die Gleichung

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

so folgt daraus

$$3\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0,\ 3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+y\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0,\ 10\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+5\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+y\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=0,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{3}{y^2}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-\frac{1}{y^3}\left[3+18\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+15\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4\right],\ \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=\frac{1}{y^4}\left[45\frac{\partial y}{\partial x}+150\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+105\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5\right],$$

woraus

$$-45\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+9\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}+40\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3=0,$$

so dass also der vorgelegten Gleichung durch (a) genügt wird. Allein da die gegebene Gleichung nur vom zweiten Grade ist, so müssen zwischen den fünf Konstanten noch drei Beziehungen bestehen, die man findet, wenn man aus (a) die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ zieht und in die gegebene einsetzt, welche dann erfüllt seyn muss. Aber aus (a) folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{by+cx+e}{ay+bx+d},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial y}{\partial x}+c}{ay+bx+d}=$$

$$-\frac{a[by+cx+e]^2-2b(by+cx+e)(ay+bx+d)+c(ay+bx+d)^2}{(ay+bx+d)^3},$$

so dass die gegebene Gleichung ist

$$(ay+bx+d)^3+(by+cx+e)^2(ay+bx+d)-ay(by+cx+e)^2+2by(by+cx+e)(ay+bx+d)-cy(ay+bx+d)^2=0,$$

welche Gleichung, wenn man y durch x aus (a) ersetzt, identisch seyn muss, d. h. für alle möglichen Werthe von x in Erfüllung zu gehen hat. Da diese Gleichung auch ist

$$(ay+bx+d)^2[(a-c)y+bx+d]+(by+cx+e)^2[bx+d]+2by(by+cx+e)(ay+bx+d)+0,$$

so wird ihr genügt, wenn $a=c$, $b=d=0$, und zwar was immer auch x seyn mag. Daraus folgt nun, dass das Integral der obigen Gleichung ist

$$x^2+y^2+cx+c'=0,$$

wenn c und c' die willkürlichen Konstanten sind. (Vergl. §. 118, Nr. 2.)

§. 120.

Integration von Differentialgleichungen durch Aufsteigen zu höhern Ordnungen.

I. Wie bereits in §. 101 angedeutet, kann man zuweilen Gleichungen niederer Ordnung dadurch integriren, dass man zu Gleichungen höherer

Ordnung, die man aus jenen bildet, übergeht, vorausgesetzt dass man dann die letztern integriren kann. Da man hiedurch aber zu viele Konstanten in die Rechnung erhält, so muss man durch Substitution in die gegebene Gleichung die überflüssigen Konstanten zu ermitteln suchen.

1) Man habe etwa die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}-a x\right)^2+x\left(\frac{\partial y}{\partial x}-a x\right)-\left(y-\frac{1}{2} a x^2\right)=a^2,$$

so folgt daraus durch Differenzirung:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\right)\left(2 \frac{\partial y}{\partial x}-a x\right)=0,$$

und da für $2 \frac{\partial y}{\partial x}=a x$: $y=\frac{a x^2}{4}+C$, dieser Werth aber der vorgelegten Gleichung nicht genügt, so ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a, \quad y=\frac{1}{2} a x^2+c x+c',$$

wo c und c′ Konstanten sind. Daraus folgt $\frac{\partial y}{\partial x}=a x+c$ und wenn man diese Werthe in die vorgelegte Gleichung einsetzt, so hat man

$$c^2+c x-c x-c'=a^2, \quad c'=c^2-a^2,$$

so dass also

$$y=\frac{1}{2} a x^2+c x+c^2-a^2$$

der vorgelegten Gleichung genügt, wenn c die willkürliche Konstante ist.

2) Hätte man weiter die Gleichung

$$x y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(x^2-y^2\right) \frac{\partial y}{\partial x}-x y=0,$$

so erhielte man hieraus durch Differenzirung:

$$-y\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+x \frac{\partial y}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+\left[2 x y \frac{\partial y}{\partial x}+x^2-y^2\right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

und da

$$x^2-y^2=\frac{x y-x y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial y}{\partial x}}, \quad 2 x y \frac{\partial y}{\partial x}+x^2-y^2=\frac{x y\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}{\frac{\partial y}{\partial x}},$$

so folgt hieraus, da $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ nicht $=0$:

$$-y+x \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{x y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}=0, \quad \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}=0,$$

welche Gleichung unmittelbar gibt

$$l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+l(y)-l(x)=l(c), \quad y \frac{\partial y}{\partial x}=c x, \quad y^2=c x^2+c'.$$

Setzt man diese Werthe von y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$\frac{x}{y}\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{(x^2-y^2)y}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{xy^2}{y}=0,\ c^2x^3+[(1-c)x^2-c']cx-(cx^2+c')x=0,$$
$$cc'+c'=0,\ c'=0;\ y^2=cx^2,\ y=cx.$$

3) Sey ferner gegeben:

$$2y^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x^2=0,$$

so führe man eine neue unabhängig Veränderliche z ein, gegeben durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial z}=y$, wo also $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\frac{\partial y}{\partial z}$ ist, und erhält (§. 21):

$$\frac{2y^3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}y-\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{y^3}+y^2\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}{y^2}-x^2=0,\ \text{d. h. } 2y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2-x^2=0,$$

woraus durch Differenzirung nach z:

$$y\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}-x\frac{\partial x}{\partial z}=0,\ \text{d. h. } \frac{\partial^3 y}{\partial z^3}-x=0;\ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-\frac{\partial x}{\partial z}=0,\ \text{d. h. } \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-y=0,$$

welcher Gleichung nach §. 108 genügt wird durch

$$y=C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\cos z+C_4\sin z,$$

während

$$x=\int y\,\partial z=C_1e^z-C_2e^{-z}+C_3\sin z-C_4\cos z+C.$$

Da aber auch $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}=x$, d. h. $C_1e^z-C_2e^{-z}+C_3\sin z-C_4\cos z=x$, so ist $C=0$, so dass man also

$$y=C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\cos z+C_4\sin z,\ x=C_1e^z-C_2e^{-z}+C_3\sin z-C_4\cos z$$

hat. Setzt man diese Werthe in $2y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2-x^2=0$ ein, so erhält man

$$2[C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\cos z+C_4\sin z]\,[C_1e^z+C_2e^{-z}-C_3\cos z-C_4\sin z]$$
$$-[C_1e^z-C_2e^{-z}-C_3\sin z+C_4\cos z]^2-[C_1e^z-C_2e^{-z}+C_3\sin z-C_4\cos z]^2=0,$$

d. h.

$$4C_1C_2-C_3^2-C_4^2=0,$$

welche Beziehung zwischen den vier Konstanten bestehen muss. Eliminirt man dann z zwischen den Werthen von y und x, so werden von selbst nur zwei Konstanten bleiben. Um diess hier hervortreten zu lassen, setze man $C_3=\varrho\cos\alpha$, $C_4=\varrho\sin\alpha$, also $C_3^2+C_4^2=\varrho^2=4C_1C_2$, $C_3\cos z+C_4\sin z=\varrho\cos(z-\alpha)$, $C_3\sin z-C_4\cos z=\varrho\sin(z-\alpha)$, also:

$$y=C_1e^z+C_2e^{-z}+2\sqrt{C_1C_2}\cos(z-\alpha),\ x=C_1e^z-C_2e^{-z}+2\sqrt{C_1C_2}\sin(z-\alpha).$$

Setzt man $z=\alpha+u$, $C_1e^\alpha=A$, $C_2e^{-\alpha}=B$, also $AB=C_1C_2$, so ist u zu eliminiren zwischen

$$y=Ae^u+Be^{-u}+2\sqrt{AB}\cos u,\ x=Ae^u-Be^{-u}+2\sqrt{AB}\sin u,$$

wo A und B die beiden willkürlichen Konstanten sind.

II. Ist

$$f(\varphi, \psi) = 0 \qquad \text{(a)}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, worin φ und ψ die Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$ enthalten, und es sind die beiden Differentialgleichungen

$$\varphi = a, \quad \psi = b \qquad \text{(b)}$$

durch Elimination von je einer der Konstanten a oder b aus derselben Gleichung

$$F(x, y, a, b) = 0 \qquad \text{(c)}$$

entstanden, so hängen a und b durch die Gleichung

$$f(a, b) = 0 \qquad \text{(d)}$$

zusammen und es ist (c) die allgemeine Integralgleichung von (a).

Differenzirt man nämlich die (c), so ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad \text{(e)}$$

und wenn man aus (e) und (c) je eine der zwei Konstanten a und b eliminirt, so erhält man — der Annahme nach — die beiden Gleichungen (b). Lässt man aber a und b zusammenhängen mittelst (d), so geben die (richtigen) Gleichungen (b) sofort die (a).

Zuweilen ist es nicht leicht, die (c) herzustellen, d. h. thatsächlich zu zeigen, dass die (b) aus derselben Gleichung stammen. Differenzirt man aber die beiden Gleichungen (b) und erhält aus beiden dieselbe Differentialgleichung zweiter Ordnung, so müssen die (b) aus einer Gleichung (c) stammen (§. 102, III), können also zusammen bestehen. Eliminirt man dann zwischen (b) und (d) die beiden Grössen b und $\frac{\partial y}{\partial x}$, so erhält man die Integralgleichung von (a) mit der willkürlichen Konstanten a.

4) $$y - 2x\frac{\partial y}{\partial x} = 2\frac{\partial y}{\partial x}\varphi\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad \frac{y - 2x\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}} = \varphi\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

wo φ eine beliebige Funktion bedeutet. Setzt man

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = a, \quad \frac{y - 2x\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}} = b,$$

so ergibt sich durch Differenzirung aus beiden:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Also hat man b und $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu eliminiren aus

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = a, \quad y - 2x\frac{\partial y}{\partial x} = 2b\frac{\partial y}{\partial x}, \quad b = \varphi(a),$$

woraus

$$y^2 - 2ax = 2a\varphi(a).$$

5) $$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\varphi\left(x+y\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=b,\ x+y\frac{\partial y}{\partial x}=a \text{ geben } 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

also $\frac{\partial y}{\partial x}$, b zu eliminiren zwischen

$$x+y\frac{\partial y}{\partial x}=a,\ y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=b,\ b=\varphi(a),$$

woraus

$$y^2+(a-x)^2=\varphi(a)^2.$$

6) $$\frac{y^2-x^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}=\varphi\left[\frac{(y^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\right]$$

führt eben so auf

$$x^2+y^2-2ax=2y\varphi(a).$$

7) Setzt man in der Gleichung

$$cxy\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(x^2-cy^2-b)\frac{\partial y}{\partial x}-xy=0:$$

$x^2=u$, $y^2=v$, so wird $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{v}}{\partial u}2x=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{v}}\frac{\partial v}{\partial u}2\sqrt{u}=\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial v}{\partial u}$, also:

$$c\sqrt{uv}.\frac{u}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2+(u-cv-b)\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial v}{\partial u}-\sqrt{uv}=0,$$

$$cu\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2+(u-cv-b)\frac{\partial v}{\partial u}-v=0,$$

$$u\frac{\partial v}{\partial u}-v+c\left(u\frac{\partial v}{\partial u}-v\right)\frac{\partial v}{\partial u}-b\frac{\partial v}{\partial u}=0,$$

$$v-u\frac{\partial v}{\partial u}=-\frac{b\frac{\partial v}{\partial u}}{1+c\frac{\partial v}{\partial u}}.$$

Setzt man

$$v-u\frac{\partial v}{\partial u}=a,\ \frac{-b\frac{\partial v}{\partial u}}{1+c\frac{\partial v}{\partial u}}=\alpha,$$

so ergibt sich durch Differenzirung nach u: $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}=0$. Also α und $\frac{\partial v}{\partial u}$ zu eliminiren zwischen

$$v-u\frac{\partial v}{\partial u}=a,\ \alpha\left(1+c\frac{\partial v}{\partial u}\right)+b\frac{\partial v}{\partial u}=0,\ a=\alpha,$$

woraus

$$v+\frac{a}{ac+b}u=a,\ y^2+\frac{a}{ac+b}x^2=a,$$

wenn a die willkürliche Konstante.

§. 121.

Integration mittelst Reihen.

Wie in §. 101 wird man, wenn alle Mittel versucht sind, zu der Integration mittelst Reihen greifen können. Die Bemerkungen, die wir dort gemacht haben, gelten hier natürlich ebenfalls. Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) Man habe die Gleichung

$$x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x = 0,$$

so folgt daraus:

$$2x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 1 = 0,\; x\left[\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \text{ d. h. } x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right],$$

woraus nun, indem man $n-4$ mal nach einander differenzirt, (§. 18'):

$$x\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) + (n-4)\frac{\partial^{n-4}}{\partial x^{n-4}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right).$$

Entwickelt man diese Grössen, so hat man

$$x\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) + (n-4)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-4}{1}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-3}{1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Für $x=0$ ist nun nach einander $(n=4, \ldots.)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,\; \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1}{2\frac{\partial y}{\partial x}},\; \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,\; \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0, \ldots\ldots$$

also da y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=0$ willkürliche Konstanten sind, etwa c und c':

$$y = c + c'x + \frac{1}{12c'}x^3.$$

2)
$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} + b^2 xy = 0.$$

Wir haben bereits in §. 112, II die Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 xy = 0$ integrirt und dort gefunden, dass $\int_0^\infty \frac{\cos(xv)\,\partial v}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}$ der Gleichung genügt. Die gegebene Gleichung unterscheidet sich von der eben angeführten nur durch das Zeichen von b^2; allein v^2-b^2 für v^2+b^2 gesetzt, würde ein bestimmtes Integral geben, das nicht benützt werden darf.* Kann man aber das Integral der eben angeführten

---

* Das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos(xv)\,\partial v}{(v^2-b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}$, ist nicht zulässig, weil für $v=b$, welcher Werth zwischen 0 und ∞ liegt, die Grösse unter dem Integralzeichen unendlich ist.

Gleichung in anderer Form herstellen, welche diesem Uebelstande nicht unterworfen ist, so würde ein Schluss von einem Integrale auf das andere wohl gestattet seyn. Nun ist aber nach §. 87, II:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(v x)\,\partial v}{b+v^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-x\sqrt{b}}}{\sqrt{b}},$$

also wenn man n mal nach b differenzirt:

$$(-1)^n \int_0^\infty \frac{\cos(v x)\,\partial v}{(b+v^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\partial^n}{\partial b^n}\left(\frac{e^{-x\sqrt{b}}}{\sqrt{b}}\right)\frac{1}{1.2..n}.$$

Denkt man sich die zweite Seite entwickelt, so werden alle Glieder den Faktor $e^{-x\sqrt{b}}$ haben, so dass man eine Reihe von der Form

$$e^{-x\sqrt{b}}[A x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots]$$

erhält. Daraus schliessen wir, wenn man b^2 für b setzt, es werde das Integral der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0$ sich darstellen lassen in der Form, die eben angegeben wurde, und worin wir nun $A, A_1, \ldots$ entwickeln wollen. Sey also:

$$y = e^{-bx}[A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots],$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -b e^{-bx}[A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots] + e^{-bx}[n A_n x^{n-1} + (n-1) A_{n-1} x^{n-2} + \ldots\ldots],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2 e^{-bx}[A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots] - 2b e^{-bx}[n A_n x^{n-1} + (n-1) A_{n-1} x^{n-2} + \ldots\ldots]$$
$$+ e^{-bx}[n(n-1) A_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) A_{n-1} x^{n-3} + \ldots\ldots].$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0$ ein und ordnet nach Potenzen von x, so ergibt sich:

$$x^{n+1}[b^2 A_n - b^2 A_n] + x^n[b^2 A_{n-1} - 2nb A_n + ab A_n - b^2 A_{n-1}] + \ldots\ldots$$
$$+ x^{n-r}[b^2 A_{n-r-1} - 2(n-r) b A_{n-r} + (n-r+1)(n-r) A_{n-r+1} + ab A_{n-r}$$
$$-(n-r+1) a A_{n-r+1} - b^2 A_{n-r-1}] + \ldots\ldots = 0,$$

woraus nun, indem man die Koeffizienten der auf einander folgenden Potenzen von x gleich Null setzt, folgt:

$$-2n + a = 0, \ldots, \; b A_{n-r}[-2n + 2r + a] - (n-r+1) A_{n-r+1}(a-n+r) = 0, \ldots,$$

d. h.

$$a = 2n, \ldots, \; b A_{n-r}(2r) - (n-r+1)(n+r) A_{n-r+1} = 0, \ldots\ldots,$$

so dass für $r = 1, 2, \ldots\ldots$

$$A_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2.1b} A_n, \; A_{n-2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2.2.b} A_{n-1}, \ldots, \; A_{n-r} = \frac{(n-r+1)(n+r)}{2.r.b} A_{n-r+1},$$
$$\ldots\ldots,$$

woraus

$$A_{n-r} = \frac{(n-r+1)(n-r+2)\ldots\ldots(n+r)}{1.2\ldots r.\,(2b)^r} A_n.$$

Demnach bleibt A_n willkürlich $= C$ und es ist

$$y = C e^{-bx}\left[x^n + \frac{n(n+1)}{1.2b}x^{n-1} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(2b)^2}x^{n-2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-2)(n-1)n\ldots(n+3)}{1.2.3.(2b)^3}x^{n-3} + ,\ldots\right],$$

wo $n = \frac{1}{2}a$. Diese Reihe ist endlich, wenn n eine positive oder negativ ganze Zahl ist.

Setzt man $-b$ statt b, so sieht man leicht, dass derselben Gleichung ebenfalls genügt wird, so dass also das allgemeine Integral der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0$ gegeben ist durch

$$y = C e^{-bx}\left[x^n + \frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1} + \frac{(n-1)n..(n+2)}{2.(2b)^2}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)..(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3} + \ldots\ldots\right]$$
$$+ C' e^{bx}\left[x^n - \frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1} + \frac{(n-1)n..(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2} - \frac{(n-2)..(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3} + \ldots\right],$$
$$n = \frac{1}{2}a,$$

welche Grösse immer endlich ist, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl. In diesem Fälle lässt sich also die Gleichung in geschlossener Form integriren (§. 111 und 112). Ist n nicht in der angegebenen Lage, so werden die Reihen unendlich, divergiren aber, so dass die angegebenen Formeln nicht zu brauchen sind.

Man setze nun bi für b, so wird das allgemeine Integral der Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a\frac{\partial y}{\partial x} + b^2 x y = 0,$$

gegeben seyn durch

$$y = C(\cos bx - i\sin bx)\left[x^n - \frac{n(n+1)}{2b}i x^{n-1} - \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^3}i x^{n-3} + \ldots\right]$$
$$+ C'(\cos bx + i\sin bx)\left[x^n + \frac{n(n+1)}{2b}i x^{n-1} - \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^3}i x^{n-3} + \ldots\right],$$

wenn man beachtet dass

$$\frac{1}{i} = -i,\ \frac{1}{i^3} = i,\ \frac{1}{i^5} = -i,\ \ldots,\ \frac{1}{i^2} = -1,\ \frac{1}{i^4} = 1,\ \ldots\ldots$$

Hieraus folgt

$$y = (C+C')\cos bx\left[x^n - \frac{(n-1)..(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2} + \frac{(n-3)..(n+4)}{2.3.4(2b)^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$
$$+ (C'-C)\,i\cos bx\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1} - \ldots\right]$$
$$-(C+C')\sin bx\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1} - \frac{(n-2)..(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3} + \ldots\ldots\right.$$
$$+ (C'-C)\,i\sin bx\left[x^n - \ldots\ldots\right],$$

so dass, wenn $C + C' = E$, $(C' - C)i = E'$:

$$y = (E\cos bx + E'\sin bx)\left[x^n - \frac{(n-1)..(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2} + \frac{(n-3)..(n+4)}{2.3.4.(2b)^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$

$$+ (E'\cos bx - E\sin bx)\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1} - \frac{(n-2)..(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3} + \ldots\ldots\right],\ n = \frac{1}{2}a.$$

Ist n eine ganze Zahl, so ist dieser Werth ein endlicher; im anderen Falle ist er weiter nicht brauchbar.

3) $$x^2(a+bx^m)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x(c+dx^m)\frac{\partial y}{\partial x} + (f+gx^m)y = 0.$$

Man setze, um die Gleichung zu vereinfachen: $x^m = u$, $y = u^n z$, so ist (§. 113):

$$x\frac{\partial y}{\partial x} = mu\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right),\ x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)u\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right)$$

$$+ m^2u^2\left[u^n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2nu^{n-1}\frac{\partial z}{\partial u} + n(n-1)u^{n-2}z\right],$$

und wenn man diese Werthe in die vorgelegte Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$m^2(a+bu)u^{n+2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2nm^2(a+bu)u^{n+1} + m(m-1)(a+bu)u^{n+1}$$

$$+ m(c+du)u^{n+1}]\frac{\partial z}{\partial u} + [n(n-1)m^2(a+bu)u^n + m(m-1)n(a+bu)u^n$$

$$+ mn(c+du)u^n + (f+gu)u^n]z = 0,$$

so dass, wenn n aus der Gleichung

$$n(n-1)m^2a + m(m-1)na + mnc + f = 0$$

bestimmt wird, man die ganze Gleichung durch u^{n+1} dividiren kann, und eine Gleichung erhält von der Form

$$u(a_0 + b_0 u)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{\partial z}{\partial u} + a_2 z = 0,$$

deren Integration bereits in §. 114, II vorkam.* In manchen Fällen kann jedoch

---

* Ist $a = c = 0$, so ist die Bestimmung von n unmöglich. Alsdann hat man die Gleichung

$$bx^{m+2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + dx^{m+1}\frac{\partial y}{\partial x} + (f+gx^m)y = 0.$$

Setzt man hier $x^m = \frac{1}{u}$, $y = u^n z$, so ist $x\frac{\partial y}{\partial x} = -mu\left(nu^{n-1}z + u^n\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $= m(m+1)u\left(nu^{n-1}z + u^n\frac{\partial z}{\partial u}\right) + m^2u^2\left[n(n-1)u^{n-2}z + 2nu^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x} + u^n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]$, wodurch man findet:

$$bm^2u^{n+1}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2bm^2nu^n + bm(m+1)u^n - dmu^n]\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$+ \left[\left(f + \frac{g}{u}\right)u^n + bm^2n(n-1)u^{n-1} + bm(m+1)nu^{n-1} - dmnu^{n-1}\right]z = 0.$$

Bestimmt man also n aus

$$g + bm^2n(n-1) + bm(m+1)n - dmn = 0,$$

die dort gelehrte Integration mittelst bestimmter Integrale nicht zum Ziele führen und wir wollen desshalb die mittelst unendlicher Reihen anführen. Die obige Gleichung, die n bestimmt, kann auch imaginäre Werthe für n geben, so dass dann die Koeffizienten in der umgeformten Gleichung auch imaginär werden könnten. Obwohl dies kein absolutes Hinderniss wäre, wollen wir doch $n=0$ setzen, also bloss $x^m = u$ einführen, wodurch dann die Gleichung

$$u^2(a_0+b_0u)\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + (a_1+b_1u)\,u\frac{\partial y}{\partial u} + (a_2+b_2u)\,y = 0, \text{ d. h.}$$

$$x^2(a_0+b_0x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x(a_1+b_1x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_2+b_2x)\,y = 0$$

zum Vorschein kommen wird. Man setze nun

$$y = A_0x^n + A_1x^{n+1} + A_2x^{n+2} + \ldots.$$

wo n ebenfalls noch unbestimmt ist, so erhält man, wenn man diesen Werth einführt:

$$A_0[n(n-1)a_0 + na_1 + a_2]x^n + [(n+1)nA_1a_0 + n(n-1)A_0b_0 + (n+1)A_1a_1 + nA_0b_1 + a_2A_1 + b_2A_0]x^{n+1} + \ldots + [(n+r)(n+r-1)A_ra_0 + (n+r-1)(n+r-2)A_{r-1}b_0 + (n+r)A_ra_1 + (n+r-1)b_1A_{r-1} + a_2A_r + b_2A_{r-1}]x^{n+r} + \ldots,$$

welche Grösse $=0$ seyn muss. Daraus folgt:

$$n(n-1)a_0 + na_1 + a_2 = 0,$$
$$A_1[(n+1)na_0 + (n+1)a_1 + a_2] = -[n(n-1)b_0 + nb_1 + b_2]A_0, \ldots,$$
$$A_r[(n+r)(n+r-1)a_0 + (n+r)a_1 + a_2] = -[(n+r-1)(n+r-2)b_0 + (n+r-1)b_1 + b_2]A_{r-1},$$
$$\vdots$$

welche Gleichungen nun n und dann $A_1, A_2 \ldots\ldots$ durch A_0 bestimmen. Im Allgemeinen wird es zwei Werthe von n geben, die der Gleichung genügen, also auch zwei Reihen, so dass man das allgemeine Integral gefunden hat. Im besondern Falle werden diese Reihen endliche seyn können. Diess wird dann der Fall seyn, wenn für ein ganzes positives r die Gleichung

$$(n+r)(n+r-1)b_0 + (n+r)b_1 + b_2 = 0$$

möglich ist.

Man könnte jedoch statt der steigenden Reihe eine fallende wählen, also setzen

$$y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots$$

und würde dann finden:

$$A_0[n(n-1)b_0 + nb_1 + b_2]x^{n+1} + [n(n-1)a_0A_0 + (n-1)(n-2)b_0A_1 + na_1A_0 + (n-1)b_1A_1 + a_2A_0 + b_2A_1]x^n + \ldots + [(n-r)(n-r-1)a_0A_r + (n-r-1)(n-r-2)b_0A_{r+1} + (n-r)a_1A_r + (n-r-1)b_1A_{r+1} + a_2A_r + b_2A_{r+1}]x^{n-r} + \ldots = 0,$$

woraus

---

was immer möglich ist, da nicht $b=0$, so erhält man, indem man mit u^n dividirt:

$$bm^2u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2bm^2 + bm(m+1) - dm]\frac{\partial z}{\partial u} + fz = 0,$$

welche Gleichung zu §. 110 gehört.

$$n(n-1)b_0 + n b_1 + b_2 = 0,$$
$$[(n-1)(n-2)b_0 + (n-1)b_1 + b_2] A_1 = -[n(n-1)a_0 + n a_1 + a_2)] A_0,$$
$$\vdots$$
$$[(n-r-1)(n-r-2)b_0 + (n-r-1)b_1 + b_2] A_{r+1} = -[(n-r)(n-r-1)a_0 + (n-r)a_1 + a_2] A_r, \ldots,$$

so dass die Reihe eine endliche würde, wenn eine ganze Zahl r möglich ist, so dass

$$(n-r)(n-r-1)a_0 + (n-r)a_1 + a_0 = 0.$$

Begreiflicher Weise können die etwa erhaltenen unendlichen Reihen nur in soweit benützt werden, als sie konvergent sind. Kann man sie summiren, so wird man dadurch auf einen geschlossenen Ausdruck geführt, während auch umgekehrt dadurch, dass man für die Integralgleichung einerseits unendliche Reihen, anderseits etwa bestimmte Integrale erhält, interessante analytische Resultate aus der Vergleichung beider gezogen werden können.

§. 122.

Fortsetzung. Die lineare Differentialgleichung.

I. Um von der so eben gemachten Bemerkung eine Anwendung zu machen, wollen wir die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0, \quad [x d^2 y - y (d x)^2],$$

die zwar zu §. 110 gehört, sich aber nach der dortigen Methode nicht integriren lässt, näher untersuchen.

Setzen wir

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

und führen diesen Werth in die gegebene Gleichung ein, so erhalten wir

$$-A_0 + (2.1 A_2 - A_1)x + (3.2 A_3 - A_2)x^2 + \ldots = 0,$$

so dass also

$$A_0 = 0, \; 2.1 A_2 - A_1 = 0, \; 3.2 A_3 - A_2 = 0, \ldots,$$

woraus

$$A_2 = \frac{1}{1.2}A_1, \; A_3 = \frac{1}{1.2.2.3}A_1, \; A_4 = \frac{1}{1.2.2.3.3.4}A_1, \ldots,$$

und wenn $A_1 = C$:

$$y = C\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.2.3} + \frac{x^4}{2.2.3.3.4} + \ldots\right) = C\left(x + \frac{2x^2}{2^2} + \frac{3x^3}{(2.3)^2} + \frac{4x^4}{(2.3.4)^2} + \ldots\right).$$

Es ist aber

$$e^{2\sqrt{x}\cos\omega} = 1 + \frac{2\sqrt{x}\cos\omega}{1} + \frac{4x\cos^2\omega}{1.2} + \frac{8x^{\frac{3}{2}}\cos^3\omega}{1.2.3} + \ldots\ldots \text{ (§. 54).}$$

$$\int_0^\pi e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\cos\omega\,\partial\omega = \int_0^\pi \cos\omega\,\partial\omega + \frac{2\sqrt{x}}{1}\int_0^\pi \cos^2\omega\,\partial\omega + \frac{4x}{1.2}\int_0^\pi \cos^3\omega\,\partial\omega + \ldots$$
(§. 57).

$$=\frac{4\sqrt{x}}{1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\omega\,\partial\omega+\frac{16x^{\frac{3}{2}}}{1.2.3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\omega\,\partial\omega+\frac{64x^{\frac{5}{2}}}{1..5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\omega\,\partial\omega+\ldots\ (\S.\ 42,\ \text{VII}),$$

$$=\frac{4\sqrt{x}}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}+\frac{16x^{\frac{3}{2}}}{1.2.3}\,\frac{3.1}{2.4}\,\frac{\pi}{2}+\frac{64x^{\frac{5}{2}}}{1..5}\,\frac{5.3.1}{2.4.6}\,\frac{\pi}{2}+\ldots\ (\S.\ 43,\ \text{II}).$$

$$=\pi\sqrt{x}\,[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.2.3}+\ldots]=\pi\sqrt{x}\,[1+\frac{2x}{2^2}+\frac{3x^2}{(2.3)^2}+\ldots].$$

Daraus ergibt sich nun sofort, dass

$$C\sqrt{x}\int_0^{\pi}\cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\,\partial\omega$$

ein Werth ist, welcher der vorgelegten Differentialgleichung genügt.

II. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+P\frac{\partial y}{\partial x}+Qy=0, \qquad \text{(b)}$$

in der P und Q bekannte Funktion von x sind (§. 107) wird für $y=ze^{-\frac{1}{2}\int P\partial x}$ zu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-Rz=0, \qquad \text{(c)}$$

wo R eine ebenfalls bekannte Funktion von x ist. Setzen wir nun

$$z=X_0+X_1+X_2+\ldots, \qquad \text{(d)}$$

wo $X_0, X_1, \ldots$ noch zu ermittelnde Funktionen von x sind, so gibt die (c):

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}+\ldots=RX_0+RX_1+RX_3+\ldots,$$

welcher Gleichung etwa genügt wird, indem man setzt:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}=RX_0,\quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}=RX_2,\ldots.$$

Die erste Gleichung gibt X_0, und die andern dann $X_1, X_2, \ldots$ Nimmt man an es sey für $x=a$: $X_0=A$, $\frac{\partial X_0}{\partial x}=B$, während $X_1, X_2, \ldots\ldots$, $\frac{\partial X_1}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x}, \ldots$ für $x=a$ Null werden, so ist hieraus:

$$X_0=A+B(x-a),\ X_1=\int_a^x\partial x\int_a^x RX_0\,\partial x,\ X_2=\int_a^x\partial x\int_a^x R\,\partial x\int_a^x\partial x\int_a^x RX_0\,\partial x,$$

u. s. w.

Es lässt sich nun aber zeigen, dass mit diesen Werthen die Reihe (d) eine endliche Summe haben wird. Sey M der grösste Werth, den R erlangt, wenn x von a bis b geht (b beliebig gross, doch so dass alle Grössen endlich bleiben), eben so N der grösste Werth von X_0. Alsdann ist

$$\int_a^x RX_0\,\partial x<\int_a^x MN\,\partial x,\ \text{d. h.} <MN(x-a),\ (\S.\ 39,\ \text{II})$$

$$\int_a^x\partial x\int_a^x RX_0\,\partial x<\int_a^x\partial x\,MN(x-a),\ \text{d. h.} <MN\frac{(x-a)^2}{1.2},$$

$$\int_a^x R\,\partial x \int_a^x \partial x \int_a^x R X_0\,\partial x < \int_a^x M\,\partial x\, M N \frac{(x-a)^2}{1.2} \text{ d. h. } < M^2 N \frac{(x-a)^3}{1.2.3},$$

$$\int_a^x \partial x \int_a^x R\,\partial x \int_a^x \partial x \int_a^x R X_0\,\partial x < \int_a^x \partial x\, M^2 N \frac{(x-a)^3}{1.2.3} \text{ d. h. } < M^2 N \frac{(x-a)^4}{1.2.3.4}, \ldots\ldots$$

Die Glieder der Reihe (d) sind also kleiner als die der Reihe

$$N + M N \frac{(x-a)^2}{1.2} + M^2 N \frac{(x-a)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots .$$

Die Summe dieser Reihe ist aber $\frac{1}{2} N \left[e^{(x-a)\sqrt{M}} + e^{-(x-a)\sqrt{M}}\right]$, also endlich: mithin ist die Summe der Reihe (d) ebenfalls endlich und bestimmt (§. 60, IV).

§. 123.

Die Riccatische Gleichung.

I. Legt man sich die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + a y^2 + \frac{b y}{x} + c x^m = 0 \tag{a}$$

vor, so erhält man aus derselben, wenn man $y = \frac{1}{a z} \frac{\partial z}{\partial x}$ setzt:

$$\frac{1}{a z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x a z} \frac{\partial z}{\partial x} + c x^m = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + a c x^m z = 0,$$

welche Gleichung, wenn man sie mit x^2 multiplizirt, gibt

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b x \frac{\partial z}{\partial x} + a c x^{m+2} z = 0 \tag{b}$$

und ganz unmittelbar zu der in §. 113 allgemein betrachteten Form gehört. Sie wurde bereits in der dortigen Nr. 3 speziell behandelt, und es folgt daraus, dass durch die Annahme $x = u^{\frac{2}{m+2}}$ diese Gleichung auf

$$u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{m+2b}{m+2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{4 a c}{(m+2)^2} u z = 0 \tag{c}$$

zurückkommt. Vergleicht man dieselbe mit §. 111, §. 112, I, II und §. 121 Nr. 2, so sieht man leicht, dass sie in geschlossener Form integrirt werden kann, wenn

$$\frac{m+2b}{2(m+2)}$$

eine positive oder negative ganze Zahl ist, d. h. also wenn

$$\frac{m+2b}{2(m+2)} = r, \quad m = \frac{2b-4r}{2r-1},$$

wo r eine ganze Zahl. In dem besondern Falle, da in der Gleichung (a) $b = 0$, heisst sie die Riccatische Gleichung und ist also in geschlossener Form integrirbar, wenn $m = -\frac{4r}{2r-1}$, wo r eine (positive oder negative) ganze Zahl. Der Fall $m = -2$ gehört hieher $(r = \infty)$ und ist in der

Gleichung (b) unmittelbar zu erledigen, da man hier nicht auf die Gleichung (c) kommen darf. Allein alsdann gehört die Gleichung (b) zu den in §. 109 erledigten Fällen (Beispiel Nr. 1).

Hat man (c) integrirt, so ergibt sich das Integral von (b), wenn man $u = x^{\frac{1}{2}m+1}$ setzt und dann folgt $y = \frac{1}{az}\frac{\partial z}{\partial x}$. Da immer $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ (§. 107, VI), so ist

$$ay = \frac{C_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial z_2}{\partial x}}{C_1 z_1 + C_2 z_2} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial x} + C\frac{\partial z_2}{\partial x}}{z_1 + C z_2},$$

wenn $\frac{C_2}{C_1} = C$ die (eine) willkürliche Konstante (§. 101, Nr. 5).

II. Auf die Riccati'sche Gleichung lässt sich die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + a x^n y^2 + b x^m = 0$$

zurückführen. Denn man setze $x^{n+1} = z$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z}(n+1)x^n$, also die gegebene Gleichung

$$(n+1)x^n \frac{\partial y}{\partial z} + a x^n y^2 + b x^m = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{a}{n+1} y^2 + \frac{b}{n+1} x^{m-n} = 0.$$

III. Wir haben unter I. die Gleichung erster Ordnung (a) zu integriren gelehrt. Hat man nun die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + X y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \qquad (f)$$

wo X, X_1, X_2 bekannte Funktionen von x sind, und man kennt bereits eine Funktion y_1 von x, welche der (f) genügt, so lässt sich das allgemeine Integral (mit der willkürlichen Konstanten, die wir in y_1 nicht als vorhanden ansehen) leicht finden. Man setze nämlich

$$y = y_1 + u,$$

so wird die (f), da $\frac{\partial y_1}{\partial x} + X y_1^2 + X_1 y_1 + X_2 = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (2 y_1 X + X_1) u + X u^2 = 0.$$

welche Gleichung nach §. 92, II gibt:

$$\frac{1}{u} = e^{\int (2 y_1 X + X_1)\partial x}\left[C + \int X e^{-\int (2 y_1 X + X_1)\partial x} \partial x\right].$$

Also ist, wenn $\int (2 y_1 X + X_1)\partial x = \varphi$:

$$y = y_1 + \frac{e^{-\varphi}}{C + \int X e^{-\varphi}\partial x}.$$

So z. B. genügt der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y^2}{x} + y = 2x + 1$$

offenbar $y = x$, so dass ihr Integral ist $[\varphi = \int\left(\frac{2x}{x}+1\right)\partial x = 3x]$:

$$y = x + \frac{e^{-3x}}{C + \int\frac{\partial x}{x e^{3x}}}.$$

§. 124.

Differentialgleichungen, die durch unmittelbare Differenzirung entstanden sind. Bedingung der Integrirbarkeit.

I. Angenommen es sey die Gleichung n^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad (a)$$

einfach durch Differenzirung aus der Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right) = C \qquad (b)$$

entstanden, also $f\left(x, y, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$ nichts Anderes, als der (vollständige) Differentialquotient von $F\left(x, \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)$, so hat man (§. 16)

$$\frac{d}{dx} F\left(x, y, \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right) = f\left(x, y, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right),$$

und umgekehrt

$$F\left(x, y, \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right) = \int f\left(x, y, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) dx. \qquad (c)$$

II. Soll die Gleichung (c) möglich seyn, so ist diess so zu verstehen, dass y eine ganz beliebige Funktion von x seyn kann, d. h. also, was immer auch y sey, die Grösse zweiter Seite muss sich geradezu bestimmen lassen. So wäre etwa

$$\int\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 6y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 5x\frac{\partial y}{\partial x} + 5y\right]dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 5xy,$$

was immer auch y seyn mag. Man sieht, dass wenn zur Abkürzung $\frac{\partial y}{\partial x} = y_1$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_2, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = y_n$ gesetzt wird, Alles darauf ankommt, dass

$$\int f(x, y, y_1, \dots, y_n)\, dx \qquad (d)$$

bestimmt werden könne, unabhängig von jeder Beziehung zwischen x und y, d. h. was immer auch y für eine Funktion von x seyn möge. Gesetzt nun, diese Bestimmung sey möglich und es sey

$$\int f(x, y, y_1, \dots, y_n)\, dx = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \qquad (e)$$

so ist, wenn u und v beliebige Funktionen von x bedeuten, φ aber von x

unabhängig ist, dabei $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ die Differentialquotienten von u und v bezeichnen, eben so

$$\int f(x, u+\varphi v, u_1+\varphi v_1, \ldots, u_n+\varphi v_n)\,dx = F(x, u+\varphi v, u_1+\varphi v_1, \ldots, u_{n-1}+\varphi v_{n-1}), \quad (e')$$

eben weil die Gleichung (e) gilt für alle möglichen Funktionen y von x.

Nun ist aber (§. 16)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f(x, u+\varphi v, \ldots, u_n+\varphi v_n) = \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial y_1} v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} v_n,$$

wenn man zur Abkürzung $u+\varphi v = y, \ldots\ldots, u_n+\varphi v_n = y_n$ setzt, d. h. man hat

$$f(x, u+\varphi v, \ldots, u_n+\varphi v_n) = \int \left[v\frac{\partial f}{\partial y} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} v_n\right] \partial\varphi$$

und hieraus (§. 41):

$$f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) - f(x, u, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^1 \left(v\frac{\partial f}{\partial y} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + v_n\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\partial\varphi, \quad (f)$$

wobei bloss vorausgesetzt ist, dass die Grösse $v\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + v_n\frac{\partial f}{\partial y_n}$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 1$ endlich bleibe, was man immer erreichen wird, wenn man die beliebige Funktion u gehörig wählt. Wir wollen uns nämlich denken, in der Gleichung (f) sey u eine bestimmte Funktion von x (etwa 0, wenn diess angeht, oder x, u. s. w.), während v ganz willkürlich bleibe. Können wir dann

$$\int f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)\,dx$$

bestimmen für ein beliebiges v, so werden wir auch die Grösse (d) bestimmt haben, indem wir bloss $v = y - u$, d. h. y für $u+v$ setzen. Dabei bemerken wir, dass etwa $\int f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\,dx$ immer als bestimmbar angesehen werden muss, da ja u eine bekannte Funktion von x ist, also die Grösse $f(x, u, \ldots, u_n)$ nur x enthält, und man mithin eine blosse Integration zu vollziehen hat. Aus der Gleichung (f) folgt aber:

$$\int f(x, u+v, \ldots, u_n+v_n)\,dx - \int f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\,dx = \int dx \int_0^1 \left(v\frac{\partial f}{\partial y} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + v_n\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\partial\varphi = \int_0^1 \partial\varphi \int \left(v\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + v_n\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) dx \quad (\S.\ 76,\ \text{II},\ \S.\ 77);$$

ferner ist (§. 27):

$$\int v_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}\partial x = v\frac{\partial f}{\partial y_1} - \int v\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)dx,$$

$$\int v_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}dx = v_1\frac{\partial f}{\partial y_2} - \int v_1\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)dx = v_1\frac{\partial f}{\partial y_2} - v\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) + \int v\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)dx,$$

$$\vdots$$

$$\int v_n \frac{\partial f}{\partial y_n} dx = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - \int v_{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) dx = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - v_{n-2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)$$

$$+ \int v_{n-2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \partial x = \ldots = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - v_{n-2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) + v_{n-3} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) - \ldots$$

$$\pm v \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \mp \int v \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) dx.$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so erhält man

$$\int f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)\, dx = \int f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\, dx +$$

$$v \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right) - \ldots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi$$

$$+ v_1 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots \mp \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi$$

$$\vdots \qquad\qquad (f')$$

$$+ v_{n-1} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial\varphi + \int v\, dx \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) - \ldots \mp \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi.$$

III. Da, wie schon bemerkt, $\int f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\, dx$ als bestimmbar anzusehen ist; ferner in $\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \ldots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi, \ldots,$ bis $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial\varphi$ die Integration nur nach φ geschieht, u und v also konstant sind und diese Integrale mithin sämmtlich als bestimmbar betrachtet werden müssen, so folgt hieraus, dass $\int f(x, u+v, \ldots, u_n+v_n)\, dx$ bestimmt werden kann für ganz beliebige v, wenn

$$\int v\, dx \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \ldots \mp \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi = \int V v\, dx$$

in derselben Lage ist, wo $\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \ldots \mp \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial\varphi = V.$ Allein bei ganz willkürlichem v ist diese Integration nicht durchführbar, wie sich leicht nachweisen lässt. Wäre nämlich diese Integration ausführbar, was auch immer v seyn möge, so setze man einmal

$$v = (x-a)^m (x-b)^r z,$$

wo m und r ganze positive Zahlen sind, die beide grösser als n seyen, und wo z eine ganz beliebige Funktion von x ist, die endlich sey von $x = a$ bis $x = b$. Alsdann werden $v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ Null seyn für $x = a$ und $x = b$ (§. 18′) und mithin

$$\int_a^b f(x, y, y_1, \ldots, y_n)\, dx = \int_a^b f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\, dx + \int_a^b (x-a)^m (x-b)^r z V\, dx,$$

wenn man $u + v = y$ setzt. Da nach unserer dermaligen Annahme $\int f(x, y, \ldots, y_n)\, dx$ integrirbar ist, d. h. es eine Funktion $F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ gibt, die jener Grösse gleich ist, so hängt die erste Seite von dem Werthe von z

gar nicht ab. Denn dann sind ja die Werthe von $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ an den Gränzen $x = a$ und $x = b$ denen von $u, u_1, \ldots u_{n-1}$ an denselben Gränzen gleich, d. h. man hat

$$\int_a^b f(x, y, y_1, \ldots, y_n)\, dx = \int_a^b f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\, dx,$$

so dass für ganz beliebige z seyn muss

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^r z V\, dx = 0. \qquad (g)$$

IV. Können wir also nachweisen, dass diese Gleichung unmöglich ist, so haben wir damit auch bewiesen, dass $\int V v\, dx$ nicht im Allgemeinen bestimmbar sey. Dazu genügt es aber, etwa m und r als gerade Zahlen sich zu denken, und wenn V von $x = a$ bis $x = b$ dasselbe Zeichen hat, unter z sich eine Funktion zu denken, die in derselben Lage ist; wenn V sein Zeichen ändern sollte, z ganz eben so sich zu denken, so dass z V immer positiv bleibt. In diesem Falle wird das bestimmte Integral sicher nicht Null seyn. Uebrigens wird man leicht sehen, dass m und r immer so gewählt werden können, dass die Gleichung (g) nicht befriedigt ist, es mag nun z V zwischen $x = a$ und $x = b$ sein Zeichen wechseln oder nicht. Demnach ist auch $\int V v\, dx$ bei ganz willkürlichem v nicht integrirbar, und also auch nicht $\int f(x, y, \ldots, y_n)\, dx$ bestimmbar, es müsste denn seyn, dass $V = 0$ wäre. Dazu gehört aber wieder, dass identisch d. h. was auch y sey, ist:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) - \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) = 0, \qquad (h)$$

welche Gleichung also nothwendig ist, damit $\int f(x, y, \ldots, y_n)\, dx$ für jedes y bestimmbar sey, und die auch, wie die vorstehende Entwicklung (f') zeigt, genügt, damit wirklich diese Bestimmung durchgeführt werden kann.

V. Die Gleichung (h) pflegt die Bedingungsgleichung der Integrirbarkeit genannt zu werden. Ist sie erfüllt, unabhängig von jeder Beziehung zwischen x und y, so ist $f(x, y, \ldots, y_n)$ der Differentialquotient einer Funktion von $x, y, \ldots, y_{n-1}$; ist sie nicht erfüllt, so ist diess nicht der Fall.

Für die Gleichung (§. 96) $P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder $P + Q y_1 = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + y_1 \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1} = Q$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Q}{\partial y}$ (§. 15), also muss

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

seyn, damit $P + Q\frac{\partial y}{\partial x}$ geradezu der Differentialquotient einer Funktion von x und y sey.

Beispiele.

1) $3y\frac{\partial y}{\partial x}+2x\frac{\partial y}{\partial x}+2y-12x=0$, d. h. $3yy_1+2xy_1+2y-12x=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y_1+2,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=3y+2x,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=3y_1+2;\ \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=0;\ u=0.$$

$$\int f(x,u,u_1)\,dx=\int(-12x)\,\partial x=-6x^2;\ y=\varphi v:$$

$$\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_1}\,\partial x=\int_0^1[3\varphi v+2x]\,\partial\varphi=\frac{3v}{2}+2x,$$

also

$$\int(3vv_1+2xv_1+2v-12x)\,dx=-6x^2+v\left(\frac{3v}{2}+2x\right),$$

d. h. wenn man $v=y$ setzt:

$$\int\left[3y\frac{\partial y}{\partial x}+2x\frac{\partial y}{\partial x}+2y-12x\right]dx=\frac{3}{2}y^2+2xy-6x^2;$$

d. h. die Integralgleichung der vorgelegten ist

$$\frac{3}{2}y^2+2xy-6x^2=C.$$

2) $(3x-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(6-4x)\frac{\partial y}{\partial x}-2y=0$, $(3x-x^2)y_2+(6-4x)y_1-2y=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=6-4x,\ \frac{\partial f}{\partial y_2}=3x-x^2;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=-4;\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=-2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=0,$$

und man kann hier wieder $u=0$ setzen, so dass

$$\int f(x,u,u_1,u_2)\,dx=\int 0\,\partial x=0;$$

$$\int_0^1\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\right]\partial\varphi=\int_0^1[3-2x]\,\partial\varphi=3-2x;\ \int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_2}\,\partial\varphi=3x-x^2;$$

so dass also die (erste) Integralgleichnng ist

$$(3-2x)y+(3x-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}=C,$$

welche Gleichung nun zu §. 92, I gehört.

3) $10\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+2=0$; $10y_1y_2-2yy_2$

$$-2y_1^2+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y_1+2=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y_2-\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y^3}y_1,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=10y_2-4y_1-\frac{x}{y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y_2}=10y_1-2y;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=$$

$$10y_3-4y_2-\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y^3}y_1,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=10y_2-2y_1,\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=10y_3-2y_2:$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=-2y_1-\frac{x}{y^2};\ u=1,y=1+\varphi v:$$

$$\int f(x, u, u_1\, u_2)\, dx = \int (1+2)\,\partial x = 3x, \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\right]\partial\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(-2v_1\varphi - \frac{x}{(1+\varphi v)^2}\right)\partial\varphi = -v_1 + \frac{x}{v(1+v)} - \frac{x}{v}, \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_2}\partial\varphi$$

$$\int_0^1 [10\varphi v_1 - 2(1+\varphi v)]\,\partial\varphi = 5v_1 - 2 - v,$$

also wenn $1+v=y$, $v=y-1$, so ist das Integral:

$$3x + (y-1)\left(-y_1 + \frac{x}{y(y-1)} - \frac{x}{y-1}\right) + y_1(5y_1 - 2 - y + 1) = 5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ \frac{x}{y} + 2x,$$

und wenn diess $=C$ gesetzt wird, so hat man eine erste Integralgleichung der vorgelegten Gleichung.

§. 125.

Aufstellung von Bedingungen, unter denen eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durch einen gegebenen Faktor integrirbar wird.

Eine vorgelegte Differentialgleichung beliebiger Ordnung kann zwar ganz wohl durch Differenzirung einer Gleichung der nächst niederen Ordnung entstanden seyn, man hat aber einen gemeinschaftlichen Faktor ausgeworfen, so dass die vorgelegte Gleichung nicht geradezu ein Differentialquotient ist, es aber werden würde, wenn man im Stande wäre, jenen Faktor wieder herzustellen. Wie in §. 98 wird man nun, bei der Unmöglichkeit, denselben geradezu zu bestimmen, gewisse besondere Gleichungen untersuchen und nachsehen, ob Faktoren von bestimmter Form dieselben auf diejenige Form bringen, die den Bedingungen des §. 124 entspricht. Wir wollen dazu nur Gleichungen der zweiten Ordnung wählen.

I. Zu untersuchen, ob die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\frac{\partial y}{\partial x} + X'y = 0 \qquad \text{(a)}$$

durch einen Faktor von der Form e^{ax} integrirbar werden kann, wo a eine Konstante ist. Da alsdann $e^{ax}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\frac{\partial y}{\partial x} + X'y\right)$ ein vollständiger Differentialquotient seyn soll, so ist (§. 124):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = X'e^{ax},\ \frac{\partial f}{\partial y_1} = Xe^{ax},\ \frac{\partial f}{\partial y_2} = e^{ax};\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + aX\right)e^{ax},\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) = a^2 e^{ax},$$

also muss

$$e^{ax}\left[X' - aX - \frac{\partial X}{\partial x} + a^2\right] = 0,\quad X' - aX - \frac{\partial X}{\partial x} + a^2 = 0$$

seyn. Ist diese Beziehung erfüllt, so wird (a) durch den Faktor e^{ax} integrirbar. Für X und X' konstant, bestimmt diese Gleichung die Werthe von

a (§. 108). Ist aber die gegebene Bedingung erfüllt, so lässt sich leicht das Integral von (a) finden. Denn es ist dann (§. 124):

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = X e^{ax}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = e^{ax}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) = a e^{ax},$$

und wenn $u = 0$, $v = y$, das Integral:

$$y\int_0^1 e^{ax}(X-a)\partial\varphi + \frac{\partial y}{\partial x}\int_0^1 e^{ax}\partial\varphi = e^{ax}(X-a)y + e^{ax}\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. h. die Integralgleichung ist

$$e^{ax}\frac{\partial y}{\partial x} + e^{ax}(X-a)y = C,$$

welche letztere Gleichung zu §. 92, I gehört.

II. Zu untersuchen, ob die Gleichung (a) durch einen Faktor der Form $e^{\mu x^m + \gamma x^n}$ integrirbar werden kann. Also ist jetzt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = X' e^{\mu x^m + \gamma x^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = X e^{\mu x^m + \gamma x^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = e^{\mu x^m + \gamma x^n},$$

woraus als Bedingungsgleichung folgt

$$X' - (m\mu x^{m-1} + n\gamma x^{n-1})X - \frac{\partial X}{\partial x} + m\mu(m-1)x^{m-2} + n\gamma(n-1)x^{n-2} + (m\mu x^{m-1} + n\gamma x^{n-1})^2 = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist dann das Integral:

$$y\int_0^1 X e^{\mu x^m + \gamma x^n}\partial\varphi - y\int_0^1 (m\mu x^{m-1} + n\gamma x^{n-1})e^{\mu x^m + \gamma x^n}\partial\varphi + \frac{\partial y}{\partial x}\int_0^1 e^{\mu x^m + \gamma x^n}\partial\varphi = C,$$

d. h.

$$e^{\mu x^m + \gamma x^n}\left(yX - (m\mu x^{m-1} + n\gamma x^{n-1})y + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = C.$$

Für $m = 1$, $n = 2$ wäre

$$X' = (\mu + 2\gamma x)X + \frac{\partial X}{\partial x} - (\mu + 2\gamma x)^2 - 2\gamma,$$

und also etwa für $X = 2\gamma x$, das Integral von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\gamma x\frac{\partial y}{\partial x} - \mu(\mu + 2\gamma x)y = 0:$$

$$e^{\mu x + \gamma x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \mu y\right) = C.$$

III. Man soll untersuchen, ob die Gleichung (a) durch einen Faktor von der Form $x^m e^{\mu x^n}$ integrirbar gemacht werden kann.

Hier ist nun $\frac{\partial f}{\partial y} = X' x^m e^{\mu x^n}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1} = X x^m e^{\mu x^n}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2} = x^m e^{\mu x^n}$, woraus als Bedingungsgleichung:

$$X' x^2 - x^3 \frac{\partial X}{\partial x} - (m x + n \mu x^{n+1}) X + m(m-1) + \mu n (2m + n - 1) x^n + \mu^2 n^2 x^{2n} = 0,$$

während die Integralgleichung ist

$$x^m e^{\mu x^n} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + (X - \frac{m}{x} - \mu n x^{n-1}) y\right) = C.$$

IV. Man soll die Bedingungen angeben, unter denen dieselbe Gleichung (a) durch den Faktor $\xi \frac{\partial y}{\partial x} + \xi' y$ integrirbar wird, wenn ξ, ξ' Funktionen von x sind.

Da jetzt

$$(y_2 + X y_1 + X' y)(\xi y_1 + \xi' y)$$

ein vollständiger Differentialquotient seyn soll, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = X'(\xi y_1 + \xi' y) + \xi'(y_2 + X y_1 + X' y) = \xi' y_2 + (X' \xi + X \xi') y_1 + 2 X' \xi' y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = X(\xi y_1 + \xi' y) + \xi(y_2 + X y_1 + X' y) = \xi y_2 + 2 X \xi y_1 + (X \xi' + X' \xi) y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \xi y_1 + \xi' y,$$

so dass also wegen $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) = 0$ seyn muss:

$$\left(2\xi' - 2X\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(2\frac{\partial \xi'}{\partial x} - 2X\frac{\partial \xi}{\partial x} - 2\xi\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ \left(2X'\xi' - \frac{d(X\xi')}{dx} - \frac{d(X'\xi)}{dx} + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2}\right) y = 0.$$

Damit diese Gleichung für alle y erfüllt sey, muss

$$2\xi' - 2X\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad 2X'\xi' - \frac{d(X\xi' + X'\xi)}{dx} + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} = 0$$

seyn, woraus von selbst folgt, dass der Faktor von $\frac{\partial y}{\partial x}$ Null ist. Man sieht hieraus, dass wenn man ξ, ξ' als bekannt ansieht, X aus der ersten Gleichung und dann X' nach §. 92, I aus der zweiten erhalten wird.

Wir wollen einmal $\xi = 1$, $\xi' = b$ annehmen, so hat man

$$2X = 2b, \ X = b; \ 2bX' - \frac{\partial (b^2 + X')}{\partial x} = 0, \ X' = C e^{2bx};$$

also wird die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + a e^{2bx} y = 0$$

integrirbar durch den Faktor $\frac{\partial y}{\partial x} + b y$.

Diese Beispiele mögen genügen um zu zeigen, in welcher Weise hier zu verfahren ist.

Besonderer Satz für die linearen Differentialgleichungen.

V. Sey M eine Funktion von x, ohne y oder Differentialquotienten von y, und zugleich ein integrirender Faktor der Gleichung (§. 107)

$$P_0 \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x} + P_n y = 0, \quad \text{(b)}$$

wo $P_0, \ldots, P_n$ ebenfalls bloss Funktionen von x vorstellen.

Wegen §. 124, IV muss also seyn:

$$MP_n - \frac{d}{dx}(MP_{n-1}) + \frac{d^2}{dx^2}(MP_{n-2}) - \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n}(MP_0) = 0. \quad \text{(c)}$$

Entwickelt man die hier vorkommenden Differentialquotienten nach §. 18', so nimmt die (c) folgende Gestalt an:

$$Q_0 \frac{\partial^n M}{\partial x^n} + Q_1 \frac{\partial^{n-1} M}{\partial x^{n-1}} + Q_2 \frac{\partial^{n-2} M}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Q_n M = 0, \quad \text{(d)}$$

wo

$$Q_0 = P_0, \; Q_1 = \frac{n}{1} \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_1, \; Q_2 = \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} - \frac{n-1}{1} \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_2, \ldots\ldots,$$

$$Q_r = \frac{n(n-1)..(n-r+1)}{1.2\ldots r} \frac{\partial^r P_0}{\partial x^r} - \frac{(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{1.2\ldots r-1} \frac{\partial^{r-1} P_1}{\partial x^{r-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{n-r+1}{1} \frac{\partial P_{r-1}}{\partial x} \pm P_r, \ldots .$$

Hieraus folgt, dass jede Funktion von x, welche der Gleichung

$$Q_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + Q_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots + Q_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} + Q_n z = 0 \quad \text{(d')}$$

genügt, ein integrirender Faktor der Gleichung (b) ist.

VI. Sey nun aber N, ebenfalls eine blosse Funktion von x, integrirender Faktor von (d'), so wird man eben so N zu bestimmen haben aus

$$R_0 \frac{\partial^n N}{\partial x^n} + R_1 \frac{\partial^{n-1} N}{\partial x^{n-1}} + \ldots + R_{n-1} \frac{\partial N}{\partial x} + R_n N = 0, \quad \text{(e)}$$

wo wieder

$$R_0 = Q_0, \; R_1 = \frac{n}{1} \frac{\partial Q_0}{\partial x} - Q_1, \ldots, R_r = \frac{n(n-1)..(n-r+1)}{1.2\ldots r} \frac{\partial^r Q_0}{\partial x^r} - \ldots \pm Q_r, \ldots\ldots .$$

Setzt man aber obige Werthe von $Q_0, Q_1, \ldots, Q_r$ hier ein, so erhält man:

$$R_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots.r} \frac{\partial^r P_0}{\partial x^r}$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r-1} \frac{n}{1} \frac{\partial^r P_0}{\partial x^r} + \frac{(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{1.2\ldots.r-1} \frac{\partial^{r-1} P_1}{\partial x^{r-1}}$$
$$+ \frac{(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1\ldots.r-2} \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\partial^r P_0}{\partial x^r} - \frac{(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r-2} \frac{n-1}{1} \frac{\partial^{r-1} P_1}{\partial x^{r-1}}$$
$$+ \frac{(n-2)..(n-r+1)}{1\ldots r-2} \frac{\partial^{r-2} P_2}{\partial x^{r-2}}$$
$$\vdots$$

$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} \frac{\partial^r P_0}{\partial x^r} + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_r.$$

Diese Grösse ist aber gleich P_r, da ausser dem letzten allein stehenden Gliede alle senkrecht unter einander stehenden sich aufheben. Es ergibt sich diess aus der Gleichung (18) des §. 18′, wenn man dort setzt: $b = -(n - r + 1)$ und

$$\begin{array}{lll} a = n, & n = r, & \text{also } a + b - n + 1 = 0, \\ a = n - 1, & n = r - 1, & \text{„ } a + b - n + 1 = 0, \\ a = n - 2, & n = r - 2, & \text{„ } a + b - n + 1 = 0, \\ \vdots & & \end{array}$$

Demnach ist die (e):

$$P_0 \frac{\partial^n N}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} N}{\partial x^{n-1}} + \ldots . P_{n-1} \frac{\partial N}{\partial x} + P_n N = 0,$$

d. h. N ist ein Werth, welcher der Gleichung (b) genügt.

Man zieht daraus folgenden Satz:

Jeder Werth von z, als Funktion von x, welcher der (d′) genügt, ist ein integrirender Faktor der Gleichung (b), und umgekehrt, jeder Werth von y, als Funktion von x, welcher der (b) genügt, ist integrirender Faktor von (d′).

Siebzehnter Abschnitt.

Von den besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen.

§. 126.

Begriff der besondern Auflösung.

I. Schon in §. 100, II haben wir gesehen, dass es zuweilen Auflösungen von Differentialgleichungen der ersten Ordnung geben kann, die keine willkürliche Konstante enthalten, aber auch nicht aus der allgemeinen Integralgleichung hervorgehen, indem man bloss der willkürlichen Konstanten einen bestimmten Werth beilegt. So würde in dem dortigen Beispiele 4 sicher nicht die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ aus $y = Cx + a\sqrt{1+C^2}$ zu erhalten seyn, man möchte der Konstanten C irgend welche Werthe beilegen. Solche Auflösungen heissen wir besondere Auflösungen, im Gegensatz zu dem Integral oder der Integralgleichung.

Gesetzt also, die Gleichung erster Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

habe zur allgemeinen Integralgleichung

$$F(x, y, c) = 0, \qquad (b)$$

wo c die willkürliche Konstante vorstellt, so wird jede besondere Form, die aus (b) dadurch folgt, dass man der c einen bestimmten, natürlich von x unabhängigen Werth beilegt, ein besonderes Integral von (a) darstellen. Wird dagegen die Gleichung (a) auch noch befriedigt durch die Gleichung

$$\psi(x, y) = 0, \qquad (c)$$

in der eine Konstante, die in (a) nicht ist, nicht vorkommt, und es ist nicht möglich, die Gleichung (c) aus (b) zu erhalten, indem man der dortigen Grösse c einen bestimmten Werth beilegt, so wird (c) eine besondere Auflösung der Gleichung (a) seyn.

Geometrische Theorie.

II. Um uns die Möglichkeit einer solchen besonderen Auflösung klar zu machen, wollen wir wieder zu der bereits in §. 90, II angewandten Betrachtung zurückkehren. Wir haben dort gesehen, dass man mittelst der Gleichung (a) immer eine Reihe von Kurven verzeichnen könne, deren allgemeine Gleichung die (b) ist, während jede einzelne dieser Kurven dadurch erhalten wird, dass die Konstante c einen bestimmten Werth annimmt. Denken wir uns nun die (unendliche) Menge dieser Kurven, die wir als unmittelbar auf einander folgend denken wollen, d. h. so, dass in je zwei auf einander folgenden die Werthe der Konstanten c nur unendlich wenig verschieden sind, so hat jede einzelne dieser Kurven die Eigenschaft, dass der aus ihr folgende Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ derselbe ist, wie er aus der Gleichung (a) folgt, wenn man für x und y die dem betreffenden Kurvenpunkte zugehörigen Werthe wählt.

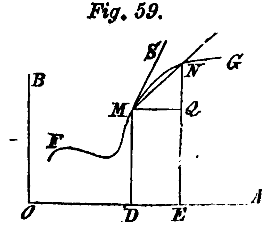


Fig. 59.

Gehen wir etwas genauer auf die Sache ein, so werden wir uns auch so aussprechen können. Gesetzt FG sey eine der betreffenden Kurven, M ein Punkt derselben, dessen Koordinaten x und y sind, N ein zweiter Punkt, dessen Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ seyen, wo $\Delta x = DE$, $\Delta y = QN$ ist, so wird der Werth $Gr\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, wie er aus der Kurve folgt, nichts Anderes seyn als das $\frac{\partial y}{\partial x}$, das aus (a) folgt, wenn man in (a) für x und y die Koordinaten des Punktes M setzt. Was wir so eben von einer Kure gesagt haben, gilt von allen andern.

Denken wir uns nun weiter, diese Reihe von Kurven sey so beschaffen, dass je zwei unmittelbar auf einander folgende sich schneiden (in einem oder mehreren Punkten), und man ziehe durch diese Durchschnittspunkte je zweier auf einander folgender Kurven selbst wieder eine stetige Kurve, so wird diese

ebenfalls Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ liefern, wie sie aus der Gleichung (a) folgen. Denn auf der oben betrachteten besonderen Kurve FG liegen zwei einander unendlich nahe solcher Durchschnittspunkte, der eine (M) als Durchschnittspunkt der Kurve FG mit der vorangehenden, der andere (N, wenn MN unendlich klein) als solcher Durchschnittspunkt mit der nächst folgenden Kurve. Da die neue Kurve nun durch alle diese Durchschnittspunkte geht, so hat sie mit der Kurve FG zwei einander unendlich nahe Punkte (M und N) gemeinschaftlich, und folglich wird der Werth von $Gr\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, wie er für den Punkt M aus der Kurve FG folgt, nothwendig derselbe seyn, wie der Werth derselben Grösse für denselben Punkt aus der neuen Kurve. Da der eine der (a) genügt, so genügt also auch der andere derselben Gleichung. Hieraus folgt aber ganz offenbar, dass die Gleichung der neuen Kurve ebenfalls der (a) genügt und eine willkürliche Konstante sicher nicht mehr enthält, da diese Kurve eben nur eine einzige ist. Es folgt hieraus noch weiter, dass ausser den anfänglichen Kurven, deren Gleichung (b) ist, nur noch die neue Kurve aus (a) folgt, also weitere Auflösungen nicht mehr vorhanden seyn können.

Die neue Kurve pflegt die einhüllende Kurve der frühern genannt zu werden, und da sie mit jeder der letzteren zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte gemeinschaftlich hat, so folgt unmittelbar daraus, dass sie mit derselben jeweils eine gemeinschaftlich berührende Gerade hat, oder alle jene Kurven berührt. Ist nun diese einhüllende Kurve nicht selbst eine der früheren, so ist ihre Gleichung die gesuchte besondere Auflösung.

III. Soll man also die besondere Auflösung der Gleichung (a), deren allgemeines Integral (b) ist, aufsuchen, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, die einhüllende Kurve der durch (b) ausgedrückten Kurven zu suchen. Seyen nun c, $c + \Delta c$ zwei auf einander folgende Werthe der Konstanten c, so werden die Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad F(x, y, c + \Delta c) = 0 \qquad \text{(d)}$$

auch zwei auf einander folgenden Kurven zugehören, und die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes werden erhalten werden, wenn man x und y aus diesen beiden Gleichungen bestimmt. Aus den zwei Gleichungen (d) folgt aber auch

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c} = 0,$$

welche zwei Gleichungen eben so gut zur Bestimmung von x und y verwendet werden können, da sie die (d) vollständig ersetzen. Die letzte dieser Gleichungen gibt, wenn man Δc unendlich abnehmen lässt, was man muss, wenn die zwei Kurven unmittelbar auf einander folgende seyn sollen:

$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0$, gemäss den Grund-Erklärungen in §. 11, so dass also die zwei Gleichungen (d) zu ersetzen sind durch

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0, \qquad (d')$$

aus denen die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier unmittelbar auf einander folgender Kurven hervorgehen müssen.* Ist es nicht möglich, dieselben hieraus zu bestimmen, so besteht eben ein solcher Durchschnittspunkt gar nicht. Letzteres wird dann immer der Fall seyn, wenn x und y in der zweiten Gleichung (d') nicht vorkommen, in welchem Falle dieselbe für c einen bestimmten Werth liefert.

Bildet man nun aus den Gleichungen (d') eine neue Gleichung

$$\psi(x, y) = 0, \qquad (e)$$

indem man c zwischen beiden eliminirt, so wird diese Gleichung nothwendig die der einhüllenden Kurve also die besondere Auflösung von (a) seyn. Denn die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Kurven (d) genügen der (e), und da in letzterer c nicht vorkommt, so wird diess der Fall seyn, was auch immer c seyn mag, d. h. für alle möglichen Durchschnittspunkte, so dass also die (e) die gesuchte Gleichung ist.

Wir haben so eben die Theorie der besonderen Auflösungen aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet, die immer den Vortheil grösserer Anschaulichkeit, dagegen auch den Nachtheil geringerer Allgemeinheit haben. Es ist jedoch ziemlich leicht, auf analytischem Wege zu denselben Ergebnissen zu gelangen.

Analytische Theorie.

IV. Ist (b) die allgemeine Integralgleichung von (a), so muss aus den Gleichungen

---

* Man könnte an dieser Schlussweise Anstand finden. Es lässt sich jedoch die Sache auch etwas anders darstellen, so dass kein Zweifel mehr obwalten kann. Bestimmt man nämlich aus den zwei Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c} = 0, \qquad (\alpha)$$

welche jedenfalls die (d) ersetzen, die Werthe von x und y, so hat man den Durchschnittspunkt der zwei zu c und $c + \Delta c$ gehörigen Kurven. Lässt man dann in den so gefundenen Werthen Δc abnehmen (gegen Null gehen), so wird man eben die Koordinaten der Durchschnittspunkte von zwei sich näher rückenden Kurven erhalten. Geht man zur Gränze über, d. h. lässt Δc unendlich klein werden, so hat man eben dadurch auch die Gränzwerthe von x und y, d. h. die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier unmittelbar auf einander folgender Kurven gefunden. — Ob man aber anfänglich oder schliesslich Δc unendlich klein setze, macht im Resultate keinen Unterschied. Zieht man das Erstere vor, so hat man die Darstellung im Texte.

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \tag{f}$$

wenn man zwischen ihnen c eliminirt, derselbe Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ folgen, wie ihn die (a) liefert. Denken wir uns aber einmal, c sey nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von x und y, so wird die Gleichung (b) durch Differenzirung geben

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0; \tag{g}$$

soll nun durch Elimination von c aus (b) und (g) eine Gleichung entstehen, die denselben Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ wie (a) d. h. wie die aus den (f) entstehende Gleichung geben soll, so müssen die (b) und (g) der Form nach mit den (f) zusammenstimmen. Diess ist aber der Fall, wenn c eine Funktion von x und y ist, bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0. \tag{g'}$$

Gibt diese Gleichung wirklich c als Funktion von x und y, d. h. enthält sie ausser c wenigstens noch eine dieser Veränderlichen, so wird diese Funktion, in (b) für c gesetzt, eine Gleichung liefern, die als Auflösung von (a) wird angesehen werden müssen. Denn dann gibt (b) zwei Gleichungen, die genau die Form (f) haben, und aus denen durch Elimination von c dasselbe folgt wie oben. Man sieht, dass diess ganz dasselbe ist, was wir in III auf geometrischem Wege aufgefunden haben; namentlich ist (g') die zweite Gleichung (d').

Allein der analytische Weg geht einen Schritt weiter. Gesetzt nämlich es sey $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{P}{Q}$, wo P und Q Funktionen von x und y sind, so werden die Gleichungen (f) seyn:

$$F(x, y, c) = 0, \quad Q\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

und die (g):

$$F(x, y, c) = 0, \quad Q\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \tag{h}$$

und diese Systeme werden auch zusammenstimmen, wenn $Q = 0$. Bestimmt man also c als Funktion von x aus der Gleichung $Q = 0$, so kann die durch Elimination von c aus dieser Gleichung und (b) hervorgehende Gleichung auch eine besondere Auflösung von (a) seyn.

Es ist aber wohl möglich, dass dem nicht so ist, da die Annahme $Q = 0$ gegen die vorhergehende Multiplikation mit Q streiten könnte, so dass man im besondern Falle sich versichern muss, ob die gefundene Gleichung überhaupt eine Lösung von (a) ist, oder nicht.

V. Da auch $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$, so genügt natürlich (b) auch der Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}\right) = 0, \qquad (a')$$

und eine besondere Auflösung der (a′) ist auch eine von (a). Statt der zweiten Gleichung (f) wird man jetzt schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

und statt (g):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y}\right) = 0,$$

woraus dann folgt, dass wenn $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{P'}{Q'}$, die Gleichung $Q' = 0$, benützt um c zwischen ihr und (b) zu eliminiren, zu einer besonderen Auflösung von (a) führen kann.

VI. Wenn in IV und V gefunden wurde, dass die Elimination von c zwischen (a) und einer der Gleichungen $Q = 0$ oder $Q' = 0$ (d. h. $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ oder $\frac{\partial F}{\partial x} = \infty$) zu einer besondern Auflösung führen könne, so war diess nur desshalb richtig, weil z. B. in der zweiten Gleichung (h) alsdann die Grösse $Q\frac{\partial F}{\partial c}$ Null war, also die (h) mit den (f) übereinstimmten.

Gesetzt nun aber, es haben die beiden Grössen $\frac{\partial F}{\partial c}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird derselbe in $Q\frac{\partial F}{\partial c}$ nicht mehr vorhanden seyn, indem $Q = \frac{P}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ also $Q\frac{\partial F}{\partial c} = P\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Setzt man also diesen Faktor Null [wodurch die (g′) erfüllt ist], so wird derselbe keine besondere Auflösung geben.

Ganz dasselbe gilt nach V natürlich auch von einem den Grössen $\frac{\partial F}{\partial c}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ gemeinschaftlichen Faktor.

VII. Denkt man sich die (b) nach x oder y aufgelöst und ermittelt dann $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$, so wird die Elimination von c aus

$$F(x, y, c) = 0,\ \frac{\partial y}{\partial c} = 0, \text{ oder } F(x, y, c) = 0,\ \frac{\partial x}{\partial c} = 0$$

alle besondern Auflösungen geben.

Man hat nämlich zur Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial c}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial c}=0,$$

d. h.

$$\frac{P}{Q}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial c}=0,\quad \frac{P'}{Q'}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial c}=0,$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial c}=-\frac{Q}{P}\frac{\partial F}{\partial c},\quad \frac{\partial x}{\partial c}=-\frac{Q'}{P'}\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Die zweiten Seiten sind Null, wenn $\frac{\partial F}{\partial c}=0$, oder $Q=0$, $Q'=0$, vorausgesetzt, dass nicht in $\frac{\partial F}{\partial c}$ und $\frac{P}{Q}$ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial F}{\partial y}\right)$, oder in $\frac{\partial F}{\partial c}$ und $\frac{P'}{Q'}$ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial F}{\partial x}\right)$ ein gemeinschaftlicher Faktor sey (den man gleich Null setzen will). Diess umfasst aber alle betrachteten Fälle.

Dass man dieses Resultat auch unmittelbar findet, ist begreiflich. So folge etwa aus (b):

$$y=\varphi(x,c). \tag{l}$$

Betrachtet man hierin c als konstant, so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial \varphi(x,c)}{\partial x} \tag{m}$$

und die Elimination von c zwischen (l) und (m) führt zu (a).

Betrachtet man aber c als Funktion von x, so gibt (l):

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{n}$$

welche Gleichung der Form nach mit (m) übereinstimmt, wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}=0. \tag{p}$$

Der Gleichung (p) wird genügt durch $\frac{\partial c}{\partial x}=0$, d. h. c eine Konstante, was natürlich hier unzulässig ist; dann aber auch durch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c}=0,\text{ d. h. }\frac{\partial y}{\partial c}=0,$$

was auf die Behauptung, die wir oben aufgestellt, führt. Eben so folgt der zweite Theil.

Wir bemerken hiezu nur noch, dass es immer leicht ist zu entscheiden, ob das gefundene Resultat eine besondere Auflösung, oder ein besonderes Integral ist. Wäre es letzteres, so müsste die Elimination von y oder x zwischen (b) und (c) nothwendig für c einen konstanten Werth liefern; ist diess nicht der Fall, so ist die Gleichung (c) eine besondere Auflösung.

§. 127.

Beispiele zu §. 126.

1) Die Gleichung

$$y = x\frac{\partial y}{\partial x} + \psi\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

hat zum allgemeinen Integral

$$y = c x + \psi(c) \text{ (§. 100, II).}$$

Daraus folgt, indem man nach c differenzirt:

$$0 = x + \psi'(c),$$

und wenn man c zwischen dieser Gleichung und $y = cx + \psi(c)$ eliminirt, so erhält man eine Auflösung der Gleichung. Diese Auflösung ist nothwendig eine besondere, denn sie gibt $\psi'(c) = -x$, also auch $y = -c\psi'(c) + \psi(c)$, woraus sicher nicht c gleich einer Konstanten folgt.

2) Die Gleichung

$$3x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 6y\frac{\partial y}{\partial x} + x + 2y = 0$$

hat zum allgemeinen Integral

$$y = c + \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{9c} \text{ (§. 101, Nr. 3).}$$

Daraus, indem man nach c differenzirt:

$$0 = 1 - \frac{x^2}{9c^2},\ c^2 = \frac{x^2}{9},\ c = \pm\frac{x}{3},$$

also sind

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{x}{3} = x,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{x}{3} = -\frac{x}{3}$$

Auflösungen der vorgelegten Gleichung, die ihr wirklich genügen. Sie sind auch in dem allgemeinen Integral nicht enthalten. Die Grössen $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ sind -1 und $\frac{1}{3} + \frac{2x}{9c}$, von denen nur die letztere für $c = 0$ unendlich werden könnte, was aber nicht zulässig ist.

3) Der Gleichung

$$\frac{y^2 - x^2 - 2xy\frac{\partial y}{\partial x}}{2\left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = f\left[\frac{(y^2 - x^2)\frac{\partial y}{\partial x} + 2xy}{2\left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\right]$$

genügt (§. 120, II):

$$x^2 + y^2 - 2cx - 2yf(c) = 0,$$

so dass die Elimination von c zwischen dieser Gleichung und

$$x + yf'(c) = 0$$

ebenfalls eine besondere Auflösung gibt.

4) Um die Gleichung

$$x y \frac{\partial y}{\partial x} - y^2 + a = 0,\quad y \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{x} y^2 + \frac{a}{x} = 0$$

zu integriren, hat man in §. 92, II: $m = 2$, $X = -\frac{1}{x}$, $X_1 = \frac{a}{x}$, also ist die Integralgleichung:

$$y^2 = x^2 \left(c - 2a \int \frac{\partial x}{x^3}\right) = c x^2 + a.$$

Differenzirt man hier nach c, so fällt c ganz weg und es ist also eine Elimination nicht möglich. Ferner ist $\frac{\partial F}{\partial x} = -2cx$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, und alle diese können nicht $= \infty$ gesetzt werden. Demgemäss hat die Gleichung keine besondere Auflösung.

5) Für die Gleichung

$$\left(x \frac{\partial y}{\partial x} - y\right)\left(x \frac{\partial y}{\partial x} - 2y\right) + x^3 = 0$$

findet man nach §. 101, I als allgemeines Integral

$$y = c x + \frac{x^2}{c}.$$

Also ist c zu eliminiren zwischen dieser Gleichung und $x - \frac{x^2}{c^2} = 0$, $c = \pm \sqrt{x}$, so dass der gegebenen Gleichung als besondere Auflösungen genügen: $y = 2x\sqrt{x}$ und $y = -2x\sqrt{x}$, die beide im allgemeinen Integral nicht enthalten sind.

6) Der Gleichung

$$\left(y \frac{\partial y}{\partial x} + a x\right)\left(x \frac{\partial y}{\partial x} - y\right) + b \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

genügt (§. 101, Nr. 2):

$$y^2 = c + \frac{a c x^2}{b - c}.$$

Also erhält man eine Auflösung durch Elimination von c aus dieser Gleichung und

$$1 + \frac{a x^2}{b - c} + \frac{a c x^2}{(b - c)^2} = 0,\quad (b - c)^2 + a b x^2 = 0,$$

$$b - c = \pm x \sqrt{-ab},\quad c = b \mp x \sqrt{-ab},$$

so dass

$$y^2 = b - a x^2 \pm 2x \sqrt{-ab}$$

d. h.

$$y^2 = b - a x^2 + 2x \sqrt{-ab},\quad y^2 = b - a x^2 - 2x \sqrt{-ab}$$

ebenfalls als besondere Auflösungen der Gleichung genügen.

7) Der Gleichung

$$\sqrt{x - a}\, \frac{\partial y}{\partial x} = y$$

genügt

$$y = c\, e^{2\sqrt{x - a}};$$

wollte man hier nach c differenziren, so erhielte man c nicht; $\frac{\partial F}{\partial y}$ ist -1; $\frac{\partial F}{\partial x} =$

$\frac{c e^{2\sqrt{x-a}}}{\sqrt{x-a}}$, welche letztere Grösse unendlich ist für $x = a$. Allein diess ist keine Auflösung der gegebenen Gleichung.

8) Der Gleichung

$$y - x\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

genügt (§. 95, Nr. 2):

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-x} = c.$$

Da hier $\frac{\partial F}{\partial c} = -1$, so kann man diess nicht $= 0$ setzen. Dagegen ist $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y[\sqrt{x^2+y^2}-x]\sqrt{x^2+y^2}-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}[\sqrt{x^2+y^2}-x]}$ und diese Grösse ist $= \infty$, wenn $\sqrt{x^2+y^2} = x$, $y^2 = 0$, $y = 0$, welcher Werth wirklich der Gleichung genügt, aber auch aus dem allgemeinen Integral folgt, wenn $c = 0$.

9) Der Gleichung

$$(-y + \sqrt{x^2+y^2-a^2})\frac{\partial y}{\partial x} - x = 0$$

genügt

$$y = C + \sqrt{x^2+y^2-a^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

was $= \infty$ ist für $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Diess genügt der vorgelegten Gleichung und ist eine besondere Auflösung.

10) Die Gleichung

$$4xy\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - 8y^2 = 0$$

hat als Integralgleichung (§. 101, I):

$$y = c^3 + 2c^2x + cx^2.$$

Also hat man c zu eliminiren zwischen dieser Gleichung und

$$3c^2 + 4cx + x^2 = 0,$$

aus welch letzterer folgt

$$c = -\frac{1}{3}x \text{ oder } = -x.$$

Setzt man diese Werthe in den von y, so ergibt sich

$$y = -\frac{4}{27}x^3 \text{ oder } y = 0,$$

wovon der erste Werth eine besondere Auflösung ist.

§. 128.

Verhältniss zum integrirenden Faktor. Aufgabe.

I. Gesetzt die Differentialgleichung

$$P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (q)$$

auf welche Form $\left(\text{durch Auflösen nach } \frac{\partial y}{\partial x}\right)$ jede Differentialgleichung erster Ordnung gebracht werden kann, habe die Grösse μ zum integrirenden Faktor (§. 96, II). Alsdann ist $\mu\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ ein vollständiger Differentialquotient, und es folgt aus (q):

$$\int \mu\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx = C, \qquad (r)$$

als allgemeine Integralgleichung.

Hat nun (q) eine besondere Auflösung, so genügt dieselbe wohl der (q), nicht aber der (r). Zieht man also y aus der besondern Auflösung und setzt diesen Werth in $\mu\left(P+Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, so darf diese Grösse nicht Null werden, weil sonst die besondere Auflösung ja der (r) genügen würde. Da aber $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}$ dadurch Null wird, so muss nothwendig $\mu = \infty$ werden.

Daraus folgt also, dass **jede besondere Auflösung den integrirenden Faktor unendlich macht.**

Ist die Gleichung (q) unmittelbar integrirbar (§. 96, I), so ist ihr integrirender Faktor gleich 1, und kann also nicht ∞ seyn. Demnach hat eine derartige Gleichung keine besondere Auflösung.

II. Jede Differentialgleichung (a) [§. 126] hat aber eine Integralgleichung (b) mit einer willkürlichen Konstanten (§. 90); löst man letztere nach c auf, und heisst sie dann

$$\varphi(x, y) = c,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (s)$$

so muss die Gleichung (s), da sie c nicht mehr enthält, nothwendig mit der (a) übereinstimmen, so dass, wenn letztere nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufgelöst wird, die (s) zum Vorschein kömmt.

Die (s) hat aber, als unmittelbar integrirbar, nach I keine besondere Auflösung. Hat also die (a), obwohl sie mit (s) übereinstimmt (nicht aber identisch ist), eine besondere Auflösung, so kann diess nur daher rühren, dass ein in (a) vorkommender Faktor, der bei der Auflösung nach $\frac{\partial y}{\partial x}$

wegfällt, also eigentlich der Gleichung fremd seyn wird, durch die besondere Auflösung zu Null wird. Ist v dieser Faktor, so wird also aus (a) folgen müssen:

$$v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0,$$

und $\frac{1}{v}$ ist dann der integrirende Faktor (der durch die besondere Auflösung also ∞ wird).

Daraus ergibt sich denn auch sofort, dass die besondere Auflösung die Differentialgleichung nicht ersetzt, was bei der allgemeinen Integralgleichung der Fall ist.

III. (Aufgabe.) In der Gleichung

$$F(x,y,a,b)=0, \qquad (m)$$

in der gewisse Konstanten a, b vorkommen, diese so gegen einander zu bestimmen, damit der aus (m) hervorgehenden Differentialgleichung erster Ordnung die gegebene Gleichung

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (n)$$

als besondere Auflösung zukomme.

Differenzirt man (m), so hat man

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0, \qquad (m')$$

aus welcher Gleichung a, und das von a abhängige b, mittelst (m) zu eliminiren sind. Soll aber (n) eine besondere Auflösung seyn, so muss der aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

folgende Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ der vorhergehenden Differentialgleichung genügen. Man muss also haben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (i)$$

in welcher Gleichung a durch (m) zu ersetzen ist. Die Gleichungen (m), (n), (i) müssen also zugleich bestehen; eliminirt man mithin zwischen ihnen x und y, so erhält man diejenige Gleichung, die den Zusammenhang zwischen a und b gibt.

Soll z. B. der aus $y=ax+b$ hervorgehenden Differentialgleichung als besondere Auflösung zugehören $x^2+y^2-r^2=0$, so ist jetzt x und y zu eliminiren aus:

$$y=ax+b,\ x^2+y^2=r^2,\ x+ay=0,\ \text{woraus } b^2=(1+a^2)r^2;$$

also muss $y=ax+r\sqrt{1+a^2}$ seyn, und der hieraus folgenden Gleichung gehört wirklich $x^2+y^2=r^2$ als besondere Auflösung zu (§. 100, Nr. 3).

Man sieht leicht, dass die hier behandelte Aufgabe, geometrisch gefasst, auch die ist: b als von a abhängig so zu bestimmen, dass die durch

(m) ausgedrückten Kurven die durch (n) ausgedrückte Kurve zur einhüllenden haben.

Wäre etwa die (m)

$$y^2 = ax + b,$$

so drückt sie Parabeln aus, und wenn der Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ die einhüllende Kurve seyn sollte, so wären x und y zu eliminiren aus:

$$y^2 = ax + b,\ x^2 + y^2 = r^2,\ y(2x + a) = 0.$$

Die letzte Gleichung zerfällt in zwei: $y = 0$, $2x + a = 0$. Die erste gibt $b^2 = a^2 r^2$, $b = \pm ar$; die zweite $b = \frac{a^2}{4} + r^2$, so dass also

$$y^2 = ax \pm ar, \text{ oder } y^2 = ax + \frac{a^2}{4} + r^2,$$

von welchen Gleichungen jedoch nur die letzte die Aufgabe löst.

§. 129.

Herstellung der besondern Auflösung aus der Differentialgleichung.

I. Wir haben in §. 126 immer vorausgesetzt, man kenne die allgemeine Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung und haben daraus die besondere Auflösung, wenn eine solche vorhanden war, abgeleitet. Allein in gar manchen Fällen ist man nicht im Stande, das allgemeine Integral aufzufinden und soll trotzdem die besondere Auflösung, die etwa vorhanden ist, ermitteln. Um diess bewerkstelligen zu können, wollen wir nochmals auf das Wesen der besonderen Auflösungen eingehen.

Wir haben gesehen, dass die besondere Auflösung nichts Anderes ist, als die Gleichung der einhüllenden Kurve all' derjenigen Kurven, deren Konstruktion mittelst der gegebenen Differentialgleichung möglich ist. Diese einhüllende Kurve kann aber durch die Differentialgleichung nicht verzeichnet werden, obgleich sie ihr genügt, wie aus den Betrachtungen des §. 126 und §. 90 wohl deutlich hervorgeht. Sehen wir nun näher zu, worin der Grund dieser Unmöglichkeit liegt.

Alle in dem allgemeinen Integral enthaltenen Kurven können vermittelst der gegebenen Differentialgleichung konstruirt werden, und nicht nur die Werthe von y, wie sie aus jeder folgen, sondern auch die von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... genügen der gegebenen Differentialgleichung, und zwar desshalb, weil man auf jeder Kurve n unmittelbar auf einander folgende Punkte annehmen kann, die sich nach dem durch die Differentialgleichung ausgesprochenen Gesetze (das in der Kurve bildlich dargestellt ist) folgen, so dass dann (§. 56, I) die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ..., $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ nothwendig sich aus der Kurve so ergeben müsssen, wie die Differentialgleichung sie geben wird, wenn man dieselbe weiter differenzirt. Könnte man auf der Kurve nur zwei Punkte annehmen,

die unmittelbar auf einander folgen, so würde nur $\frac{\partial y}{\partial x}$ dasselbe seyn, wie aus der Differentialgleichung; könnte man nur drei Punkte annehmen, so würden bloss $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ dieselben seyn, wie aus der gegebenen Differentialgleichung, u. s. w.

Betrachten wir nun die einhüllende Kurve, so liegen von derselben je nur zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte auf einer und derselben von den durch die Differentialgleichung gegebenen Kurven, so dass also auch bloss der aus der einhüllenden Kurve gezogene Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ derselbe ist, wie der aus der Differentialgleichung gezogene, während der aus der einhüllenden Kurve gezogene Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ein anderer seyn muss, als der von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, den man aus der gegebenen Differentialgleichung zieht. Dass es mit den höheren Differentialquotienten dieselbe Bewandtniss haben wird, versteht sich von selbst.

Differenzirt man also die vorgelegte Differentialgleichung nochmals, so muss der so erhaltene Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ verschieden seyn von dem, den die besondere Auflösung gibt, so dass letzterer aus der differenzirten Gleichung nicht gefunden werden kann. Würde man also in die neue Gleichung denjenigen Werth von y einsetzen, der der besonderen Auflösung zukommt, so muss eine Bestimmung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ geradezu unmöglich seyn, und umgekehrt, wenn diese Bestimmung für einen gewählten Zusammenhang zwischen x und y unmöglich ist, so kann dieser Zusammenhang eine besondere Auflösung der Gleichung seyn.

II. Ist nun

$$f(x, y, y_1) = 0, \quad y_1 = \frac{\partial y}{\partial x}, \tag{a}$$

die vorgelegte Differentialgleichung, so folgt aus ihr:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_2 = 0 \tag{b}$$

und eine Bestimmung von $y_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist unmöglich, wenn entweder

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \tag{c}$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \infty, \tag{d}$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \infty, \tag{e}$$

überhaupt wenn

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} \text{ gleich } \infty \text{ oder auch } \frac{0}{0} \qquad (f)$$

ist, das Letztere jedoch nur bei wirklicher Unbestimmtheit.

Eliminirt man nun zwischen (a) und (c), oder (a) und (d), oder (a) und (e) die Grösse y_1, so kann das Resultat der Elimination eine besondere Auflösung seyn.

Wir haben vorausgesetzt, dass die einhüllende Kurve mit jeder der durch (a) dargestellten Kurven nur zwei Punkte gemeinschaftlich habe. Diess ist jedoch nicht unerlässlich, sondern es könnte ganz wohl eine Reihe von mehr Punkten gemeinschaftlich seyn, nur ist diese Anzahl eine immer beschränkte. Daraus folgt, dass es wohl möglich wäre, dass der aus der besonderen Auflösung hervorgehende Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ noch derselbe seyn könnte, wie der aus (a) folgende, aber $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ nicht mehr; oder aber $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ noch in dieser Lage seyn könnte, nicht aber $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, u. s. w.

Daraus ergibt sich aber jetzt sogleich das Kennzeichen, ob eine Gleichung zwischen x und y eine besondere Auflösung der Gleichung (a) ist oder nicht (natürlich vorausgesetzt, sie genüge derselben). Sie wird es nämlich seyn, wenn sie einer der aus (a) durch auf einander folgende Differenzirungen gebildeten Gleichungen nicht genügt. In der Regel wird diess sogleich mit der ersten der Fall seyn.

III. Wir haben so eben gesagt, dass es möglich seyn könnte, dass die einhüllende Kurve mit den eingehüllten mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich habe. Seyen nun

$$f(x,y,c)=0,\ f(x,y,c+\Delta c)=0,\ f(x,y,c+2\Delta c)=0 \qquad (g)$$

die Gleichungen von drei auf einander folgenden Kurven, und es solle die einhüllende Kurve drei Punkte gemeinschaftlich haben, so müsste der Durchschnittspunkt der zwei letzten Kurven auch auf der ersten liegen; zieht man also die Werthe von x und y aus letzteren und setzt sie in die erste ein, so muss diese Gleichung erfüllt seyn. Aus den Gleichungen (g) folgt aber auch:

$$f(x,y,c)=0,\ \frac{f(x,y,c+\Delta c)-f(x,y,c)}{\Delta c}=0,$$

$$\frac{f(x,y,c+2\Delta c)-2f(x,y,c+\Delta c)+f(x,y,c)}{\Delta c^2}=0,$$

d. h. wenn man Δc unendlich klein werden lässt (§. 56, I):

$$f(x,y,c)=0,\ \frac{\partial f(x,y,c)}{\partial c}=0,\ \frac{\partial^2 f(x,y,c)}{\partial c^2}=0, \qquad (g')$$

welche drei Gleichungen die (g) ersetzen und für dieselben Werthe von x und y richtig seyn müssen. Eliminirt man nun x und y zwischen ihnen, so erhält man eine Gleichung in c, die für diese Grösse bestimmte Werthe liefert, * so dass also auch nur für diese bestimmten Werthe von c, d. h. für diejenigen Kurven des Systems, die diesen Werthen entsprechen, die einhüllende Kurve drei Punkte mit derselben eingehüllten gemeinschaftlich hat. Demnach wird unsere obige Regel, dass $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht dürfe bestimmt werden können, vollkommen bestehen bleiben, da immer noch unendlich viele Kurven des eingehüllten Systems vorhanden sind, für welche die einhüllende Kurve in der früher gewählten Lage ist. Eben so aber wird in Bezug auf das Kennzeichen, ob die gefundene Gleichung eine besondere Auflösung ist, oder nicht, die gegebene Regel bestehen bleiben, dass man zuweilen zu höheren Differenzirungen gehen muss, eben weil es doch auch einzelne eingehüllte Kurven geben kann, für die $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ dieselben sind, wie sie aus der gegebenen Differentialgleichung folgen. Bei diesen Differenzirungen kann man, wenn es vorkömmt, diejenigen Faktoren, die zur Bestimmung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ nicht tauglich sind, weglassen, da es ja bloss sich um die Bestimmung dieser Grössen handelt.

Beispiele.

1) $$\sqrt{x}\frac{\partial y}{\partial x} - \sqrt{y} = 0 \text{ gibt } \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}},$$

welche Grösse unendlich wird für $y = 0$. Ersetzt man aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, so ergibt sich aus der vorgelegten Gleichung: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\right)$, während aus $y = 0$ folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Demnach ist $y = 0$ eine besondere Auflösung, wie diess aus dem allgemeinen Integral: $\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$ auch sofort folgt.

2) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 4x\frac{\partial y}{\partial x} + 4y = 0.$$

Hieraus

* Es wäre allerdings denkbar, dass die so erhaltene Gleichung für alle möglichen Werthe von c richtig wäre, wenn sie z. B. hiesse $5c^2 + (1-c)(1+5c) - 4c - 1 = 0$; allein dann würden die Gleichungen (g') oder (g) bestehen, wenn man für c setzte $c + \Delta c$, $c + 2\Delta c$, ..., was darauf hinauskäme, dass alle Durchschnittspunkte auf derselben Kurve lägen, d. h. dass die einhüllende Kurve eine Kurve des Systems wäre, mithin eine besondere Auflösung nicht Statt fände.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}-2x\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\right),$$

welche Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht bestimmt, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}=2x$, woraus dann folgt: $y=x^2$, welcher Werth der Differentialgleichung genügt. Da hieraus nicht folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$, so ist diess eine besondere Auflösung. Das allgemeine Integral ist übrigens (§. 101, I):

$$y=cx-\frac{1}{4}c^2.$$

3) Die Gleichung

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=a^2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

gibt

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}+a^2yx-a^2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\right),$$

so dass $\frac{\partial y}{\partial x}+a^2\left(yx-x^2\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0$ zu einer besonderen Auflösung führen kann. Da hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a^2yx}{a^2x^2-1},\ xy-x^2\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{yx}{a^2x^2-1},\ y-x\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y}{a^2x^2-1},$$

so wird die Gleichung

$$(a^2x^2-1)^2+a^4y^2x^2=a^2y^2,\ a^2y^2(1-a^2x^2)=(a^2x^2-1)^2,\ a^2y^2=1-a^2x^2,$$

eine besondere Auflösung seyn können. Da sie nicht $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ gibt, so ist sie es auch wirklich, während das allgemeine Integral ist (§. 100, Nr. 4, oder auch §. 101, I):

$$y=cx\pm\sqrt{\frac{1+c^2}{a^2}}.$$

§. 130.

Besondere Auflösung für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Für die Differentialgleichungen höherer Ordnung wollen wir nur die der zweiten betrachten, da das Gesagte sich leicht übertragen lässt auch auf höhere Ordnung. Hat man also die Gleichung

$$f\left(x,y,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0 \text{ oder } f(x,y,y_1,y_2)=0, \tag{a}$$

so wird dieselbe, allgemein integrirt, eine Integralgleichung der Form

$$F(x,y,c,c')=0 \tag{b}$$

haben, wo c und c′ die willkürlichen Konstanten sind. Differenzirt man die Gleichung (b), und eliminirt aus ihr selbst und dieser neuen Gleichung c oder c′, so erhält man zwei Gleichungen erster Ordnung mit je einer willkürlichen Konstanten, die beide erste Integralgleichungen von (a) sind (§. 118).

Gesetzt nun, man finde irgend eine Gleichung zwischen x und y, oder zwischen x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, welche der (a) genügt, so wird dieselbe entweder eine besondere Auflösung oder ein besonderes Integral seyn. Soll sie letzteres seyn, so müssen alle Werthe von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$.., wie sie aus (a) folgen), auch aus ihr selbst folgen; geschieht diess nicht, so ist sie nothwendig eine besondere Auflösung. Damit ist dann sofort das Kennzeichen gegeben, wornach man entscheiden kann, ob eine gefundene Gleichung eine besondere Auflösung ist oder nicht.

II. Sey nun

$$\varphi(x, y, y_1, c) = 0 \qquad (c)$$

ein erstes Integral der Gleichung (a) mit einer willkürlichen Konstanten c, so folgt aus ihr durch Differenzirung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_2 = 0,$$

und wenn man c eliminirt zwischen dieser Gleichung und (c), so erhält man (a). Denkt man sich aber, es sey c eine Funktion von x, y, y_1, so würde aus (c) folgen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} y_1 + \frac{\partial c}{\partial y_1} y_2\right) = 0$$

und diese Gleichung würde durch Elimination von c dasselbe Resultat geben, wenn c als Funktion von x, y, y_1 bestimmt wird aus der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0. \qquad (d)$$

Eliminirt man also aus (c) und (d) die Grösse c, so erhält man ganz sicher eine Lösung der Gleichung (a), die wohl eine besondere Auflösung seyn kann.

Hätte man statt der Gleichung (c) die Gleichung

$$\psi(x, y, y_1, c') = 0 \qquad (c')$$

gewählt, wo c' die andere Konstante ist, und die zwei Gleichungen (c) und (c') wesentlich verschieden sind, so hätte man eben so c' zu eliminiren zwischen den Gleichungen

$$\psi(x, y, y_1\, c') = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, y, y_1, c')}{\partial c'} = 0.$$

Allein das Resultat der Elimination wird in beiden Fällen dasselbe seyn. Denn sey wieder (b) das allgemeine Integral von (a), so wird die Gleichung (c) erhalten werden, indem man c' eliminirt zwischen (b) und ihrer Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \text{ oder } F_1(x, y, y_1, c, c') = 0. \qquad (e)$$

Man kann also die Gleichung (c) ersetzen durch (e), wenn man hierin c' als

durch (b) gegeben ansieht. Dadurch wird aber c' als Funktion von c (nebst x und y) erscheinen, und die Gleichung (d) wird jetzt seyn

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}+\frac{\partial F_1}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial c}=0,$$

wo $\frac{\partial c'}{\partial c}$ aus (b) zu nehmen ist. Aus (b) folgt aber

$$\frac{\partial F}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial c}=0,$$

so dass also die Gleichung (d) zu ersetzen ist durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}\frac{\partial F}{\partial c'}-\frac{\partial F_1}{\partial c'}\frac{\partial F}{\partial c}=0. \qquad (f)$$

Eliminirt man also c, c' aus (f), (b), (e), so erhält man die besondere Auflösung. Wir sind hiebei von der Konstanten c ausgegangen: wären wir von c' ausgegangen, so wären natürlich die Gleichungen (b) und (e) dieselben, und sonst hätte man bloss c und c' zu vertauschen. Da aber dadurch die Gleichung (f) sich nicht ändert, so ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

III. Da, wie bereits mehrfach gesagt, die besondere Auflösung jedenfalls der Gleichung (a) genügt, man also für den durch diese Auflösung gegebenen Zusammenhang von x und y sicher die Gleichung (a) hat; man ferner diese Gleichung weiter differenziren darf, um $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ zu bestimmen, endlich aber der aus (a) folgende, nach gewöhnlicher Weise bestimmte Werth von $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ nicht übereinstimmen soll mit dem aus der besonderen Auflösung folgenden, so ersieht man wieder, wie in §. 129, dass man die besondere Auflösung auch erhalten kann dadurch, dass man die Gleichung (a) nochmals differenzirt, und dann mit ihr diejenigen Beziehungen verbindet, mittelst welcher aus der so differenzirten Gleichung (a) eine Bestimmung von $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ unmöglich wird.

IV. Hat man eine besondere Auflösung gefunden, die $\frac{\partial y}{\partial x}$ enthält, und integrirt diese Gleichung, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y mit einer Konstanten, die eine besondere Auflösung von (a) ist. Hat die besondere Auflösung der ersten Ordnung selbst wieder eine besondere Auflösung, so ist letztere eine Gleichung zwischen x und y ohne willkürliche Konstante und das, was man füglich doppelt besondere Auflösung nennen könnte, in so ferne sie der vorgelegten Gleichung genügt.

Beispiele.

1)
$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2-\frac{2}{x}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+1=0$$

gibt

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0.$$

Hier ist eine Bestimmung von $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ nicht möglich, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus, in die vorgelegte eingesetzt, folgt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=x^2,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\pm x,$$

welche beide Werthe der vorgelegten Gleichung genügen. Da

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)x}=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

und wenn man $\frac{\partial y}{\partial x}=\pm x$ setzt, diese Gleichung nicht richtig ist, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\pm x$ eine besondere Auflösung. Daraus folgt

$$y=\pm\frac{1}{2}x^2+c$$

als besondere Auflösung der gegebenen Gleichung.

Das allgemeine Integral ergibt sich nach §. 121:

$$y=c+c'x+\frac{1}{12c'}x^3.$$

2) Die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

hat zum allgemeinen Integral $y=c+\frac{c'}{x}$ (§. 109). Daraus folgt $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{c'}{x^2}$, $c'=-x^2\frac{\partial y}{\partial x}$, $y=c-x\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus keine besondere Auflösung folgt, wie denn diese Gleichung keine zulässt.

3) Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}-y=0 \qquad (g)$$

gibt

$$\left(2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2x\frac{\partial y}{\partial x}+2x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0\ \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0\right),$$

so dass eine besondere Auflösung durch

$$(2+2x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2$$

gegeben seyn kann. Eliminirt man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mittelst dieser Gleichung aus der vorgelegten, so erhält man

$$4\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2x\frac{\partial y}{\partial x}(x^2+2)-4y(1+x^2)-\frac{1}{4}x^4=0. \qquad (h)$$

Diese Gleichung gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x(x^2+2)}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{(1+x^2)(16y+x^4+4x^2)},$$

woraus, wenn

$$16y+x^4+4x^2=z^2,\ \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x=\frac{z}{8}\frac{\partial z}{\partial x}:$$

$$\frac{1}{8}z\frac{\partial z}{\partial x}=\pm\frac{1}{4}z\sqrt{1+x^2},\ z=\pm 2\int\sqrt{1+x^2}\,\partial x=\pm[x\sqrt{1+x^2}+l(x+\sqrt{1+x^2})]+C,$$

d. h.

$$y=-\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}[x\sqrt{1+x^2}+l(x+\sqrt{1+x^2})+c]^2. \qquad (h')$$

Zieht man hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, so genügen sie der Gleichung (g), geben aber nicht $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0$, so dass also (h′) eine besondere Auflösung von (h) ist. Als besondere Auflösung von (h) ergibt sich nach §. 129:

$$y=-\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2, \qquad (h'')$$

welche Gleichung wohl der (h) genügt, nicht aber der (g).

Das allgemeine Integral von (g) ist übrigens (§. 121):

$$y=\frac{1}{2}cx^2+c'x+c^2+c'^2.$$

Achtzehnter Abschnitt.

Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen.

§. 131.

Form der Integralgleichungen.

I. Seyen y, z, u, ... Funktionen von x, die aus folgenden gleichzeitig bestehenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial x^r}, \ldots\right)=0 \\ f'\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\varrho u}{\partial x^\varrho}, \ldots\right)=0, \text{ u.s.w.} \end{array}\right\} (a)$$

so heissen wir diese Gleichungen, deren Anzahl dieselbe ist wie die Zahl der zu bestimmenden Funktionen y, z, u, ..., gleichzeitige Differentialgleichungen, und werden unter ihren Integralgleichungen diejenigen Gleichungen zwischen y, z, ..., und x verstehen, welche die (a) vollständig ersetzen, so dass nicht nur diese Gleichungen (a) daraus sich ergeben, sondern auch alle anderen Gleichungen, die durch etwaige weitere Differenzirung aus (a) folgen. In der Allgemeinheit, wie die Gleichungen (a) aufgestellt

sind, lassen sich gleichzeitige Differentialgleichungen nicht integriren, so dass für die wirkliche Durchführung der Integration die einzelnen Fälle geschieden werden müssen. Dagegen aber werden wir an den allgemeinen Formen auch die allgemeine Gestalt der Integralgleichungen besser erkennen können, wozu wir nun vorerst übergehen wollen.

II. Gesetzt, zwischen den n abhängig Veränderlichen y, z, u, ... und der unabhängig Veränderlichen x seyen n gleichzeitige Differentialgleichungen gegeben, in denen nur Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen und die wir durch

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x,y,z,u,\ldots,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right)=0,\\ f_1\left(x,y,z,u,\ldots,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right)=0,\\ \vdots\\ f_n\left(x,y,z,u,\ldots,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right)=0 \end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

vorstellen wollen. Denkt man sich diese Gleichungen nach $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots$ aufgelöst, so dass etwa

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi_1,\ \frac{\partial z}{\partial x}=\varphi_2,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_3,\ \ldots\ldots, \quad \text{(c)}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots.$ bekannte Funktionen von x, y, z, u, ... sind, so wird man mittelst dieser Gleichungen für jeden Werth von x die zugehörigen Werthe von y, z, u, ... konstruiren können, wenn man nur für einen bestimmten Werth a von x die Werthe von y, z, u, ... willkürlich gewählt hat. Denn dann geben (§. 90) die (c) die zu $x = a$ gehörigen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots$, also dadurch die zu $x = a + \varDelta x$ gehörigen Werthe von y, z, ..., wenn $\varDelta x$ unendlich klein. Dann geben wieder die (c) die zu $x = a + \varDelta x$ gehörigen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots.$, woraus dann wieder die zu $x = a + 2\varDelta x$ gehörenden Werthe von y, z, u, ... folgen u. s. w. Die beliebig gewählten Werthe von x, z, u, ... sind die willkürlichen Konstanten, und es folgt hieraus, dass in den allgemeinen Integralen der Gleichungen (b) n verschiedene willkürliche Konstanten vorkommen müssen.

Dasselbe Resultat kann man auch auf einem etwas verschiedenen Wege erhalten. Man differenzire nämlich jede der Gleichungen (b) noch $n-1$ mal nach x, so erhält man, mit den Gleichungen (b), ein System von n^2 Gleichungen, in denen die Differentialquotienten von y, z, u, ... bis zur n^{ten} Ordnung ansteigen. Aus diesen n^2 Gleichungen eliminire man die Grössen z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, ..., die der Anzahl nach $(n-1)(n+1) =$

$n^2 - 1$ sind, so dass die Elimination immer möglich ist, und wird eine Gleichung zwischen x und y der n^{ten} Ordnung:

$$\psi\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad \text{(d)}$$

erhalten, die nothwendig aus (b) folgt. Kann man diese Gleichung integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y mit n willkürlichen Konstanten, und da bereits behufs der Elimination z, u, ... durch x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ ausgedrückt waren, so kennt man sofort auch diese Grössen als Funktionen von x und der n willkürlichen Konstanten, ohne dass eine weitere Konstante eingeführt würde. Hieraus folgt wieder, dass n willkürliche Konstanten erscheinen müssen, wenn man die allgemeinen Integrale wirklich gefunden haben will.

Wir wollen hier eine gelegentliche Bemerkung beifügen. Die Gleichungen (b) als gegeben vorausgesetzt, sind alle diejenigen Gleichungen richtig, die wir durch Differenzirung daraus ziehen, weil eben x eine unabhängig (also willkürlich) Veränderliche ist; alle Gleichungen, die wir, ohne gegen die Regeln der Rechnung zu verstossen, aus ihnen ziehen, sind ebenfalls richtig, also namentlich die Gleichung (d), so dass y als Funktion von x ganz sicher dieser Gleichung genügt, so wie eben so sicher z, u, ... durch x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wie gefunden wurde, ausgedrückt werden können. Integrirt man die (d), so ist die so erhaltene Gleichung zwischen y und x eine richtige; ob aber die eingetretenen Konstanten alle willkürlich bleiben oder nicht, ist eine ganz andere Frage. Die Integralgleichung von (d) ist nämlich eine richtige Gleichung zwischen x und y, wie auch immer die Konstanten bestimmt werden, und es wäre daher wohl möglich, dass einige dieser Konstanten, weil y und x auch noch anderen Bedingungen genügen müssen, nicht mehr willkürlich blieben, wie wir diess etwa in §. 120 zu sehen Gelegenheit hatten. Diese Bedingungen sind nun, dass die so gefundenen Werthe von y, z, u, ..., in x den Gleichungen (b) genügen. Setzt man also diese Werthe in die (b) ein, so müssen die letzteren für jeden möglichen Werth von x erfüllt seyn, entweder, indem alle n Konstanten ganz unabhängig bleiben, oder indem gewisse Beziehungen zwischen ihnen festgestellt werden müssen, mittelst deren es möglich ist, einige derselben aus den andern zu finden. Im letzteren Falle würden dann in die allgemeinen Integrale der (b) weniger als n willkürliche Konstanten eintreten; aber da ja diese Integrale n solcher Konstanten verlangen, so werden keine Beziehungen obwalten, d. h. die durch Integration von (d) gefundenen willkürlichen Konstanten werden sämmtlich von einander unabhängig bleiben.

III. Da es nach §. 102 nur eine Integralgleichung von (d) mit n willkürlichen Konstanten gibt, so gibt es also auch nur ein System von n Integralgleichungen der (b). Jedes andere, das die (b) ersetzt, muss mithin aus jenem abgeleitet werden können. (Vergl. §. 132, VI.)

IV. Wir wollen nun annehmen, die n gleichzeitigen Differentialgleichungen zwischen den abhängig Veränderlichen y, z, u, ... und der unabhängig Veränderlichen x übersteigen die erste Ordnung, d. h. es kommen auch noch höhere Differentialquotienten dieser abhängig Veränderlichen vor. Wir wollen ferner annehmen, der höchste Differentialquotient von y sey der m^{te}, der von z der r^{te}, der von u der s^{te} u. s. w., und in jeder der vorgelegten

Gleichungen kommen diese höchsten Differentialquotienten oder doch einer derselben vor. Diese Gleichungen seyen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots\ldots, f_n = 0, \tag{e}$$

wo als $f_1, \ldots, f_n$ Funktionen von $x, y, z, u, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^r z}{\partial x^r}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^s u}{\partial x^s}, \ldots$ sind. Man setze nun

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} = y_1, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_2, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} = y_{m-1};\ \frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_2, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}} = z_{r-1}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_2, \ldots, \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x^{s-1}} = u_{s-1};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \tag{f}$$

so werden die Gleichungen (e) nebst (f) folgendes Gleichungssystem bilden:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} = y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x} = y_2, \ldots, \frac{\partial y_{m-2}}{\partial x} = y_{m-1}, f_1\left(x, y, y_1, \ldots, y_{m-1}, \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x}, z, z_1, \ldots, z_{r-1}, \frac{\partial z_{r-1}}{\partial x}, \ldots\right) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x} = z_2, \ldots, \frac{\partial z_{r-2}}{\partial x} = z_{r-1}, f_2\left(x, y, \ldots y_{m-1}, \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x}, z, \ldots, \frac{\partial z_{r-1}}{\partial x}, \ldots\right) = 0, \text{u.s.w.} \end{array}\right\} \tag{g}$$

worin $y_1, \ldots, y_{m-1}, \ldots$ als weitere Veränderliche angesehen werden, und bloss Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen.

Die Anzahl der Veränderlichen, mit Ausschluss von x, ist $m+r+s+\ldots$, und eben so viele Gleichungen erster Ordnung hat man in (g). Behandelt man nun diese $m+r+s+\ldots$ Gleichungen (g) wie oben die (b), so erhält man ein System von $m+r+s+\ldots$ Integralen mit eben so vielen willkürlichen Konstanten, als die allgemeinen Integrale der Gleichungen (e). Dass aber so viele Konstanten nöthig sind, ist leicht zu übersehen. Denn aus (e) kann man $\frac{\partial^m y}{\partial x^m}, \frac{\partial^r z}{\partial x^r}, \frac{\partial^s u}{\partial x^s}, \ldots$ ziehen, ausgedrückt durch $x, y, z, u, \ldots$ und die Differentialquotienten dieser letzteren Grössen. Nimmt man also die $m+r+s+\ldots$ Grössen $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}, \ldots$ für $x = a$ willkürlich an, so kann man daraus (§. 102) $y, z, \ldots$ für jeden Werth von x konstruiren, so dass diese Annahme nothwendig ist.

Unsere ganze Beweisführung setzt wesentlich voraus, dass in jeder der Gleichungen (e) wenigstens einer der Differentialquotienten höchster Ordnung vorkomme; andernfalls würden unter den Gleichungen (g) solche seyn, die gar keine Differentialquotienten enthielten. Ist diess nun der Fall, d. h. sind unter den Gleichungen (e) solche, die keinen der höchsten Differentialquotienten enthalten, so kann man durch mehrmalige Differenzirung der betreffenden Gleichungen diesen Zweck immer erreichen; dann aber werden die $m+r+s+\ldots$ Konstanten nicht mehr alle willkürlich bleiben, sondern gewissen Beziehungen genügen müssen, die man immer aus der Bedingung

finden wird, dass die gefundenen Resultate den gegebenen Gleichungen identisch, d. h. für alle möglichen Werthe von x, genügen müssen.

V. Es lässt sich übrigens in diesem Falle die Anzahl der willkürlichen Konstanten auch zum Voraus ermitteln, wie wir an einem besondern Beispiele näher angeben wollen.

Gesetzt man habe die beiden Gleichungen:

$$f(x, y, y_1, \ldots, y_m, z, z_1, \ldots, z_n) = 0,\ F(x, y, y_1, \ldots, y_\mu, z, z_1, \ldots, z_\nu) = 0, \quad \text{(h)}$$

so wird man nach IV die abhängig Veränderlichen:

$$y, y_1, \ldots; z, z_1, \ldots . \quad \text{(i)}$$

haben und es sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $\mu \overline{\overline{>}} m$, $n \overline{\overline{>}} \nu$. Die Anzahl der Veränderlichen ist jetzt $n + \mu$; die Form die verlangte, so dass man $n + \mu$ Konstanten erhält.

2) $m \overline{\overline{>}} \mu$, $\nu \overline{\overline{>}} n$: die Veränderlichen sind der Zahl nach $m + \nu$, und die Gleichungen haben wieder die gewünschte Form; $m + \nu$ Konstanten.

3) $m \overline{\overline{>}} \mu$, $n \overline{\overline{>}} \nu$. Sey $\nu = n - \alpha$, $\mu = m - \beta$, so sind in der zweiten (h) keine Differentialquotienten erster Ordnung mehr (d. h. keine der höchsten Ordnung). Wir müssen nun unterscheiden:

a) $\alpha > \beta$. Man differenzire die zweite (h) noch β mal, wodurch y zur höchsten Ordnung ansteigt; alsdann hat man $n + m$ Differentialgleichungen (g), wo aber β Integralgleichungen schon bestehen [die zweite (h) und die $\beta - 1$ ersten, durch Differenzirung daraus entstandenen]. Die $n + m$ eintretenden Konstanten müssen also so beschaffen seyn, dass die gefundenen Funktionen diesen β Gleichungen genügen, wodurch nur noch $n + m - \beta$, d. h. $n + \mu$ Konstanten bleiben. Jetzt ist übrigens $n + \mu > m + \nu$.

b) $\alpha < \beta$. Man differenzirt die zweite (h) nach α mal u. s. w. Die Zahl der willkürlich bleibenden Konstanten ist jetzt $m + \nu$, und $m + \nu > n + \mu$.

4) $\mu \overline{\overline{>}} m$, $\nu \overline{\overline{>}} n$. Dieser Fall kommt auf den vorigen zurück, da bloss die zwei Gleichungen (h) getauscht werden.

Daraus ergibt sich nun, dass die allgemeinen (zwei) Integralgleichungen von (h) entweder $m + \nu$, oder $n + \mu$ willkürliche Konstanten enthalten, je nachdem die erste oder zweite dieser Zahlen die grössere ist.

§. 132.

Zurückführung auf eine partielle Differentialgleichung.

I. Jedes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung (und nach §. 131, IV genügt es, solche zu betrachten) zwischen der unabhängig Veränderlichen x und den abhängigen y, z, u, ..., kann, indem man die Gleichungen nach den Differentialquotienten aufgelöst denkt, unter der Form

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = Z,\ \frac{\partial u}{\partial x} = U, \ldots . \quad \text{(a)}$$

dargestellt werden, wo Y, Z, U, ... Funktionen der sämmtlichen Veränderlichen seyn können. Was wir also von einem solchen Systeme erweisen, gilt allgemein. Dieses System von Differentialgleichungen wird integrirt durch ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Konstanten (§. 131, II).

II. Sey nun f eine Funktion der Veränderlichen ohne willkürliche Konstante, c eine beliebige Konstante, so wird die Gleichung

$$f = c \tag{b}$$

eine Integralgleichung von (a) seyn müssen, wenn indem man die (b) vollständig differenzirt, dann $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ... aus (a) ersetzt, eine identisch richtige Gleichung erscheint.

Die (b) liefert aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots = 0, \tag{b'}$$

so dass also (der Annahme nach)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z + \frac{\partial f}{\partial u} U + \ldots = 0 \tag{c}$$

eine identisch richtige Gleichung seyn wird.

Der Beweis dieser Behauptung ist sehr einfach. Neben (b) müssen natürlich noch n—1 Gleichungen bestehen, die wir nach den willkürlichen Konstanten aufgelöst denken wollen, so dass sie sind:

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2,\ \ldots,\ f_{n-1} = c_{n-1}. \tag{d}$$

Wir wollen weiter annehmen, die Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ genügen ebenfalls der (c), d. h. es sey identisch:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x} + \frac{\partial f_r}{\partial y} Y + \frac{\partial f_r}{\partial z} Z + \ldots = 0,\ r = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{e}$$

Alsdann lässt sich leicht zeigen, dass aus (b) und (d) die (a) abgeleitet werden können, so dass also (b) und (d) die Integralgleichungen von (a) sind. Aus (b) und (d), welches n Gleichungen zwischen n + 1 Veränderlichen sind, folgt (§. 68, III):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots = 0, \end{array}\right\} \tag{f}$$

während, der Annahme nach, identisch

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+\ldots=0,\\ \vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}Y+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}Z+\ldots=0.\end{array}\right\}\quad (g)$$

Die Gleichungen (f) und (g) sind je n Gleichungen des ersten Grades zwischen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., und Y, Z, ... Daraus ergibt sich, weil die übrigen Grössen dieselben sind, dass nothwendig

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y, \frac{\partial z}{\partial x}=Z, \ldots$$

seyn muss, * was die (a) sind.

III. Umgekehrt aber wird, wenn die (b) eine der Integralgleichungen von (a) ist, die (c) identisch erfüllt seyn.

Denn ist (b) eine Integralgleichung, so müssen die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, .. aus (a) ihr nothwendig genügen. Setzt man dieselben also in (b′) ein, so muss eine identisch richtige Gleichung erscheinen. Da diess aber die (c) liefert, so ist die Behauptung erwiesen. Man wird dabei bemerken, dass f keine willkürliche Konstante enthalten kann, da sonst ein identisches Erfüllen erst nach Elimination der Konstanten möglich wäre.

Aus II und III ergibt sich nun, dass jede Funktion, welche für f gesetzt, der (c) identisch genügt, eine Integralgleichung von (a) liefert, wenn man sie einer willkürlichen Konstanten gleich setzt; und dass es ausser derartigen Integralgleichungen keine andere geben kann. [D. h. also, wenn F (ohne willkürliche Konstante) nicht der (c) genügt, so ist auch F = C keine Integralgleichung von (a)].

IV. Die Gleichung (c) ist eine partielle Differentialgleichung zwischen x, y, z, ... Kennt man also n Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \quad (h)$$

* Man kann den hieher gehörigen Satz so aussprechen: Aus den beiden Systemen

$$\begin{array}{ll}A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+\ldots=K_1, & A_1\alpha'+B_1\beta'+\ldots=K_1,\\ A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+\ldots=K_2,\ldots \text{ und } & A_2\alpha'+B_2\beta'+\ldots=K_2,\ldots\\ A_n\alpha+B_n\beta+C_n\gamma+\ldots=K_n, & A_n\alpha'+B_n\beta'+\ldots=K_n,\end{array}$$

folgt nothwendig $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$, ... Diess ergibt sich etwa sofort aus der Kramer'schen Regel, die sich im Anhange unter dem Artikel: „Elemente der Theorie der Determinanten mit hieher gehörigen Anwendungen" (II, V), oder auch in meinen „Grundzügen der algebraischen Analysis" §. 204 bewiesen findet.

dieser Veränderlichen (ohne willkürliche Konstanten), die für f gesetzt, jener Gleichung genügen, so ist

$$\varphi_1 = c_1, \ \varphi_2 = c_2, \ \ldots, \ \varphi_n = c_n \qquad \text{(i)}$$

das Integralsystem von (a).

Jede aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_2$ in beliebiger Weise zusammengesetzte Funktion $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ genügt aber auch der (c). Denn es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \ldots, \ \ldots\ldots,$$

so dass, wenn man die F für f in (c) einsetzt, jene Gleichung zu

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}Y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}Z + \ldots\right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}Y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}Z + \ldots\right) + \ldots = 0$$

wird. Aber $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ genügen identisch der (c), so dass

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}Y + \ldots, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}Y + \ldots, \ \ldots\ldots$$

identisch Null sind, woraus folgt, dass obige Gleichung ebenfalls identisch richtig ist.

Demnach kann (II)

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = C \qquad \text{(k)}$$

als eine Integralgleichung von (a) angesehen werden. Diese ist aber von (i) nicht verschieden, da aus den (i) jedenfalls folgt, dass $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine willkürliche Konstante seyn müsse.

V. Obwohl nun jede aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (allein) zusammengesetzte Grösse der (c) genügt, so genügt ihr aber keine, die ausser $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ noch weitere Veränderliche enthält. (Es gibt also nicht mehr als diese n Funktionen.)

Denn sey φ eine Funktion von $x, y, z, \ldots$, welche der (c) genügen soll, so dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \ldots = 0. \qquad \text{(l)}$$

Man setze nun

$$\varphi_1(x, y, \ldots) = \mu_1, \ \varphi_2(x, y, \ldots) = \mu_2, \ \ldots\ldots, \ \varphi_n(x, y, \ldots) = \mu_n, \qquad \text{(m)}$$

so genügen die Grössen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — der Annahme nach — der (c) ebenfalls.

Aus den (m) wollen wir die n Grössen $y, z, u, \ldots$ durch $\mu_1, \ldots, \mu_n, x$ ausdrücken und ihre Werthe in φ einsetzen, wodurch sich diese Grösse in $\psi(x, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ verwandle. Dabei ist natürlich identisch

$$\psi(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \varphi. \qquad \text{(n)}$$

Aus (n) folgt sofort, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z},$$
$$\vdots$$

Setzt man diess in (l), so erhält man:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}Y+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}Z+\ldots\right)\\&+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}Y+\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}Z+\ldots\right)\\&+\ldots\qquad\qquad=0,\end{aligned}$$

welche Gleichung, da $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der (c) genügen, zu

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \qquad (p)$$

wird. Die (p) aber sagt aus, dass ψ von x frei seyn müsse, d. h. bloss φ_1, .., φ_n enthalten könne. Demnach erscheint φ bloss als Funktion dieser Grössen, was behauptet worden.

VI. Aus dem seither Erwiesenen ergeben sich nun einige wichtige Folgerungen. Zunächst nämlich folgt hieraus, dass es nicht mehr als n wirklich von einander verschiedene Integralgleichungen von (a) geben kann, d. h. also ein einziges System solcher (§. 131, III).

Ferner kann die Differentialgleichung (a) des §. 102 nur eine einzige Integralgleichung mit n willkürlichen Konstanten haben.

Denn man kann dieselbe ersetzen (§. 131, IV) durch das System

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x}=y_2, \ldots, \frac{\partial y_{n-2}}{\partial x}=y_{n-1}, f\left(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}\right)=0 \qquad (q)$$

d. h. durch ein System von n gleichzeitigen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen x, y, y_1, .., y_{n-1}, welche die Form (a) haben. Dem Systeme (q) genügt ein einziges Integralsystem mit n willkürlichen Konstanten. Eliminirt man dann zwischen diesen n Gleichungen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, so erhält man die eine Integralgleichung von (a) in §. 102.

§. 133.

Gleichzeitige lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

I. Gleichzeitige lineare Differentialgleichungen der ersten Ordnung enthalten die abhängig Veränderlichen und ihre Differentialquotienten weder in höhern Potenzen, noch mit einander multiplizirt. — Sind die Koeffizienten konstant, so kann man sie unter die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial x}+a_1 y+b_1 z+c_1 u+\ldots=X_1,\\
&\frac{\partial z}{\partial x}+a_2 y+b_2 z+c_2 u+\ldots=X_2,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+a_3 y+b_3 z+c_3 u+\ldots=X_3,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

bringen, wo a, b, c, . . . Konstanten, X_1, X_2, . . . blosse Funktionen von x sind.

Ein System wie (a) kann nun immer durch folgende Methode integrirt werden: Man multiplizire die zweite (a) mit der noch unbestimmten Konstanten α_2, die dritte mit α_3, ..., die letzte mit α_n und setze

$$\left.\begin{aligned}
&X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3+\ldots=X,\\
&y\ +\alpha_2 z\ \ +\alpha_3 u\ \ +\ldots=\varphi;
\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+\ldots=\alpha,\\
&b_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3+\ldots=\alpha\alpha_2,\\
&c_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+\ldots=\alpha\alpha_3,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (b')$$

so geben die (a) wenn sie addirt werden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha(y+\alpha_2 z+\alpha_3 u+\ldots)=X,$$

d. h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha\varphi=X. \qquad (c)$$

Aus dieser Gleichung folgt (§. 92, I):

$$\varphi=e^{-\alpha x}\left[C+\int X e^{\alpha x}\partial x\right], \qquad (c')$$

und es handelt sich vor Allem darum, ob mittelst der Gleichungen (b′) die Bestimmung von α_2, α_3, ..., α_n, α möglich ist. Nun hat man

$$\left.\begin{aligned}
&(b_2-\alpha)\,\alpha_2+b_3\alpha_3+\ldots=-b_1,\\
&c_2\alpha_2+(c_3-\alpha)\,\alpha_3+\ldots=-c_1,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

welche Gleichungen der Anzahl nach n — 1 sind, und zur Bestimmung der Grössen α_2, α_3, ... α_n durch die Konstanten in (a) und α vollkommen ausreichen. Setzt man die so gefundenen Werthe von α_2, . . ., α_n in die Gleichung

$$a_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+\ldots=\alpha, \qquad (B')$$

so erhält man eine Gleichung die ausser den Konstanten der Gleichung (a) bloss noch α enthält. Diese Gleichung ist aber nothwendig vom n^{ten} Grade

in Bezug auf α, wie man sich mittelst der Kramer'schen Regel für die Auflösung der Gleichungen (B) überzeugt. * Sie sey

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + M\alpha^n = 0, \qquad (d)$$

so wird diese Gleichung im Allgemeinen n Werthe von α liefern. Zu jedem Werthe von α gehört aber nach (B) ein einziger bestimmter Werth jeder der Grössen $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so dass man also auch n Systeme von solchen Werthen bekommt. Setzt man nun in (c) einen der n Werthe von α und, wie natürlich, die zugehörigen Werthe von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so hat man:

$$y + \alpha_2 z + \alpha_3 u + \ldots = e^{-\alpha x}[C + \int X e^{\alpha x} \partial x]. \qquad (e)$$

Solcher Gleichungen hat man n (für die n Werthe von α), und da in jeder die Konstante C eine andere seyn wird, so erhält man somit die allgemeinen Integrale der Gleichungen (a) mit n willkürlichen Konstanten.

Am Besten wird man immer verfahren, wenn man in (c) für $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die bereits durch die Auflösung von (B) gefundenen Werthe von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in α einsetzt und nachher α die verschiedenen Werthe beilegt. Folgt aus (B):

$$\alpha_2 = \psi_2(\alpha), \; \alpha_3 = \psi_3(\alpha), \; \ldots, \; \alpha_n = \psi_n(\alpha),$$

wo die Grössen $\psi_2(\alpha), \ldots, \psi_n(\alpha)$ für jeden Werth von α einen einzigen bestimmten Werth erlangen, so ist die (e):

$$y + z\psi_2(\alpha) + u\psi_3(\alpha) + \ldots = e^{-\alpha x}[C + \int X e^{\alpha x} \partial x]$$

d. h.

$$y + z\psi_2(\alpha) + u\psi_3(\alpha) + \ldots = e^{-\alpha x}[C + \int (X_1 + X_2\psi_2(\alpha) + X_3\psi_3(\alpha) + \ldots) e^{\alpha x} \partial x]. \qquad (e')$$

II. Wir haben hiebei offenbar stillschweigend vorausgesetzt, die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (d) seyen reell und verschieden, und müssen also noch folgende besondere Betrachtungen anstellen, wobei wir zugleich an §. 108 erinnern wollen.

1) Es seyen zwar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (d) verschieden, aber einige davon seyen imaginär. Ist nun eine der imaginären Wurzeln $= \beta + \gamma i$, so kommt nothwendig noch eine zweite vor, die $= \beta - \gamma i$ ist. Gesetzt nun, der Bequemlichkeit der Rechnung halber, man habe in der Gleichung (e') den etwa vorkommenden Nenner durch Multiplikation weggeschafft, so werden in dem aus (e') folgenden Systeme von n Gleichungen zwei seyn, die man erhält wenn man $\alpha = \beta \pm \gamma i$ setzt. Dadurch aber hat man zwei Gleichungen der Form

$$U + Vi = 0, \; U - Vi = 0,$$

welche geben:

$$U = 0, \; V = 0,$$

mit den zwei willkürlichen Konstanten C′, C″, so dass diese letzteren Glei-

* Siehe „Grundzüge" S. 204, und auch „Anhang" unter 𝔄, V.

chungen statt der betreffenden zwei zu wählen sind, und zwei Konstanten enthalten. [Man setzt $C = C' + C''i$ in (e')].

2) Die Wurzeln der Gleichung (d) seyen zwar sämmtlich reell, aber nicht alle von einander verschieden.

Stellen wir die Gleichung (e), nachdem sie etwa mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplizirt worden, unter der Form

$$F(\alpha) = 0 \qquad \text{(f)}$$

vor, wo wir uns also Alles auf eine Seite gebracht denken, so muss man in (f) für α die aus (d) gezogenen Werthe von α setzen, dabei C als Funktion von α ansehen, so dass C für einen andern Werth von α auch einen andern Werth erlangt, wo dann schliesslich diese Werthe von C willkürliche Konstanten sind. Gesetzt nun, α', α'', seyen zwei Werthe von α, die aus (d) folgen, und sey

$$\alpha'' = \alpha' + \Delta\alpha,$$

so sind die betreffenden zwei Gleichungen aus (f):

$$F(\alpha') = 0, \quad F(\alpha' + \Delta\alpha) = 0,$$

wo dann C' die eine Konstante, $C'' = C' + \Delta C'$ die andere seyn wird. Statt dieser zwei Gleichungen kann man offenbar auch die folgenden zwei setzen:

$$F(\alpha') = 0, \quad \frac{F(\alpha' + \Delta\alpha) - F(\alpha')}{\Delta\alpha} = 0,$$

welche jene vollständig ersetzen, und wobei nur zu beachten ist, dass $\frac{\Delta C'}{\Delta\alpha}$, was auch $\Delta\alpha$ sey, eine ganz willkürliche Konstante seyn wird. Lässt man hier $\Delta\alpha$ unbegränzt abnehmen, so folgt hieraus dass man die angegebenen zwei Gleichungen ersetzen kann durch

$$F(\alpha') = 0, \quad \frac{dF(\alpha')}{d\alpha'} = 0,$$

worin C' auch als Funktion von α' zu behandeln ist, und $\frac{\partial C}{\partial \alpha'}$ eine neue willkürliche Konstante bildet.

Wird aber $\Delta\alpha$ unendlich klein, so sind α', α'' einander gleich, woraus nun folgt, dass für den Fall zweier gleicher reeller Wurzeln von (d) statt der einen Gleichung (e'), die man jetzt für beide gleiche Wurzeln α' erhält, gesetzt werden muss:

$$F(\alpha) = 0, \quad \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = 0, \quad (\alpha = \alpha'),$$

wo C als Funktion von α zu betrachten, und $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ die neue willkürliche Konstante ist.

Sind drei Wurzeln gleich α', so hat man

$$F(\alpha) = 0, \quad \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = 0, \quad (\alpha = \alpha'),$$

wo $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2}$ die zwei neuen Konstanten sind, u. s. w. (Vergl. IV).

3) Sind endlich gleiche imaginäre Wurzeln der Gleichung (d) vorhanden, so wird man aus der Verbindung von Nr. 1 und 2 leicht das einzuschlagende Verfahren entnehmen können.

III. Wir haben seither vorausgesetzt, die vorgelegten linearen Differentialgleichungen seyen bloss der ersten Ordnung. Diess ist jedoch nicht nothwendig; sind sie auch von höherer Ordnung, so wird man, gemäss §. 131, dieselben immer auf die Form linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen können, wo sodann das eben angegebene Verfahren wieder vollständig eintritt. Wir werden in den nachfolgenden Beispielen einige Fälle dieser Art behandeln.

Unmittelbarer Beweis der in II aufgestellten Sätze.

IV. Die Gleichung (e′) ist

$$e^{\alpha x}[y+z\psi_2(\alpha)+u\,\psi_3(\alpha)+..]-\int[X_1+X_2\,\psi_2(\alpha)+X_3\,\psi_3(\alpha)+\ldots]\,e^{\alpha x}\,\partial x=C. \tag{g}$$

Gesetzt nun die Gleichung (d) habe $m+1$ gleiche Wurzeln, jede $=\alpha_1$, so gilt die (B′) noch, wenn sie $r$mal nach α differenzirt wird, d. h. man hat (für $\alpha=\alpha_1$): *

$$a_2\,\psi_2{}^r(\alpha)+a_3\,\psi_3{}^r(\alpha)+\ldots.=0,\ r\overline{\overline{<}}m, \tag{h}$$

wo die zweite Seite 1 ist, wenn $r=1$. Da die (B) identisch erfüllt sind, wenn man $\psi_2(\alpha)$ für $\alpha_2, \ldots$ setzt, so kann man sie beliebig viele Male nach α differenziren, so dass also auch

$$\left.\begin{array}{l}-r\,\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+(b_2-\alpha)\,\psi_2{}^r(\alpha)+b_3\,\psi_3{}^r(\alpha)+\ldots.=0,\\ -r\,\psi_3{}^{r-1}(\alpha)+c_2\,\psi_2{}^r(\alpha)+(c_3-\alpha)\,\psi_3{}^r(\alpha)+\ldots.=0,\\ \quad\vdots\end{array}\right\} \tag{h'}$$

Bezeichnet man nun die erste Seite der (g) mit $F(\alpha)$, so behaupte ich, dass auch

$$F^r(\alpha)=C'\ (r\overline{\overline{<}}m) \tag{i}$$

wo C' eine willkürliche Konstante, der (a) als Integralgleichung genüge. — Dazu gehört nach §. 132, II dass

$$\frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial y}[X_1-(a_1\,y+b_1\,z+..)]+\frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial z}[X_2-(a_2\,y+b_2\,z+\ldots)]+\ldots=0 \tag{k}$$

sey. Es ist aber

---

* Die (d) ist nicht kurzweg die (B′), vielmehr ist letztere mit dem allen Grössen α_2, α_3, ... gemeinschaftlichen Nenner $\varphi(\alpha)$, welcher des $n-1^{\text{ten}}$ Grades ist, multiplizirt worden. Ist also die (B′) durch $f(\alpha)=0$ bezeichnet, so ist die (d): $\varphi(\alpha)f(\alpha)=0$. Aber für $\alpha=\alpha_1$: $f(\alpha)\varphi(\alpha)=0$, $\frac{\partial}{\partial\alpha}[f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)]=0$, ..., $\frac{\partial^r[f(\alpha)\varphi(\alpha)]}{\partial\alpha^r}=0$. Da nicht $\varphi(\alpha)=0$, so ist $f(\alpha)=0$ (wie angenommen). Dann gibt die zweite Gleichung auch $f'(\alpha)=0$, woraus die dritte liefert: $f''(\alpha)=0$, u. s. w. bis $f^r(\alpha)=0$. (Vergl. Note zu §. 108, III.)

$$\frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial x}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\Big\{\alpha e^{\alpha x}[y+z\psi_2(\alpha)+u\psi_3(\alpha)+..]-e^{\alpha x}[X_1+X_2\psi_2(\alpha)+X_3\psi_3(\alpha)+\ldots]\Big\},$$

$$\frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial y}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\;e^{\alpha x};\quad \frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial z}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}[e^{\alpha x}\psi_2(\alpha)],\quad \frac{\partial F^r(\alpha)}{\partial u}=\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}[e^{\alpha x}\psi_3(\alpha)],\ldots.$$

Weiter

$$\frac{\partial^r}{\partial\alpha^r}\Big\{\alpha e^{\alpha x}[y+z\psi_2(\alpha)+..]\Big\}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\Big\{e^{\alpha x}[y+z\psi_3(\alpha)+..]\Big\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{e^{\alpha x}[z\psi_2{}^r(\alpha)+u\psi_3{}^r(\alpha)+..]+\frac{r}{1}x e^{\alpha x}[z\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+\ldots]$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2 e^{\alpha x}[z\psi_2{}^{r-2}(\alpha)+..]+\ldots.+e^{\alpha x}x^r\;[y+z\psi_2(\alpha)+..]\Big\}$$

$$=\alpha e^{\alpha x}[z\psi_2{}^r(\alpha)+\ldots]+\frac{r}{1}e^{\alpha x}(1+\alpha x)[z\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+..]$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}e^{\alpha x}(2x+\alpha x^2)[z\psi_1{}^{r-1}\alpha+..]+\ldots.+e^{\alpha x}(rx^{r-1}+\alpha x^r)\;[y+z\psi_2(\alpha)+..].$$

Desshalb wird die (k):

$$\alpha e^{\alpha x}[z\psi_2{}^r(\alpha)+\ldots]+\frac{r}{1}e^{\alpha x}(1+\alpha x)\;[z\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+\ldots]$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}e^{\alpha x}(2x+\alpha x^2)[z\psi_2{}^{r-2}(\alpha)+..]+\ldots+e^{\alpha x}[rx^{r-1}+\alpha x^r][y+z\psi_2(\alpha)+..]$$

$$-e^{\alpha x}[X_2\psi_2{}^r(\alpha)+X_3\psi_3{}^r(\alpha)+..]-\frac{r}{1}x e^{\alpha x}[X_2\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+..]$$

$$-\frac{r(r-1)}{1.2}x^2 e^{\alpha x}[X_2\psi_2{}^{r-2}(\alpha)+\ldots]-\ldots..-x^r e^{\alpha x}[X_1+X_2\psi_2(\alpha)+..]$$

$$+x^r e^{\alpha x}[X_1-(a_1 y+b_1 z+..)]+e^{\alpha x}[\psi_2{}^r(\alpha)+rx\psi_2{}^{r-1}(\alpha)$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2\psi_2{}^{r-2}(\alpha)+..]\;[X_2-(a_2 y+b_2 z+..)]$$

$$+e^{\alpha x}[\psi_3{}^r(\alpha)+rx\psi_3{}^{r-1}(\alpha)+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2\psi_3{}^{r-2}(\alpha)+..][X_3-(a_3 y+b_3 z+..)]+..=0,$$

d. h.

$$y[-a_2\psi_2{}^r(\alpha)-a_3\psi_3{}^r(\alpha)-..]+rxy[-a_2\;\psi_2{}^{r-1}(\alpha)-a_3\psi_3{}^{r-1}(\alpha)-..]$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2 y[-a_2\psi^{r-2}(\alpha)-a_3\psi^{r-2}(\alpha)-..]+\ldots..$$

$$+rx^{r-1}y[1-a_2\psi'_2(\alpha)-a_3\psi'_3(\alpha)-..]+x^r y[\alpha-a_1-a_2\psi_2(\alpha)-..]$$

$$+z[\alpha\psi_2{}^r(\alpha)-b_2\psi_2{}^r(\alpha)-b_3\psi_3{}^r(\alpha)-..\;+r\psi_2{}^{r-1}(\alpha)]$$

$$+u[\alpha\psi_3{}^r(\alpha)+r\psi_3{}^{r-1}(\alpha)-c_2\psi_2{}^r(\alpha)-c_3\psi_3{}^r(\alpha)-..]+\ldots..$$

$$+rxz[\alpha\psi_2{}^{r-1}(\alpha)+(r-1)\psi_2{}^{r-2}(\alpha)-b_2\psi_2{}^{r-1}(\alpha)-b_3\psi_3{}^{r-1}(\alpha)-..]$$

$$+rxu[\alpha\psi_3{}^{r-1}(\alpha)+(r-1)\psi_3{}^{r-2}(\alpha)-c_2\psi_3{}^{r-1}(\alpha)-..]+\ldots.$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}x^2 z[\alpha\psi_2{}^{r-2}(\alpha)-b_2\psi_2{}^{r-2}(\alpha)-\ldots+(r-2)\psi_2{}^{r-3}(\alpha)]+\ldots$$

$$\vdots$$

$$+x^r z[\alpha\psi_2(\alpha)-b_1-b_2\psi_2(\alpha)-b_3\psi_3(\alpha)-..]$$

$$+x^r u[\alpha\psi_3(\alpha)-c_1-c_3\psi_3(\alpha)-..]+\ldots.=0.$$

Wegen der (B) und (B'), so wie weil die (h) und (h') für $r = 1, 2, \ldots, m$ gelten, ist aber diese Gleichung identisch richtig, somit (i) eine Integralgleichung des Systems (a).

Dass damit auch die Form in II als richtig erkannt ist, unterliegt keiner Beanstandung.

§. 134.

Beispiele zu §. 133.

1)
$$9\frac{\partial y}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial x} + 49y + 44z = x,$$
$$7\frac{\partial y}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial x} + 38y + 34z = e^x.$$

Die allgemeinen Integralgleichungen müssen zwei willkürliche Konstanten umfassen. Man hat zuerst

$$\frac{\partial y}{\partial x} + 5y + 4z = 4e^x - 3x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + y + 2z = 7x - 9e^x.$$

$$5 + \alpha_2 = \alpha, \; 4 + 2\alpha_2 = \alpha\alpha_2; \; \alpha_2 = \alpha - 5, \; \alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0; \; \alpha = 6 \text{ und } 1.$$

$$X = 4e^x - 3x + \alpha_2(7x - 9e^x) = (49 - 9\alpha)e^x + (7\alpha - 38)x, \; \varphi = y + (\alpha - 5)z.$$

$$\varphi = e^{-\alpha x}\left[C + \int\left\{(49 - 9\alpha)e^x + (7\alpha - 38)x\right\}e^{\alpha x}\partial x\right]$$

$$\varphi = Ce^{-\alpha x} + \frac{49 - 9\alpha}{\alpha + 1}e^x + \frac{7\alpha - 38}{\alpha}x - \frac{7\alpha - 38}{\alpha^2};$$

also hat man für $\alpha = 6$ und 1:

$$y + z = C_1 e^{-6x} - \frac{5}{7}e^x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}, \qquad y = \frac{4}{5}C_1 e^{-6x} + \frac{1}{5}C_2 e^{-x} + \frac{24}{7}e^x - \frac{17}{3}x + \frac{55}{9},$$

$$y - 4z = C_2 e^{-x} + 20e^x - 31x + 31, \qquad z = -\frac{1}{5}C_2 e^{-x} + \frac{1}{5}C_1 e^{-6x} - \frac{29}{7}e^x + \frac{19}{3}x - \frac{56}{9}.$$

2)
$$9\frac{\partial y}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial x} + 31y + 11z = 0,$$
$$7\frac{\partial y}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial x} + 24y + 8z = x,$$

woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} + 3y - z = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + y + 5z = -9x.$$

$$-1 + 5\alpha_2 = \alpha\alpha_2, \; 3 + \alpha_2 = \alpha; \; \alpha_2 = \alpha - 3, \; \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0, \text{ d. h. } (\alpha - 4)^2 = 0,$$
$$\alpha = 4 \text{ doppelt.}$$

$$X = 4x - 9\alpha_2 x = (31 - 9\alpha)x, \; \varphi = y + (\alpha - 3)z, \; \int X e^{\alpha x}\partial x = \frac{(31 - 9\alpha)}{\alpha}x e^{\alpha x} - \frac{31 - 9\alpha}{\alpha^2}e^{\alpha x}.$$

$$y + (\alpha - 3)z = Ce^{-\alpha x} + \frac{31 - 9\alpha}{\alpha}x - \frac{31 - 9\alpha}{\alpha^2},$$

$$\alpha^2 y + (\alpha^3 - 3\alpha^2)z = Ce^{-\alpha x} + (31\alpha - 9\alpha^2)x - (31 - 9\alpha),$$

wenn wir $C\alpha^2 = C$ setzen.

---

* Die Hinweisungen beziehen sich natürlich auf §. 133.

Differenzirt man nach α, so hat man:

$$2\alpha y + (3\alpha^2 - 6\alpha) z = - C x e^{-\alpha x} + C' e^{-\alpha x} + (31 - 18\alpha) x + 9,$$

und wenn man $\alpha = 4$ setzt:

$$16y + 16z = C e^{-4x} - 20x + 5, \; 8y + 24z = - C x e^{-4x} + C' e^{-4x} - 41x + 9,$$

woraus:

$$y = \frac{C e^{-4x}}{32}(3+2x) - \frac{C'}{16} e^{-4x} + \frac{11}{16} x - \frac{3}{32}, \; z = - \frac{C e^{-4x}}{32}(1+2x) + \frac{C' e^{-4x}}{16} - \frac{31}{16} x + \frac{13}{32}.$$

3) $$\frac{\partial y}{\partial x} + 3y - 2z = x, \; \frac{\partial z}{\partial x} + y + 5z = e^x.$$

$$3 + \alpha_2 = \alpha, \; -2 + 5\alpha_2 = \alpha\alpha_2; \; \alpha_2 = \alpha - 3, \; \alpha^2 - 8\alpha + 17 = 0, \; \alpha = 4 \pm i.$$

$$X = x + (\alpha - 3) e^x, \; \varphi = y + (\alpha - 3) z.$$

$$y + (1+i) z = e^{-\alpha x}[C + \int X e^{\alpha x} \partial x] = e^{-4x}[\cos x - i \sin x] [C + C' i$$

$$+ \int \left\{x + (1+i) e^x\right\} e^{(4+i)x} \partial x] = e^{-4x} (\cos x - i \sin x) [C + C' i + \frac{1+i}{5+i} e^{(5+i)x}$$

$$+ \frac{x e^{(4+i)x}}{4+i} - \frac{e^{(4+i)x}}{(4+i)^2}] = (\cos x - i \sin x) [(C + C' i) e^{-4x} + \frac{6+4i}{26} e^x (\cos x + i \sin x)$$

$$+ \frac{(4-i)x}{17} (\cos x + i \sin x) - \frac{15 - 8i}{17^2} (\cos x + i \sin x)].$$

Multiplizirt man die zweite Seite aus und setzt beiderseitig das Reelle und Imaginäre gleich, so erhält man

$$y + z = (C \cos x + C' \sin x) e^{-4x} + \frac{3}{13} e^x + \frac{4}{17} x - \frac{15}{17^2},$$

$$z = (C' \cos x - C \sin x) e^{-4x} + \frac{2}{13} e^x - \frac{1}{17} x + \frac{8}{17^2},$$

4) $$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a x + b y + c z = T_1,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a' x + b' y + c' z = T_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a'' x + b'' y + c'' y = T_3,$$

wo T_1, T_2, T_3 blosse Funktionen von t sind. Bei der hier vorkommenden besonderen Form kann man das obige Verfahren ebenfalls anwenden, nur wird in der Gleichung (c) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ an die Stelle von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ treten. Man hat also:

$$a + a' \alpha_2 + a'' \alpha_3 = \alpha, \; b + b' \alpha_2 + b'' \alpha_3 = \alpha\alpha_2, \; c + c' \alpha_2 + c'' \alpha_3 = \alpha\alpha_3,$$

woraus

$$\alpha_2 = \frac{c b'' - b (c'' - \alpha)}{(b' - \alpha)\,(c'' - \alpha) - b'' c'}, \; \alpha_3 = \frac{b c' - c (b' - \alpha)}{(b' - \alpha)\,(c'' - \alpha) - b'' c'},$$

$$(a - \alpha)(b' - \alpha)(c'' - \alpha) - b'' c' (a - \alpha) - a' b (c'' - \alpha) - a'' c (b' - \alpha) + a' c b'' + a'' b c' = 0,$$

welch letztere Gleichung drei Werthe für α gibt, woraus dann auch drei Werthe für α_2, α_3 folgen. Ist nun $\varphi = x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, so hat man für $T = T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \varphi = T,$$

woraus (§. 117, Nr. 1), da dort $m_1 = \sqrt{-\alpha}$, $m_2 = -\sqrt{-\alpha}$:

$$x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} [e^{t\sqrt{-\alpha}} \int T e^{-t\sqrt{-\alpha}} \partial t - e^{-t\sqrt{-\alpha}} \int T e^{t\sqrt{-\alpha}} \partial t]$$
$$+ C e^{t\sqrt{-\alpha}} + C' e^{-t\sqrt{-\alpha}}.$$

Setzt man hier für α seine drei Werthe, und natürlich für α_2, α_3 die entsprechenden, so erhält man drei Gleichungen mit sechs willkürlichen Konstanten, die die Aufgabe lösen.

5) Die Gleichungen

$$A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + .. + ax + by + cz + .. = T,$$
$$A' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + .. + a'x + b'y + c'z + .. = T',$$
$$A'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C'' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + .. + a''x + b''y + c''z + .. = T'', \text{ u. s. w.},$$

welche in der Mechanik vorkommen (Lagrange, Mécanique analytique, VI section; Poisson, Mechanik, II, §. 545), werden in derselben Weise behandelt. Man zieht aus ihnen $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$,... und erhält genau die Form der oben behandelten Gleichungen. Sind die Werthe von α positiv, so ist $\sqrt{-\alpha}$ imaginär und $e^{t\sqrt{-\alpha}}$ wird zu $\cos(t\sqrt{\alpha}) + i \sin(t\sqrt{\alpha})$, wie bekannt.

6)
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{a+b-c}{b} m \frac{\partial y}{\partial t} - 4m^2 \frac{a-c}{b} x = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{a+b-c}{b} m \frac{\partial x}{\partial t} - m^2 \frac{b-c}{a} y = 0,$$

welche Gleichungen in den Untersuchungen über die Mondsbewegung vorkommen. (Vergl. Pontécoulant: Théorie analytique du système du monde, II, §. 238.)

Man setze $\frac{\partial x}{\partial t} = x_1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = y_1$, so hat man vier abhängig Veränderliche: x, y, x_1, y_1 und dazu die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - x_1 = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} - y_1 = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{a+b-c}{b} m y_1 - 4m^2 \frac{a-c}{b} x = 0,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{a+b-c}{a} m x_1 - \frac{b-c}{a} m^2 y = 0.$$

Daraus nun, wenn man die vier Grössen in folgender Weise ordnet: x, y, x_1, y_1

$$-4m^2 \frac{a-c}{b} \alpha_3 = \alpha, \quad -\frac{b-c}{a} m^2 \alpha_4 = \alpha \alpha_2, \quad -1 + \frac{a+b-c}{a} m \alpha_4 = \alpha \alpha_3,$$
$$-\alpha_2 - \frac{a+b-c}{b} m \alpha_3 = \alpha \alpha_4;$$

woraus folgt:

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha b}{4m^2(a-c)}, \quad \alpha_4 = \frac{4m^2(a-c) - b\alpha^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a, \quad \alpha_2 = \frac{(b-c)[b\alpha^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\alpha},$$

$$\alpha^4 + \left[\frac{(a+b-c)^2}{ab} - 4\frac{a-c}{b} - \frac{b-c}{a}\right] m^2\alpha^2 + 4\frac{a-c}{b}\frac{b-c}{a} m^4 = 0;\ X = 0;$$

$$\varphi = x + \alpha_2 y + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 y_1.$$

Also

$$x + \frac{(b-c)[b\alpha^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\alpha} y - \frac{b\alpha}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) - b\alpha^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C e^{-\alpha t}.$$

Die Grössen a, b, c sind immer positiv, eben so ist $c > b > a$; daraus folgt, dass wenn die obige biquadratische Gleichung nach α^2 aufgelöst wird, für α^2 zwei Werthe folgen werden, gegeben durch

$$\alpha^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + (c-b)b] \\ \pm\sqrt{-4(c-a)(c-b)ab + \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + (c-b)b]^2} \end{array}\right\}}{ab} m^2,$$

welche Werthe reell und beide negativ sind, indem

$$-4(c-a)(c-b)ab + \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + (c-b)b]^2 = \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a - (c-b)b]^2 + b(c-b)(a+b-c)^2.$$

Daraus folgt, dass die vier Werthe von α imaginär sind. Seyen dieselben also $= \pm\beta i,\ \pm\beta' i$, so hat man:

$$x + \frac{(b-c)[-b\beta^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta i} y - \frac{b\beta i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_1(\cos\beta t - i\sin\beta t),$$

$$x - \frac{(b-c)[-b\beta^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta i} y + \frac{b\beta i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_2(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

$$x + \frac{(b-c)[-b\beta'^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta' i} y - \frac{b\beta' i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_3(\cos\beta' t - i\sin\beta' t),$$

$$x - \frac{(b-c)[-b\beta'^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta' i} y + \frac{b\beta' i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_4(\cos\beta' t + \sin\beta' t),$$

woraus, wenn man $C_1 = C + C'i,\ C_2 = C - C'i,\ C_3 = C_1 + C_1'i,\ C_4 = C_1 - C_1'i$ setzt:

$$x + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C\cos\beta t + C'\sin\beta t,\quad x + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t,$$

$$\frac{(b-c)[b\beta^2 + 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta} y - \frac{b\beta}{4m^2(a-c)} x_1 = -C\sin\beta t + C'\cos\beta t,$$

$$\frac{(b-c)[b\beta'^2 + 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta'} y - \frac{b\beta'}{4m^2(a-c)} x_1 = -C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t,$$

und hieraus endlich

$$x = \frac{4m^2(a-c)+b\beta'^2}{b(\beta'^2-\beta^2)}[C\cos\beta t + C'\sin\beta t] - \frac{4m^2(a-c)+b\beta^2}{b(\beta'^2-\beta^2)}[C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t],$$

$$y = \frac{\beta\beta'^2(a+b-c)}{(\beta'^2-\beta^2)(b-c)m}[-C\sin\beta t + C'\cos\beta t] - \frac{\beta^2\beta'(a+b-c)}{(\beta'^2-\beta^2)(b-c)m}[-C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t].$$

Uebrigens ist auch

$$\beta^2\beta'^2 = \frac{4(a-c)(b-c)}{ab}m^4,\ \beta'^2 = \frac{4(a-c)(b-c)}{ab\beta^2}m^4,\ \beta^2 = \frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2},$$

so dass man auch hat:

$$x = \frac{4(a-c)m^2}{b\beta^2}\cdot\frac{\beta^2+\frac{b-c}{a}m^2}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta^2}-\beta^2}[C\cos\beta t + C'\sin\beta t]$$

$$+\frac{4(a-c)m^2}{b\beta'^2}\cdot\frac{\beta'^2+\frac{b-c}{a}m^2}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2}-\beta'^2}[C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t],$$

$$y = \frac{4(a-c)m^3}{b\beta}\cdot\frac{\frac{a+b-c}{a}}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta^2}-\beta^2}[-C\sin\beta t + C'\cos\beta t]$$

$$+\frac{4(a-c)m^3}{b\beta'}\cdot\frac{\frac{a+b-c}{a}}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2}-\beta'^2}[-C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t],$$

und wenn man diese Gleichungen auf die Form

$$x = E\sin(\beta t+\gamma) + E'\sin(\beta' t+\gamma'),$$
$$y = E_1\cos(\beta t+\gamma) + E'_1\cos(\beta' t+\gamma'),$$

bringt, so sind γ und γ' willkürliche Konstanten, eben so E und E', während

$$E_1 = \frac{m\beta\frac{a+b-c}{a}}{\beta^2+\frac{b-c}{a}m^2}E,\quad E'_1 = \frac{m\beta'\frac{a+b-c}{a}}{\beta'^2+\frac{b-c}{a}m^2}E'.$$

Unter der letzteren Form werden diese Resultate in der Astronomie benützt.

7) Setzt man in den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ax - b\cos nt(x\cos nt + y\sin nt) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ay - b\sin nt(x\cos nt + y\sin nt) = 0:$$

$$x\cos nt + y\sin nt = u,$$
$$x\sin nt - y\cos nt = v,$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b-a+n^2)u + 2n\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (n^2 - a) v - 2n \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

die wie in Nr. 6 behandelt werden. Endlich ist dann

$$x = u \cos n t + v \sin n t,$$
$$y = u \sin n t - v \cos n t.$$

§. 135.

Beispiele der Integration gleichzeitiger Differentialgleichungen beliebiger Form.

Haben die vorgelegten Differentialgleichungen nicht die in §. 133 angegebene Form, so kann man entweder das in §. 131 im Allgemeinen angegebene Verfahren der Zurückführung auf eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung anwenden, oder nach §. 132 die Auflösung versuchen. Eben so werden im besondern Falle Mittel angewendet werden können, die für diesen Fall geeignet sind, wie wir diess nun an einer Anzahl von Beispielen näher betrachten wollen.

I. $\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial y}{\partial t},$

(vergl. Poisson, Mechanik, II, §. 463). Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\frac{\partial y}{\partial t}},$$

woraus, indem man integrirt:

$$l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + l(C) = l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = C \frac{\partial x}{\partial t},$$

wenn C die willkürliche Konstante. Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so hat man

$$\sqrt{1 + C^2}\, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{a t}{\sqrt{1 + C^2}} + C', \; x = \frac{a t^2}{2\sqrt{1 + C^2}} + C' t + C'',$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{C a t}{\sqrt{1 + C^2}} + C C', \; y = \frac{C a t^2}{2\sqrt{1 + C^2}} + C C' t + C''',$$

so dass die Integrale der gegebenen Gleichungen mit den vier Konstanten: C, C′, C″, C‴ gefunden sind.* Setzt man $C = tg\, \alpha$, also $\frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} = \sin \alpha, \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} = \cos \alpha,$ so ist auch

---

* Man kann hier einen Einwand erheben, den nämlich, dass $\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$ nicht kurzweg $= \frac{\partial x}{\partial t} \sqrt{1 + C^2}$, sondern $= \pm \frac{\partial x}{\partial t} \sqrt{1 + C^2}$ zu setzen sey. Alsdann fände sich $x = \pm \frac{a t^2}{2\sqrt{1 + C^2}} + C' t + C''$, $y = \pm \frac{a C t^2}{2\sqrt{1 + C^2}} + C C' t + C'''$. Setzt man dann $C = tg\, \alpha$,

$$x = \frac{a t^2 \cos\alpha}{2} + c' t + c'', \quad y = \frac{a t^2 \sin\alpha}{2} + tg\,\alpha\, c' t + c'''$$

Poisson setzt noch $c' = c \cos\alpha$, um zu erhalten:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (a t + c) \cos\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = (a t + c) \sin\alpha,$$

wo dann c und α die willkürlichen Konstanten sind.

Bewegung des Schwerpunkts der Planeten.

II. Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft die immer nach demselben festen Punkte gerichtet ist, und deren Intensität im Verhältnisse des Quadrats der Entfernung abnimmt; man soll seine Bewegung untersuchen.

Die hier angegebene Aufgabe ist die der Bewegung (des Schwerpunkts) der Himmelskörper, in so ferne man nur die anziehende Kraft der Sonne in Betracht zieht. Es lässt sich überdiess leicht beweisen, dass die Bewegung nothwendig in einer Ebene vor sich gehen muss die durch den festen Punkt geht, was wir nun geradezu voraussetzen wollen.

Sey also k die Intensität der wirksamen Kraft, wenn der bewegte Punkt (Körper) in einer Entfernung $= 1$ ist, so wird dieselbe $= \frac{k}{r^2}$ seyn, wenn die Entfernung r beträgt. Wir wollen weiter den festen Punkt zum Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten (x und y) wählen, die natürlich in der Ebene liegen, in der die Bewegung geschieht und annehmen, x und y seyen die Koordinaten des bewegten Punktes am Ende der Zeit t, r alsdann seine Entfernung von dem festen Punkte. Die wirksame Kraft $\frac{k}{r^2}$ zerlegen wir in zwei, die nach den Axen der x und y gerichtet sind, und gleich $\frac{kx}{r^3}$, $\frac{ky}{r^3}$ seyn werden, da $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ die Cosinus der Winkel sind, die r, d. h. die Richtung der Kraft, mit den Axen macht. Da diese Seitenkräfte die x und y zu verkürzen streben, so hat man (§. 20, VIII):

$$\frac{p}{g} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \frac{p}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{ky}{r^3},$$

oder wenn $\frac{gk}{p} = \mu$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{(a)}$$

---

so ist $\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm \sin\alpha$, $\frac{1}{\sqrt{1+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm \cos\alpha$, also $\sin\alpha = \pm \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, $\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}$. Ist α im ersten Quadranten ($C > 0$), so gelten in beiden Ausdrücken die obern Zeichen; ist α im zweiten Quadranten ($C < 0$), die untern; für den dritten Quadranten ($C > 0$) die untern; für den vierten ($C < 0$) die obern. Es gelten also immer dieselben Zeichen und man hat $x = \frac{at^2}{2} \cos\alpha + c' t + c''$, $y = \frac{at^2}{2} \sin\alpha + c' t\, tg\,\alpha + c'''$. — Man wird jedoch dieser Untersuchung überhoben seyn, wenn man schliesslich nachsieht, ob die gefundenen Formeln den gegebenen Differentialgleichungen genügen.

welche Gleichungen nun zu integriren sind. Man zieht zunächst aus denselben:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0, \text{ d. h. } \frac{d}{dt}\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)=0,\ x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=c, \qquad (b)$$

wo c eine willkürliche Konstante ist, deren Werth jedoch reell seyn wird, da x, y und ihre Differentialquotienten ebenfalls reell sind. Es ist aber auch

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \text{ also } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y},$$

so dass

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}(\text{§. } 15)=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

folglich

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+c_1, \qquad (c)$$

wo c_1 eine weitere (ebenfalls reelle) Konstante ist. Aus (b) folgt:

$$x^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-2xy\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+y^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=c^2,$$

d. h.

$$(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=c^2,$$

so dass, wenn man die Gleichungen $x^2+y^2=r^2$, $r\frac{dr}{dt}=x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}$ beachtet, aus (c) hervorgeht:

$$r^2\left(\frac{2\mu}{r}+c_1\right)-\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=c^2,\ r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=2\mu r+c_1 r^2-c^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\pm\frac{\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}}{r},\ t+c_2=\pm\int\frac{r\,\partial r}{\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}}(\text{§. } 91), \qquad (d)$$

wo c_2 eine dritte Konstante ist, und das obere Zeichen gilt wenn r wächst mit wachsendem t, das untere wenn r abnimmt mit wachsendem t (§. 20, I).

Führen wir für x und y die Polarkoordinaten r und ω ein, so dass $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$, und $\frac{\partial x}{\partial t}=-r\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\cos\omega\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}=r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sin\omega\frac{\partial r}{\partial t}$, $x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=r^2\frac{\partial\omega}{\partial t}$; wählen ferner die Richtung der Kordinatenaxen so, dass ω wächst mit t (was immer möglich ist, da diese Wahl uns freisteht), so ist $r^2\frac{\partial\omega}{\partial t}>0$, also die Konstante c positiv. Die (b) heisst dann

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{c}{r^2}. \qquad (b')$$

Ferner ist immerhin r als Funktion von ω anzusehen (vermöge der Gleichung der Kurve die der bewegte Punkt beschreibt), so dass $\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}$ (§. 13) und da $\frac{\partial r}{\partial t}$ aus (d) bekannt ist, so hat man aus (b'):

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \pm \frac{c}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}, \quad \omega + c_3 = \pm c \int \frac{\partial r}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}. \qquad (e)$$

Die Gleichungen (d) und (e) lösen die Aufgabe. Die Gleichung (e) ist die der beschriebenen Kurve, (d) gibt die Zeit als Funktion von r; c, c_1, c_2, c_3 sind die vier willkürlichen Konstanten, welche durch die Integration eingeführt werden. Die Zeichen in (d) und (e) entsprechen sich.]

Weitere Ausführung.

Aus der ersten Gleichung (e) folgt, dass $\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}$ reell, also $2\mu r + c_1 r^2 - c^2$ immer positiv seyn muss. Aber $2\mu r + c_1 r^2 - c^2 = c_1 \left[\left(r + \frac{\mu}{c_1}\right)^2 - \frac{\mu^2 + c^2 c_1}{c_1^2}\right]$. Ist also c_1 etwa negativ so darf $\frac{\mu^2 + c^2 c_1}{c_1^2}$ nicht negativ ausfallen, da sonst $2\mu r + c_1 r^2 - c^2$ negativ wäre.

Setzen wir nun

$$c_1 = -\frac{\mu}{a}, \quad c^2 = a\mu(1 - e^2), \text{ d. h. } a = -\frac{\mu}{c_1}, \quad e^2 = 1 + \frac{c^2 c_1}{\mu^2} = \frac{\mu^2 + c^2 c_1}{\mu^2},$$

so haben a und c_1 verschiedene Zeichen. Ist also $c_1 > 0$, so ist jedenfalls $e^2 > 0$; ist c_1 negativ, so ist $\mu^2 + c^2 c_1$ immerhin positiv, also e^2 ebenfalls positiv. Für $c_1 > 0$ ist übrigens $e^2 > 1$, für $c_1 < 0$ aber $e^2 < 1$ (und > 0). — Jetzt ist

$$2\mu r + c_1 r^2 - c^2 = 2\mu r - \frac{\mu}{a} r^2 - a\mu(1 - e^2) = (a^2 e^2 - a^2 + 2ar - r^2)\frac{\mu}{a}$$

$$= \frac{\mu}{a}[a^2 e^2 - (a - r)^2].$$

Ist $a > 0$, also $e^2 < 1$, so muss mithin $a^2 e^2 - (a - r)^2 > 0$ seyn; ist $a < 0$, also $e^2 > 1$, so ist $a^2 e^2 - (a - r)^2 < 0$, [in allen Fällen aber $\frac{a^2 e^2 - (a-r)^2}{a} > 0$*]. Die (e) wird jetzt, da

$$\int \frac{\partial r}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\, arc\left(tg = \frac{\mu r - c^2}{c\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}\right) + C,$$

zu

$$\omega + c_3 = \pm\, arc\left(tg = \frac{\mu r - c^2}{c\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}\right),$$

$$arc\left(tg = \frac{\mu r - c^2}{c\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}\right) = \pm(\omega + c_3), \quad \frac{\mu r - c^2}{c\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} = \pm\, tg(\omega + c_3),$$

also wenn $c_3 = \frac{\pi}{2} - \omega_1$ gesetzt wird, wo ω_1 eine neue Konstante (für c_3):

$$\frac{\mu r - a\mu(1 - e^2)}{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}\sqrt{\frac{\mu}{a}[a^2 e^2 - (a - r)^2]}} = \pm\, tg\left(\omega - \omega_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \mp\, cotg(\omega - \omega_1),$$

---

* D. h. eben $2\mu r + c_1 r^2 - c^2 > 0$.

$$\frac{r-a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = \mp\, cotg\,(\omega-\omega_1) \text{ oder } = \pm\, cotg\,(\omega-\omega_1),\ ^*$$

in welcher Gleichung $(1-e^2)\,[a^2e^2-(a-r)^2]$ immer positiv ist. Setzt man $\omega-\omega_1=\varphi$, so ist also

$$(r-a)^2+2ae^2(r-a)+a^2e^4 = cotg^2\varphi\,(1-e^2)\,[a^2e^2-(a-r)^2],$$

$$(r-a)^2[1+cotg^2\varphi\,(1-e^2)]+2ae^2(r-a) = cotg^2\varphi\,(1-e^2)\,a^2e^2-a^2e^4,$$

$$r-a = -\frac{ae^2 sin^2\varphi}{sin^2\varphi+cos^2\varphi\,(1-e^2)}$$
$$\pm\sqrt{\frac{[cos^2\varphi\,(1-e^2)\,a^2e^2-a^2e^4 sin^2\varphi]\,[1-e^2cos^2\varphi]+a^2e^4 sin^4\varphi}{(1-e^2cos^2\varphi)^2}},$$

d. h.

$$r-a = -\frac{ae^2sin^2\varphi}{1-e^2cos^2\varphi}\pm\frac{\sqrt{cos^2\varphi\,a^2e^2(1-e^2)(1-e^2)}}{1-e^2cos^2\varphi} = -\frac{ae^2sin^2\varphi}{1-e^2cos^2\varphi}$$
$$\pm\frac{ae(1-e^2)\,cos\,\varphi}{1-e^2cos^2\varphi},$$

$$r = \frac{a-ae^2cos^2\varphi-ae^2sin^2\varphi\pm ae(1-e^2)\,cos\,\varphi}{1-e^2cos^2\varphi} = \frac{a-ae^2\pm ae(1-e^2)\,cos\,\varphi}{1-e^2cos^2\varphi}$$
$$= a(1-e^2)\frac{1\pm e\,cos\,\varphi}{1-e^2cos^2\varphi},$$

oder endlich

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1\mp e\,cos\,\varphi},\quad \varphi=\omega-\omega_1. \qquad (e')$$

Die Gleichung (e') zeigt, dass die fragliche Kurve in allen Fällen ein Kegelschnitt ist. Für $e^2>1$ ist dieselbe eine Hyperbel, für $e^2<1$ eine Ellipse, für $e^2=1$ [wo dann $a(1-e^2)=\frac{c^2}{\mu}$ also endlich und positiv] ist derselbe eine Parabel. (Vergl. auch §. 140, IV.)

Besonderer Fall der Ellipse.

Fällt $e^2<1$ aus, so ist die Kurve eine Ellipse; nimmt man dann diejenige Linie zur Polaraxe, die durch die Sonne gehend mit der früheren Axe der x den Winkel ω_1 macht, so hat man in (e') bloss $\omega+\omega_1$ für ω zu setzen, um als Polargleichung zu erhalten:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1\mp e\,cos\,\omega},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die nunmehrigen ω von dem der Sonne entfernteren Scheitel aus gerechnet werden. Rechnet man aber ω von dem der Sonne näheren Scheitel (Perihelium), so ist

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos\,\omega}, \qquad (e'')$$

so dass a die halbe grosse Axe, $a\sqrt{1-e^2}$ die halbe kleine Axe der Ellipse ist, während die grosse Axe die Polaraxe ist. Lässt man ω von 0 bis 2π gehen, so hat der Körper einen vollen Umlauf gemacht. Von $\omega=0$ bis $\omega=\pi$ gilt dann in (d) das obere, von $\omega=\pi$ bis $\omega=2\pi$

---

* Für $a>0$ ist der Nenner gleich $\mu\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}$; für $a<0$ aber $-\mu\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}$: im Folgenden ist diess aber gleichgiltig.

das untere Zeichen, d. h. wenn man die Zeit von $\omega = 0$ an zählt, so ist die Zeit eines Umlaufs τ gegeben durch

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} - \int_{r_3}^{r_4} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}},\ r_4 = a(1-e) = r_3,\ r_2 = a(1+e),$$

so dass

$$\tau = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = -\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2} + a\,arc\left(tg = \frac{r-a}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\right),$$

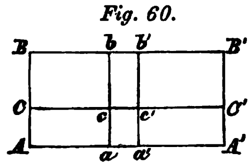
$$\int_{a(1-e)}^{a(1+e)} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = a\,arc\,(tg = +\infty) - a\,arc\,(tg = -\infty) = a\pi,$$

so dass $\tau = 2a\pi\sqrt{\frac{a}{\mu}}$, $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$, $k = \frac{4\pi^2 a^3 p}{g\tau^2}$ ist. (Vergl. „Anhang" unter 3.)

§. 136.

Fortsetzung. Erwärmung eines kältern Luftstroms durch einen wärmern.

Fig. 60.



III. AA'BB' (Fig. 60) stelle einen geradlinigen Kanal vor, der durch die Wand CC' in zwei Theile getheilt sey; in den beiden Theilen bewegen sich Luftströme von verschiedener Temperatur, so dass durch die Wand hindurch, die aus einem für die Wärme leicht durchdringbaren Stoff bestehe, der eine Luftstrom durch den andern erwärmt wird, während die Wände BB', AA' keine Wärme hindurchlassen. Man soll die Temperatur der Luftströme für jeden Querschnitt untersuchen.

Wir setzen hiebei voraus, dass bereits ein Zustand eingetreten sey, bei dem in jedem Querschnitt sowohl des Kanals AA'C'C, als CC'BB' immer dieselbe Temperatur herrsche, die natürlich für jeden Querschnitt eine andere seyn wird. Sey ferner τ_0 die Temperatur des (heisseren) Luftstroms in AA'C'C, wenn er in AC in den Kanal eintritt; τ_1 die Temperatur, mit der er den Kanal in A'C' verlässt (beide etwa in Graden des hunderttheiligen Thermometers angegeben); ab, a'b' zwei Querschnitte, deren Entfernung $\varDelta x$ (unendlich klein) sey, wenn x die Länge Cc ist; T die Temperatur im Querschnitt ac, t die in cb, welche beide bloss von x und nicht von der Zeit abhängen, und wenn die Kanäle eng genug sind, durch den ganzen Querschnitt dieselben sind; im Querschnitt a'b' werden nun die Temperaturen seyn: $T + \varDelta T$ für a'c', $t + \varDelta t$ für c'b', wo $\varDelta T$ negativ ist, da T mit wachsendem x sicher abnimmt, dagegen $\varDelta t$ positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Luftströme sich in derselben oder der entgegengesetzten Richtung bewegen $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right.$ ist positiv im ersten, negativ im zweiten Falle$\left.\right)$. Sey weiter P das Gewicht derjenigen Luftmenge, die in einer Sekunde durch ac strömt; p das der durch cb in derselben Zeit strömenden Luftmenge; C, c die spezifischen Wärmen der beiden Luftarten (§. 75, VII), k dieselbe Grösse für die Zwischenwand, wie in §. 75. Je

kleiner nun Δx ist, desto genauer richtig wird es seyn, wenn wir annehmen es herrsche innerhalb der zwei Schnitte a b, a′ b′ durchweg dieselbe Temperatur, die sich dann plötzlich in a′ b′ ändere. Nehmen wir dann schliesslich Δx unendlich klein, so ist diese Annahme geradezu richtig. Unter dieser Voraussetzung wird nun die Luftmenge P, indem sie durch a c c′ a′ strömt, die Wärmemenge $-PC\Delta T$ verlieren, während die durch c b c′ b′ strömende Menge p die Wärmemenge $pc\Delta t$ gewinnt, wenn beide Ströme sich in gleicher Richtung bewegen, oder die Wärmemenge $-pc\Delta t$, wenn das Entgegengesetzte stattfindet. Da nun, der Annahme nach, durch die äusseren Wände keine Wärme entweicht, so hat man

$$-PC\Delta T = \pm pc\Delta t, \quad -PC\frac{\Delta T}{\Delta x} = \pm pc\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

d. h. wenn Δx unendlich klein, unter welcher Annahme diese Gleichungen erst genau sind (§. 75, VI):

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = \mp pc\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \text{(f)}$$

wo das obere Zeichen gilt wenn beide Ströme dieselbe, das untere wenn sie verschiedene Bewegungsrichtung haben.

Der Temperaturunterschied in a c′ und c b′ beträgt $T - t$; also ist die in der Sekunde durch c c′ strömende Wärmemenge $= k(T-t)\omega$, wenn ω die Fläche des zwischen beiden Querschnitten liegenden Wandstücks ist. Diese Fläche sey $= \varphi(x)\Delta x$, wo immer $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion von x ist, wie denn im einfachsten Falle $\varphi(x)$ konstant ist. Da die durch c c′ strömende Wärme der gleich ist welche P verliert, so ist:

$$k(T-t)\varphi(x)\Delta x = -PC\Delta T, \quad k(T-t)\varphi(x) = -PC\frac{\Delta T}{\Delta x},$$

d. h.

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = -k(T-t)\varphi(x). \qquad \text{(g)}$$

Die beiden Gleichungen (f) und (g) enthalten die Lösung der Aufgabe. Man wird hier am Besten so verfahren, dass man zunächst aus (f) zieht:

$$pct = \mp PCT + Apc, \qquad \text{(h)}$$

wo A eine willkürliche Konstante, und dann hat

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = -k\left[T \pm \frac{PC}{pc}T - A\right]\varphi(x), \quad -k\varphi(x) = \frac{PC}{(1\pm\alpha)T - A}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{PC}{pc},$$

woraus (§. 91):

$$-k\int\varphi(x)\,\partial x = \frac{PC}{1\pm\alpha}\,l[(1\pm\alpha)T - A] + A',$$

wenn A′ eine weitere Konstante ist. Um die Konstanten zu bestimmen, sey $\int\varphi(x)\,\partial x = \psi(x)$, und λ die Länge CC′, so ist für $x = 0$: $T = \tau_0$, für $x = \lambda$: $T = \tau_1$, also hat man

$$-k\psi(0) = \frac{PC}{1\pm\alpha}\,l[(1\pm\alpha)\tau_0 - A] + A',$$

$$-k\psi(\lambda) = \frac{PC}{1\pm\alpha}\,l[(1\pm\alpha)\tau_1 - A] + A',$$

aus welchen zwei Gleichungen A und A′ bestimmt werden können. * Man zieht hieraus, da $\psi(\lambda) - \psi(0) = \int_0^\lambda \varphi(x)\,\partial x$, und letztere Grösse die Fläche F der Wand CC′ ausdrückt:

$$-kF = \frac{PC}{1 \pm \alpha}\, l\left(\frac{(1 \pm \alpha)\tau_1 - A}{(1 \pm \alpha)\tau_0 - A}\right),$$

aus welcher Gleichung folgt:

$$A = \frac{(1 \pm \alpha)\left[\tau_1 - \tau_0 e^{-\varrho}\right]}{1 - e^{-\varrho}}, \quad \varrho = \frac{(1 \pm \alpha) k F}{PC};$$

A′ ergibt sich sodann unmittelbar. Da $\psi(x) - \psi(0) = \int_0^x \varphi(x)\,\partial x$, so ist jetzt:

$$-k\int_0^x \varphi(x)\,\partial x = \frac{PC}{1 \pm \alpha}\, l.\left(\frac{(1 \pm \alpha)T - A}{(1 \pm \alpha)\tau_0 - A}\right), \qquad \text{(h')}$$

wo $\int_0^x \varphi(x)\,\partial x$ das zwischen C und c liegende Wandstück ist. Die Gleichung (h′) gibt T, während (h) dann t gibt, so dass die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Will man die Temperaturen kennen, welche der durch CB′ gehende Luftstrom in CB und C′B′ hat, so wird man in (h) bloss $T = \tau_0$ oder $= \tau_1$ zu setzen haben.

Für den praktischen Gebrauch ist es etwas bequemer, die obigen Formeln in anderer Gestalt zu geben. Seyen nämlich t_0, t_1 die Temperaturen des zu erwärmenden Luftstroms beim Ein- und Austritt in den Kanal CB′, so ist

a) bei gleicher Bewegungsrichtung:

$$pct_0 = -PC\tau_0 + Apc, \quad pct_1 = -PC\tau_1 + Apc, \quad -kF = \frac{PC}{1+\alpha}\, l\left(\frac{(1+\alpha)\tau_1 - A}{(1+\alpha)\tau_0 - A}\right),$$

woraus

$$PC(\tau_0 - \tau_1) = pc(t_1 - t_0), \quad kF = \frac{PpCc}{PC + pc}\, l\left(\frac{\tau_0 - t_0}{\tau_1 - t_1}\right).$$

b) bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung:

$$pct_1 = PC\tau_0 + Apc, \quad pct_0 = PC\tau_1 + Apc, \quad -kF = \frac{PC}{1-\alpha}\, l\left(\frac{(1-\alpha)\tau_1 - A}{(1-\alpha)\tau_0 - A}\right),$$

woraus

$$pc(\tau_1 - t_0) = PC(\tau_0 - \tau_1), \quad kF = \frac{PpCc}{pc - PC}\, l\left(\frac{\tau_0 - t_1}{\tau_1 - t_0}\right).$$

Bestimmung der Werthe von $\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin ax}{\sqrt{x}}\,\partial x$, $\int_0^\infty \frac{e^{-x} \cos ax}{\sqrt{x}}\,\partial x$.

IV. Man soll die bestimmten Integrale

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin ax}{\sqrt{x}}\,\partial x, \quad z = \int_0^\infty \frac{e^{-x} \cos ax}{\sqrt{x}}\,\partial x$$

ermitteln. (Vergl. §. 163, III.) — Man hat (§. 85)

---

* Es kann auch seyn, dass bloss die Temperaturen gegeben sind mit denen die beiden Luftströme eintreten. Alsdann hat man wieder die erste der beiden Gleichungen; statt der zweiten aber muss man T aus (h) in t ausdrücken und beachten, dass t für $x = 0$ (oder $x = \lambda$) gegeben ist. (Redtenbacher: kalorische Maschine, 2. Aufl., S. 91 ff.)

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x} \cos a x \, \partial x, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = -\int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x} \sin a x \, \partial x.$$

Aber (§. 27, 35):

$$\int \sqrt{x} \, e^{-x} \cos a x \, \partial x = \sqrt{x} \, e^{-x} \frac{a \sin a x - \cos a x}{1 + a^2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \frac{a \sin a x - \cos a x}{(1 + a^2) \sqrt{x}} \partial x,$$

$$\int \sqrt{x} \, e^{-x} \sin a x \, \partial x = \sqrt{x} \, e^{-x} \frac{-\sin a x - a \cos a x}{1 + a^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x} \frac{\sin a x + a \cos a x}{(1 + a^2) \sqrt{x}} \partial x;$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x} \cos a x \, \partial x = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-x} (a \sin a x - \cos a x)}{(1 + a^2) \sqrt{x}} \partial x = -\frac{1}{2} \frac{a y}{1+a^2} + \frac{1}{2} \frac{z}{1+a^2},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x} \sin a x \, \partial x = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-x} (\sin a x + a \cos a x)}{(1 + a^2) \sqrt{x}} \partial x = \frac{1}{2} \frac{y}{1+a^2} + \frac{1}{2} \frac{a z}{1+a^2};$$

so dass

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{2} \frac{a y}{1+a^2} + \frac{1}{2} \frac{z}{1+a^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{2} \frac{y}{1+a^2} - \frac{1}{2} \frac{a z}{1+a^2}, \tag{l}$$

woraus auch

$$a \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{2} y, \quad \frac{\partial y}{\partial a} - a \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{2} z.$$

Man zieht aus diesen Gleichungen, wenn man sie nochmals nach a differenzirt und dann z, $\frac{\partial z}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}$ eliminirt:

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + 3 a \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{3}{4} y = 0. \tag{i}$$

Ganz eben so findet sich

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + 3 a \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{3}{4} z = 0. \tag{i'}$$

Setzt man $u = z + i y$ so folgt hieraus

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + 3 a \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{3}{4} u = 0, \tag{k}$$

während

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-x} (\cos a x + i \sin a x)}{\sqrt{x}} \partial x = \int \frac{e^{-(1-a i) x}}{\sqrt{x}} \partial x.$$

Setzt man in §. 86 (b) $x = \sqrt{\varphi}$, also $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{2 \sqrt{\varphi}}$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2 \varphi}}{\sqrt{\varphi}} \partial \varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-a \varphi}}{\sqrt{\varphi}} \partial \varphi = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

so dass man vermuthen wird, es möchte $u = \sqrt{\frac{\pi}{1 - a i}}$ seyn können. Wirklich genügt $\sqrt{\frac{\pi}{1 \pm a i}}$ der (k), und da die (i) dieselbe Form hat so ist (§. 107):

$$y = \frac{C}{\sqrt{1 - a i}} + \frac{C'}{\sqrt{1 + a i}},$$

während aus (l) dann folgt:

$$z = \frac{C i}{\sqrt{1 - a i}} - \frac{C' i}{\sqrt{1 + a i}}.$$

Was C und C' betrifft so ist für $a=0$: $y=0$, $z=\sqrt{\pi}$ (§. 86), also

$$C+C'=0,\ Ci-C'i=\sqrt{\pi};\ C=\frac{\sqrt{\pi}}{2i},\ C'=-\frac{\sqrt{\pi}}{2i},$$

und mithin

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\sqrt{1-ai}}-\frac{1}{\sqrt{1+ai}}\right]\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-ai}}+\frac{1}{\sqrt{1+ai}}\right]\sqrt{\pi}.$$

Nun ist wenn $r=\sqrt{1+a^2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{r}$, $\sin\alpha=\frac{a}{r}$: $\frac{1}{\sqrt{1+ai}}=(1+ai)^{-\frac{1}{2}}$ $=r^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{1-ai}}=(1-ai)^{-\frac{1}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$, so dass

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x=\frac{\sqrt{\pi}}{r^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{\alpha}{2},\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x=\frac{\sqrt{\pi}}{r^{\frac{1}{2}}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x&=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{r}}=\sqrt{\frac{r-1}{r^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{1+a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x&=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{r}}=\sqrt{\frac{r+1}{r^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{1+a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\right\}a>0.$$

Dass die Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x$, $\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x$ hierauf zurückkommen, ist leicht ersichtlich, und man findet

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x&=\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+a^2}-c}{c^2+a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_0^\infty \frac{e^{-cx}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x&=\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+a^2}+c}{c^2+a^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}\right\}c>0,\ a>0.$$

§. 137.

Die gegebenen Gleichungen sind nicht lauter Differentialgleichungen.

Es kann sich ereignen, dass zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ nicht lauter Differentialgleichungen gegeben sind, sondern einige Gleichungen ohne Differentialquotienten. In diesem Falle kann man einige der abhängig Veränderlichen unmittelbar durch x oder durch andere abhängige Grössen ausdrücken, so dass sie als gar nicht weiter vorhanden betrachtet werden können. Die Gleichungen welche alsdann noch bleiben sind nur noch zu integriren, und nach ihnen bestimmt sich die nöthige Anzahl der

willkürlichen Konstanten. Ein Beispiel aus den Anwendungen auf Mechanik mag zur Erläuterung genügen.

Wir wollen annehmen, durch eine Röhre deren Axe horizontal liege ströme eine elastische Flüssigkeit und es sey der Beharrungszustand der Bewegung eingetreten, d. h. in jedem Querschnitt bleibe die Bewegung immer dieselbe, sey also nur veränderlich von Querschnitt zu Querschnitt. Daraus folgt, dass in der Zeiteinheit durch alle Querschnitte dieselbe Menge der Flüssigkeit (Luft) strömen muss. (Zur Verdeutlichung wollen wir uns in Fig. 60 unter ABB'A' die fragliche Röhre, und unter CC' deren Axe vorstellen, obwohl wir nicht anzunehmen brauchen, dass die Querschnitte alle gleich gross seyen, wie diess in der Figur der Fall ist; es braucht nur die Axe CC' geradlinig zu seyn und horizontal zu liegen.) Auf der einen Seite AB stehe die Röhre in Verbindung mit einem Gasometer, in welchem immer derselbe Druck P (für die Flächeneinheit) herrsche; an ihrem anderen Ende A'B' dagegen stehe sie entweder in Verbindung mit der freien Luft, oder mit einem anderen Gasometer in welchem der konstante Druck P' herrsche.

Ist ab ein Querschnitt in der Entfernung $Cc = x$ vom Anfang, dessen Fläche $= \omega$ sey, so sey dort die Geschwindigkeit der Lufttheilchen $= v$, wobei wir voraussetzen wollen, dass alle Lufttheilchen sich in demselben Querschnitte parallel und mit gleicher Geschwindigkeit bewegen; p sey der Druck der in diesem Querschnitte herrscht, so dass wenn μ das Gewicht der Volumeneinheit des Gases in ab ist, man (nach dem Mariotte'schen Gesetze und mit Berücksichtigung der in der ganzen Röhre als gleich vorausgesetzten Temperatur) hat

$$p = k\mu, \qquad \text{(m)}$$

wo k ein konstanter (und bekannter) Koeffizient ist. Sey nun a'b' ein Querschnitt in der Entfernung Δx, so wird wenn schliesslich Δx unendlich klein, diess Röhrenstück aba'b' als überall gleich weit angenommen werden dürfen, eben so wie man annehmen darf, es haben alle Lufttheilchen in demselben die Geschwindigkeit v die plötzlich in a'b' in $v + \Delta v$ übergehe; eben so herrsche in aba'b' überall der Druck p der in a'b' plötzlich in $p + \Delta p$ übergeht. Die Luftmenge in aba'b' hat zum Gewicht $\omega \Delta x \mu = \frac{p\omega \Delta x}{k}$, und da sie ihre Geschwindigkeit von v in $v + \Delta v$ umändert, so gewinnt sie an lebendiger Kraft:

$$\frac{p\omega\Delta x}{2kg}[(v+\Delta v)^2 - v^2] = \frac{p\omega\Delta x}{gk}[v\Delta v + \tfrac{1}{2}(\Delta v)^2],$$

d. h. sie hat beim Durchströmen vermöge der Arbeit des Druckes so viel an lebendiger Kraft zugenommen. Diese Arbeit ist aber $= -\omega\Delta p \Delta x$, da $-\omega\Delta p$ der Ueberschuss des Drucks auf ab über den auf a'b', Δx der Weg ist.* Demnach wird seyn:

$$-\omega\Delta p\Delta x = -\frac{p\omega\Delta x}{gk}[v\Delta v + \tfrac{1}{2}(\Delta v)^2], \quad \frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{p}{gk}\left[v\frac{\Delta v}{\Delta x} + \tfrac{1}{2}\Delta v\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

---

* Man wird beachten, dass während des Durchströmens im Allgemeinen die Geschwindigkeit zunehmen, der Druck aber sich vermindern wird, so dass $\Delta v > 0$, $\Delta p < 0$ ist. Die Schlussgleichung (n) wäre jedoch ganz dieselbe, wenn die Dinge sich auch umgekehrt verhielten.

oder da Δx unendlich klein:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{gk} v \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (n)$$

Da die durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit strömende Luftmenge immer dieselbe ist, so muss $\mu \omega v$ also auch $p \omega v$ konstant seyn, so dass

$$p \omega v = a \qquad (p)$$

ist. Die Gleichungen (m), (n), (p) geben p, v, μ als Funktionen von x. Von diesen ist nur (m) eine Differentialgleichung (ω muss als bekannte Funktion von x angesehen werden). Wenn man will, kann man v aus (p) ziehen und in (n) einsetzen, um eine Gleichung zur Bestimmung von p zu erhalten. Für den jetzigen Fall aber ist es bequemer zu setzen:

$$gk \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = -v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad gk\, l(p) = -\frac{v^2}{2} + C,$$

und wenn V′ die Geschwindigkeit des Abflusses in A′B′ wo $p = P'$, so ist

$$gk\, l(P') = -\frac{V'^2}{2} + C, \quad gk\, l\left(\frac{p}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2} - \frac{v^2}{2},$$

d. h. wenn Ω' die Fläche der Oeffnung A′B′ bezeichnet, demnach $a = p \omega v = P'\Omega'V' = P\Omega V$, wo Ω, V die ähnlichen Grössen für AB sind, es ist

$$gk\, l\left(\frac{p}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2}\left[1 - \left(\frac{P'\Omega'}{p\omega}\right)^2\right]. \qquad (q)$$

Zieht man hieraus p, was freilich nur näherungsweise geschehen kann, so geben (p) und (m) die übrigen Grössen.

Da für $\omega = \Omega : p = P$, so ist auch

$$gk\, l\left(\frac{P}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2}\left[1 - \left(\frac{P'\Omega'}{P\Omega}\right)^2\right], \quad V' = \sqrt{\frac{2gk\, l\left(\frac{P}{P'}\right)}{1 - \left(\frac{P'\Omega'}{P\Omega}\right)^2}},$$

durch welche Gleichung die Ausflussgeschwindigkeit ausgedrückt ist. Die Einflussgeschwindigkeit V ergibt sich aus der Gleichung $P\Omega V = P'\Omega'V'$.

(Man vergl. „Navier, Résumé des leçons sur l'Application de la Mécanique" II partie, XVII.)

§. 138.

Das Prinzip des letzten Multiplikators.

I. Bereits in §. 131, IV haben wir gezeigt, dass die Integration von gleichzeitigen Differentialgleichungen höherer Ordnung immer zurückgeführt werden könne auf die Integration eines Systems gleichzeitiger Differentialgleichungen erster Ordnung, so dass wir uns nur mit letzteren beschäftigen wollen. Dabei setzen wir voraus, dass man die gleichzeitigen Differentialgleichungen höherer Ordnung nach den höchsten Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen auflösen könne, so dass dieselben die Form

$$\frac{\partial^m y}{\partial x^m}=P,\ \frac{\partial^n z}{\partial x^n}=Q,\ \frac{\partial^r u}{\partial x^r}=Q,\ldots$$

haben, wo in P, Q, R, ... keine Differentialquotienten von y, z, u, ... vorkommen, welche die m^{te}, n^{te}, r^{te}, ... Ordnung übersteigen. Sollten die gegebenen Differentialgleichungen nicht so beschaffen seyn, dass in jeder die Differentialquotienten höchster Ordnung vorkommen, so wird man wie bereits in §. 131 angegeben durch weitere Differenzirungen dieses Ziel immer erreichen können. Die Möglichkeit der oben angegebenen Auflösung wird jedoch hier unbedingt vorausgesetzt.

Zwei gleichzeitige Differentialgleichungen.

II. Wir wollen annehmen, man habe bloss die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=Z, \tag{a}$$

worin Y, Z Funktionen von x, y, z seyn sollen, und man habe auf irgend eine Weise eine Integralgleichung gefunden welche diesen Gleichungen genügt:

$$f(x,y,z)=c, \tag{b}$$

in der c die willkürliche Konstante vorstelle, eine weitere solche Konstante aber darin nicht sey; so folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

also wenn man die (a) beachtet:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z=0, \tag{c}$$

welche Gleichung nothwendig identisch seyn muss, d. h. die einzelnen Glieder müssen sich gegenseitig aufheben was auch x, y, z seyn mögen (vergl. §. 132). Wir setzen voraus, dass Y und Z nicht Null seyen, so dass y und z nicht konstant sind; eben so dürfen Y und Z nicht unendlich, also auch nicht x konstant seyn; dann versteht es sich von selbst, dass in (b) mindestens zwei der Veränderlichen vorkommen werden, da sonst die eine vorkommende einen konstanten Werth hätte.

Gesetzt also, z komme in (b) vor, so ziehen wir z durch die übrigen Grössen aus dieser Gleichung und setzen dasselbe in die erste Gleichung (a), nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0 \tag{a'}$$

ein, wodurch dieselbe zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen x und y wird, wie wir sie im fünfzehnten Abschnitt betrachtet haben. Gemäss §. 96, II besteht nun ein Faktor M der macht, dass dann (a′) ganz unmittelbar integrirbar ist. Dieser Faktor ist aber nach §. 96 so beschaffen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial (MY)}{\partial y}=0 \qquad (d)$$

durch ihn erfüllt seyn wird. Denken wir uns nun zunächst in (a′) die Grösse z noch nicht ersetzt; denken uns weiter, M sey eine Funktion von x, y, z so beschaffen, dass sie den Integrations-Faktor für (a′) abgibt, wenn man z durch (b) ausdrückt, so wird in der Gleichung (d) bei den partiellen Differenzirungen nach y und x zu beachten seyn, dass in M auch noch z vorkommt das vermöge (b) von x und y abhängt, so dass die Gleichung (d) seyn wird:

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial (MY)}{\partial y}+\frac{\partial (MY)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \qquad (d')$$

wo nun $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial (MY)}{\partial y}$ die partiellen Differentialquotienten nach x und y in so ferne diese Grössen in M und MY entwickelt vorkommen bedeuten und $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus (b) zu ziehen sind. Aus (b) aber folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

so dass die (d′) wird:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial (MY)}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial z}-\left(\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial (MY)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0. \qquad (d'')$$

Die Grösse $\frac{\partial f}{\partial z}$ ist, nach unsern Voraussetzungen, sicher nicht Null; ferner ist wenn $\frac{\partial f}{\partial z}=\varphi$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}-M\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial (MY)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial (MY\varphi)}{\partial y}-MY\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y};$$

also gibt die (d″):

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (MY\varphi)}{\partial y}-\left(M\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial z}\right)-\left(MY\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial (MY)}{\partial z}\right)=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (MY\varphi)}{\partial y}-\frac{\partial\left(M\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(MY\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial z}=0.$$

Allein, da M nicht = 0 vorausgesetzt wird, ist auch nach (c):

$$M\frac{\partial f}{\partial x}+MY\frac{\partial f}{\partial y}=-MZ\frac{\partial f}{\partial z},$$

woraus folgt, weil diese Gleichung identisch ist, so dass auf der einen Seite steht was auf der andern:

$$\frac{\partial\left(M\frac{\partial f}{\partial x}+MY\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(MZ\frac{\partial f}{\partial z}\right)^*}{\partial z},$$

* Dieser Satz ist nur unter der gemachten Voraussetzung wahr, es sey die vorhergehende Gleichung eine rein identische, wie etwa $x+yz-5z=x+yz-5z$.

mithin man hat:

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (MY\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial (MZ\varphi)}{\partial z}=0, \qquad (e)$$

welcher Gleichung also der zu suchende Faktor M genügen muss.

Gesetzt also, man sey im Stande eine Grösse ξ zu bestimmen welche der Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}=0 \qquad (e')$$

genügt, und nicht $=0$ ist, so wird nothwendig $M\frac{\partial f}{\partial z}=\xi$ den Faktor M bestimmen der die erste der Gleichungen (a) integrirbar macht, wenn man z aus (b) zieht und in diese Gleichung einsetzt. Man sieht hieraus, dass man alsdann nur eine Integralgleichung der zwei Gleichungen (a) zu kennen braucht, um die andere sofort finden zu können.

Man habe

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-y(x-z)}{x(y-z)},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-z(y-x)}{x(y-z)},$$

so folgt hieraus

$$1+\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ x+y+z=c;\ z=c-(x+y).$$

Die Gleichung (e′) ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{y(x-z)}{x(y-z)}\xi\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{z(y-x)}{x(y-z)}\xi\right)}{\partial z}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{y(x-z)}{x(y-z)}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{z(y-x)}{x(y-z)}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\xi\left\{\frac{z(x-z)}{x(y-z)^2}-\frac{y(y-x)}{x(y-z)^2}\right\}=0.$$

Setzt man hier $\xi=x(y-z)$, so ist diese Gleichung befriedigt, und da $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, so ist $x(y-z)$ ein Faktor der die erste Gleichung integrirbar macht. Sie gibt dann:

$$x(y-z)\frac{\partial y}{\partial x}+y(x-z)=0,\ x(2y+x-c)\frac{\partial y}{\partial x}+y(2x+y-c)=0,$$

und nach §. 96, I:

$$\int P\,\partial x=x^2y+y^2x-cxy,\ \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x=x^2+2yx-cx,$$

$$Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,\partial x=0,$$

so dass die zweite Integralgleichung ist:

$$x(xy+y^2-cy)=c',\ \text{oder}\ xyz=C,$$

wenn man $c=x+y+z$ setzt.

III. Wenn, wie im vorigen Beispiel, die Grössen Y, Z der Gleichungen (a) einen gemeinschaftlichen Nenner haben, also diese Gleichungen etwa sind

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{Y}{X},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{Z}{X},$$

so ist die (e′):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{Y\xi}{X}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{Z\xi}{X}\right)}{\partial z}=0$$

und wenn man $\xi = X\zeta$ setzt so hat man ζ zu bestimmen aus

$$\frac{\partial(X\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial(Y\zeta)}{\partial y}+\frac{\partial(Y\zeta)}{\partial z}=0, \qquad (e'')$$

damit die aus $M\frac{\partial f}{\partial z}=\zeta$ bestimmte Grösse M ein integrirender Faktor der Gleichung

$$X\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0$$

sey.

Es lassen sich jedoch auch gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von denen man eine Integralgleichung erster Ordnung (§. 118) kennt, auf diese Weise behandeln, wie wir an einigen Beispielen näher betrachten wollen.

IV. Angenommen, es sey X eine blosse Funktion von x, Z eine von x und y; sey ferner

$$\frac{\partial y}{\partial x}=u \qquad (f)$$

eine erste Integralgleichung von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\frac{\partial y}{\partial x}+Z=0, \qquad (g)$$

wo u eine bekannte Funktion von x, y und einer willkürlichen Konstanten α ist. Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x}=z$, so hat man also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=z,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-(Xz+Z) \qquad (h)$$

als gleichzeitige Differentialgleichungen, während

$$z=u \qquad (i)$$

eine Integralgleichung derselben ist. Die (h) sind also in II die (a), (i) die (b), so dass im Frühern $Y=z$, $Z=-(Xz+Z)$ zu setzen ist, wodurch die (e′) wird:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+z\frac{\partial \xi}{\partial y}-(Xz+Z)\frac{\partial \xi}{\partial z}-X\xi=0.$$

Dieser Gleichung wird genügt wenn wir ξ von y und z unabhängig voraussetzen, wodurch sie zu

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}-X\xi=0,\ \xi=e^{\int X\partial x}$$

wird (§. 91). — Die Grösse f in II findet sich wenn wir die (i) nach α auflösen; heisst diese dann $\alpha=f(x,y,z)$, so ist daraus $\frac{\partial f}{\partial z}$, oder wenn man

will $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$ zu suchen. Um aber letztere Grösse zu erhalten bedarf es sicher der Auflösung von (i) nicht, da diese Gleichung sofort gibt:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}.$$

Demnach liefert die Gleichung

$$\frac{M}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} = e^{\int X \partial x}, \quad M = \frac{\partial u}{\partial \alpha} e^{\int X \partial x}$$

den integrirenden Faktor für die erste (h). Da dort z aus (i) zu ersetzen ist, so wird sie dann:

$$e^{\int X \partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} - e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Nach §. 96, I ist die Integralgleichung also

$$-\int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha}\partial x + \int \left[e^{\int X \partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial y}\int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha}\partial x\right]\partial y = C. \quad \text{(k)}$$

Die Bedingung der Integrirbarkeit (§. 96, I) ist hier:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial \alpha}e^{\int X \partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\int X \partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right] = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + u\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial y} + X\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial x} = 0. \quad \text{(l)}$$

Aber da z = u eine Integralgleichung von (h), so ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

d. h.

$$-Xz - Z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} z,$$

wo allerdings, damit die Gleichung eine identische sey (§. 132) α noch aus (i) zu ersetzen ist. Eliminirt man aber z, so hat man

$$-Xu - Z = \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y},$$

welche Gleichung nunmehr eine identische seyn muss. Daraus folgt dann

$$-X\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial x} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial y},$$

d. h. die obige Gleichung (l).

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(3 - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3y}{x} = 0 \quad \text{(m)}$$

genügt als erste Integralgleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha x - 3y$. Also

$$X = 3 - \frac{1}{x}, \; Z = -\frac{3y}{x}, \; u = 2\alpha x - 3y, \; \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 2x, \int X \partial x = 3x - l(x), \; e^{\int X \partial x} = \frac{e^{3x}}{x},$$

so dass die (k) ist:

$$-2\int e^{3x}(2\alpha x-3y)\partial x+2\int[e^{3x}+\frac{\partial}{\partial y}\int(2\alpha x-3y)e^{3x}\partial x]\partial y=C,$$

$$e^{3x}\left(y-\frac{2\alpha x}{3}+\frac{2\alpha}{9}\right)=C,\ \ y=Ce^{-3x}+C'\left(x-\frac{1}{3}\right), \tag{n}$$

welches nun die Integralgleichung von (m) ist.

V. Sey φ eine Funktion von x und y, ψ eben so, und man habe von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+\psi=0 \tag{p}$$

eine erste Integralgleichung (f), wo u wieder wie vorhin beschaffen ist, so hat man abermals

$$\frac{\partial y}{\partial x}=z,\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}z^2+\frac{\partial \varphi}{\partial x}z+\psi\right). \tag{q}$$

Die (e′) ist also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+z\frac{\partial \xi}{\partial y}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}z+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\xi-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}z^2+\frac{\partial \varphi}{\partial x}z+\psi\right)\frac{\partial \xi}{\partial z}=0,$$

welcher Gleichung genügt wird, wenn ξ von z unabhängig ist; alsdann wird sie

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+z\frac{\partial \xi}{\partial y}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}z+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\xi=0,\ \ z\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial \xi}{\partial x}-\xi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,$$

so dass zugleich seyn muss

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial \xi}{\partial x}-\xi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0:\ \xi=e^{\varphi}.$$

Wie in V findet sich dann $M=e^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ und

$$-\int e^{\varphi}u\frac{\partial u}{\partial \alpha}\partial x+\int[e^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial}{\partial y}\int e^{\varphi}u\frac{\partial u}{\partial \alpha}\partial x]\partial y=C. \tag{r}$$

Man kann noch bemerken dass die Grösse $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ in (k) und (r) auch, ohne dass die (f) genau die Form $\frac{\partial y}{\partial x}$ gleich einer Funktion von x, y, α hat, immer dadurch ermittelt werden kann, dass man aus der Integralgleichung erster Ordnung $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ bestimmt, und dann z mittelst jener Gleichung daraus eliminirt.

§. 139.

Drei gleichzeitige Differentialgleichungen.

I. Man habe die drei Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=Z,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=U, \tag{f}$$

wo Y, Z, U Funktionen von x, y, z, u seyen. Denken wir uns ferner, es sey

$$f(x, y, z, u) = c \tag{g}$$

eine der (drei) Integralgleichungen des Systems (f), so wird wie in §. 138 nothwendig identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z + \frac{\partial f}{\partial u} U = 0 \tag{h}$$

seyn (§. 132). Da wir wieder Y, Z, U weder 0 noch ∞ voraussetzen, so muss die Gleichung (g) mindestens zwei der Veränderlichen enthalten. Sey also u jedenfalls in (g) enthalten, so ziehe man u aus (g) und setze dessen Werth in die zwei ersten Gleichungen (f) ein, wodurch dieselben zu zwei Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen x, y, z werden und wir wieder auf dem in §. 138 behandelten Falle sind.

Gesetzt nun weiter, man kenne ebenfalls noch eine Integralgleichung dieser zwei ersten Gleichungen, nachdem u aus (g) ersetzt worden, und sey dieselbe

$$f_1(x, y, z, c) = c', \tag{g'}$$

wo c die Konstante der Gleichung (g), c' die neue Konstante ist. Alsdann wird nach §. 138, wenn man ξ bestimmt aus

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial (Y\xi)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\xi)}{\partial z} = 0,$$

wo in Y und Z vorerst u aus (g) ersetzt ist, die aus der Gleichung $M \frac{\partial f_1}{\partial z} = \xi$ gezogene Grösse M, in der z aus (g') ersetzt wird, ein integrirender Faktor für die erste Gleichung (f) seyn. Denken wir uns nun ξ sey eine Funktion von x, y, z, u, die, nachdem u aus (g) in ihr ersetzt ist, in die so eben verlangte Funktion von x, y, z übergeht. Alsdann kann man statt der eben gegebenen Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (Y\xi)}{\partial y} + \frac{\partial (Y\xi)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial (Z\xi)}{\partial z} + \frac{\partial (Z\xi)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

wo die partiellen Differentialquotienten bloss nach den entwickelt in ξ, Y, ... vorkommenden Grössen genommen sind, und $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ aus (g) zu ziehen sind. Aber aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

so dass also

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial (Y\xi)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial (Y\xi)}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial (Z\xi)}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ferner hat man, wenn wieder $\frac{\partial f}{\partial u} = \varphi$, wo φ nicht $= 0$ (indem u in f vorkommt)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial x}-\xi\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u},\quad \frac{\partial(Y\xi)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial(Y\xi\varphi)}{\partial y}-Y\xi\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial u},\quad \frac{\partial(Z\xi)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$=\frac{\partial(Z\xi\varphi)}{\partial z}-Z\xi\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u},$$

so dass

$$\frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(Y\xi\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial(Z\xi\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}-\frac{\partial\left(Y\xi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u}-\frac{\partial\left(Z\xi\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial u}=0.$$

Aus der identischen Gleichung (h) folgt aber

$$\frac{\partial\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(Y\xi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(Z\xi\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial u}=-\frac{\partial\left(U\xi\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u},$$

so dass also endlich

$$\frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(Y\xi\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial(Z\xi\varphi)}{\partial z}+\frac{\partial(U\xi\varphi)}{\partial u}=0.$$

Man schliesst hieraus nun das Folgende:

Kann man der Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial(Y\zeta)}{\partial y}+\frac{\partial(Z\zeta)}{\partial z}+\frac{\partial(U\zeta)}{\partial u}=0 \qquad \text{(i)}$$

durch einen andern Werth als $\zeta=0$ genügen, so wird die Gleichung

$$\zeta=\xi\frac{\partial f}{\partial u}$$

einen Werth ξ liefern, in welchem u mittelst der Gleichung (g) zu ersetzen ist. Dieser Werth gibt dann, in die Gleichung

$$\xi=M\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

eingesetzt, die Grösse M, welche der integrirende Faktor der ersten Gleichung (f) seyn wird, wenn in demselben z durch (g′) ersetzt wird. In der ersten Gleichung (f) ist eben so u zuerst mittelst (g) und dann z mittelst (g′) zu ersetzen. Man findet übrigens

$$M=\frac{\xi}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial z}}.$$

Vier gleichzeitige Differentialgleichungen.

II. Es ist aus dem Obigen leicht zu entnehmen, in welcher Weise die angewandte Methode fortgeführt werden kann, und wir wollen desshalb für den Fall von vier Veränderlichen mehr andeutungsweise verfahren.

Seyen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=Z,\ \frac{\partial u}{\partial x}=U,\ \frac{\partial v}{\partial x}=V \qquad \text{(k)}$$

die vier Gleichungen, in denen Y, Z, U, V weder 0 noch ∞ sind, und sey

$$f(x, y, z, u, v) = c \qquad (l)$$

eine Integralgleichung derselben, wo f keine willkürliche Konstante, jedenfalls aber zwei der Veränderlichen, darunter v, enthalte. Alsdann ist identisch (§. 132):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z + \frac{\partial f}{\partial u} U + \frac{\partial f}{\partial v} V = 0.$$

Man ziehe v aus (l), setze diess in die drei ersten (k) ein, und finde eine zweite Integralgleichung:

$$f_1(x, y, z, u, c) = c_1, \qquad (l_1)$$

wo f jedenfalls u enthalte; hieraus ziehe man u, setze in die zwei ersten (k) ein (v ist nicht mehr darin), und finde als Integralgleichung

$$f_1(x, y, z, c, c_1) = c_2. \qquad (l_2)$$

Hieraus ziehe man z und setze in die erste (k) ein, so hat man eine Differentialgleichung zwischen x und y. Wird nach I die Grösse M bestimmt aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\zeta)}{\partial z} + \frac{\partial (U\zeta)}{\partial u} = 0, \ \zeta = \xi \frac{\partial f_1}{\partial u}, \ \xi = M \frac{\partial f_2}{\partial z}, \qquad (n)$$

so ist dieselbe der integrirende Faktor jener Gleichung. Dabei ist zu beachten, dass überall v mittelst (l) ersetzt ist. — Geschieht diess nicht sofort, so hat man:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta)}{\partial y} + \frac{\partial (Y\zeta)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial (Z\zeta)}{\partial z} + \frac{\partial (Z\zeta)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial (U\zeta)}{\partial u} + \frac{\partial (U\zeta)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = 0,$$

oder aus (l):

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta)}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial (U\zeta)}{\partial u}\right]\frac{\partial f}{\partial v} - \left[\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta)}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial (U\zeta)}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right] = 0,$$

d. h. wenn $\frac{\partial f}{\partial v} = \varphi$:

$$\frac{\partial (\zeta\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta\varphi)}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial (U\zeta\varphi)}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\zeta\frac{\partial f}{\partial x} + Y\zeta\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + U\zeta\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial (\zeta\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (Y\zeta\varphi)}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial (V\zeta\varphi)}{\partial v} = 0.$$

Hiernach ist M zu bestimmen aus:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial (Y\mu)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\mu)}{\partial z} + \frac{\partial (U\mu)}{\partial u} + \frac{\partial (V\mu)}{\partial v} = 0, \ \mu = \zeta\frac{\partial f}{\partial v}, \ \zeta = \xi\frac{\partial f_1}{\partial u},$$

$$\xi = M\frac{\partial f_2}{\partial z}; \ M = \frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial z}}; \qquad (m)$$

wo nach einander v, u, z mittelst (l), (l_1), (l_2) zu ersetzen sind.

Allgemeine Formel.

III. Seyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die abhängig Veränderlichen; $Y_1, \ldots, Y_n$ Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$, die weder 0 noch ∞ sind, und

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = Y_1, \; \frac{\partial y_2}{\partial x} = Y_2, \; \ldots, \; \frac{\partial y_n}{\partial x} = Y_n \qquad (p)$$

die vorgelegten n Differentialgleichungen, von denen wir $n-1$ Integralgleichungen kennen, die wir auf die Formen:

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n) = c_1, \; f_2(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, c_1) = c_2, \; f_3(x, y_1, \ldots, y_{n-2}, c_1, c_2) = c_3, \ldots\ldots,$$
$$f_{n-1}(x, y_1, y_2, c_1, \ldots, c_{n-2}) = c_{n-1} \; * \qquad (q)$$

gebracht denken, wo $c_1, \ldots, c_{n-1}$ die eingetretenen willkürlichen Konstanten sind, so ist M zu bestimmen aus

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial (Y_1 \zeta)}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial (Y_n \zeta)}{\partial y_n} = 0, \; \zeta = \xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \; \xi_1 = \xi_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}}, \; \xi_2 = \xi_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_{n-2}},$$
$$\ldots, \; \xi_{n-3} = \xi_{n-2} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y_3}, \; \xi_{n-2} = M \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}, \qquad (r)$$

wenn in $\zeta, \xi_1, \ldots, M$ nach einander $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_3, y_2$ durch (q) ersetzt werden. M ist alsdann der integrirende Faktor der ersten (p), wo dieselben Grössen zu ersetzen sind.

Es folgt aus diesen Gleichungen

$$M = \frac{\zeta}{\frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}},$$

so dass also die Gleichung

$$\frac{\zeta \frac{\partial y_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}} - \frac{Y_1 \zeta}{\frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}} = 0, \qquad (s)$$

nachdem in ihr $y_2, y_3, \ldots, y_n$ aus (q) ersetzt sind, sich nach §. 96, I integriren lässt. (Eine weitere Verallgemeinerung findet sich im „Anhang" unter 𝔄, XVI.)

§. 140.

Besondere Fälle. Beispiele.

I. Ereignet es sich, dass die Grössen Y, Z, U, ... der Gleichungen (k) kein x enthalten, so setze man, da $\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{\partial z}{\partial y}$, u. s. w.:

---

* Hier muss f_1 die y_n, f_2 die $y_{n-1}, \ldots, f_{n-1}$ die y_2 enthalten; ausser den angezeigten Konstanten sollen in $f_1, \ldots, f_{n-1}$ keine andern vorkommen, so dass also f_r nur $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ enthalten darf.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{Z}{Y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{U}{Y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{V}{Y},\ldots.$$

und integrire dieses System, gemäss dem in §. 139 angegebenen Verfahren, wozu man natürlich jetzt nur $n-2$ Gleichungen zu kennen braucht, wenn n die Anzahl der Grössen $y, z, \ldots$ ist, um die $n-1^{te}$ nach Auflösung der Gleichung (m) zu finden. Eliminirt man sodann aus der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x}=Y$ alle Veränderlichen bis auf y, so erhält man hieraus

$$x=\int\frac{\partial y}{Y}+C$$

als n^{te} Integralgleichung. Für diesen Fall braucht man also bloss $n-2$ Integralgleichungen des Systems zu kennen.

Enthielten die Grössen $Y, Z, U, \ldots$ etwa kein z, so würde man die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x}=Z$ in (k) weglassen und die übrigen $n-1$ Gleichungen behandeln wie so eben; eliminirt man dann aus Z die Grössen $y, u, \ldots$ mittelst der gefundenen $n-1$ Integralgleichungen, so wird Z eine blosse Funktion von x und man hat

$$z=\int Z\,\partial x+C$$

als letzte Integralgleichung.

II. Wenn die zweiten Seiten der Gleichungen (k) denselben Nenner haben, so dass also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{Y}{X},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{Z}{X},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{U}{X},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{V}{X},\qquad (k')$$

so setze man in (m) $X\mu$ für μ und hat dann

$$\frac{\partial(X\mu)}{\partial x}+\frac{\partial(Y\mu)}{\partial y}+\frac{\partial(Z\mu)}{\partial z}+\frac{\partial(U\mu)}{\partial u}+\frac{\partial(V\mu)}{\partial v}=0,$$

$$M=\frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial f_1}{\partial u}\,\frac{\partial f_2}{\partial z}},\qquad (m')$$

damit M ein integrirender Faktor von

$$X\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0$$

sey.

III. Man sieht, dass es immer auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung (m′) ankommt. Die allgemeine Auflösung derselben kann nicht gegeben werden, allein es genügt immer ein Werth von μ der die (m′) erfüllt, wenn er nur nicht 0 oder ∞ ist, und man kann gar oft einen solchen leicht finden.

Gesetzt etwa es sey

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}=0,$$

so wird der Gleichung (m') durch $\mu=1$ genügt, welchen Werth man alsdann wählen wird. Enthält die Grösse

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}\right)=T \qquad \text{(n)}$$

ausser x keine Veränderliche, so kann man der Gleichung (m') genügen, indem man μ als blosse Funktion von x annimmt. Denn dann ist $\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial z}=\ldots$ $=0$, also wird die (m'):

$$X\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}\right)=0,\ \frac{\partial \mu}{\partial x}=-\mu T,\ \mu=e^{-\int T \partial x}.$$

Enthält dagegen die Grösse

$$\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}\right)=T_1$$

bloss z, so betrachte man μ auch bloss als Funktion von z und hat aus (m'):

$$\mu Z T_1+Z\frac{\partial \mu}{\partial z}=0,\ \mu=e^{-\int T_1 \partial z}.$$

Aehnliche Resultate erhält man, wenn

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}\right),\ \frac{1}{U}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial v}\right),\ \ldots.$$

bezüglich bloss y, u, ... enthalten.

IV. Als Beispiel mag das folgende dienen, das schon in §. 135 gelöst wurde.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{\mu x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\mu y}{r^3},\ r^2=x^2+y^2,$$

und wenn $\frac{\partial x}{\partial t}=z,\ \frac{\partial y}{\partial t}=u$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=z,\ \frac{\partial y}{\partial t}=u,\ \frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{\mu x}{r^3},\ \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Von diesen vier Gleichungen kennt man bereits zwei Integralgleichungen, und da ferner die zweiten Seiten kein t enthalten, so wird man gemäss I die zwei anderen daraus finden, wozu man zunächst die folgenden Gleichungen benützen kann:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{u}{z},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mu x}{z r^3},\ \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\mu y}{z r^3},$$

von denen nun (§. 135, II)

$$u x-z y=c,\ z^2+u^2=\frac{2\mu}{r}+c_1$$

zwei Integralgleichungen sind. Man hat also jetzt in §. 139, I

$$Y=\frac{u}{z},\ Z=-\frac{\mu x}{z r^3},\ U=-\frac{\mu y}{z r^3},\ f=u x-z y.$$

Was die dortige Gleichung (g') anbelangt, so ist $u = \frac{yz+c}{x}$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{zy+c}{zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\mu x}{zr^3},$$

welchen Gleichungen durch

$$z^2 + \left(\frac{zy+c}{x}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + c_1 \qquad (g')$$

genügt wird, eine Gleichung die sich aus der zweiten der obigen Gleichungen ergibt. Demnach ist

$$f_1 = z^2 + \left(\frac{zy+c}{x}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}.$$

Die Gleichung (i) ist

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{u}{z}\zeta\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\mu x}{zr^3}\zeta\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\mu y}{zr^3}\zeta\right)}{\partial u} = 0,$$

welcher Gleichung durch $\zeta = z$ genügt wird. Da $\frac{\partial f}{\partial u} = x$, so ist $z = x\xi$, also $\xi = \frac{z}{x}$; ferner wegen $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z + 2\left(\frac{zy+c}{x}\right)\frac{y}{x}$, und da hier u nicht vorkommt, ist

$$\frac{z}{x} = 2M\left[z + \frac{zy+c}{x^2}y\right], \quad M = \frac{xz}{2(zr^2+cy)},$$

in welcher Formel z durch den aus (g') folgenden Werth zu ersetzen ist. Alsdann ist M ein integrirender Faktor für $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u}{z}$. Multiplizirt man diese Gleichung so ist

$$\frac{xz}{r^2z+cy}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{xu}{r^2z+cy} = 0,$$

worin $u = \frac{zy+c}{x}$ und dann z aus (g') zu ersetzen ist. Das Erstere gibt

$$\frac{xz}{r^2z+cy}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{zy+c}{r^2z+cy} = 0,$$

während

$$z = \frac{-cy \pm x\sqrt{c_1r^2+2\mu r-c^2}}{r^2}, \quad r^2z+cy = \pm x\sqrt{c_1r^2+2\mu r-c^2},$$

so dass

$$\frac{-cy \pm x\sqrt{2\mu r+c_1r^2-c^2}}{\pm r^2\sqrt{2\mu r+c_1r^2-c^2}}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{cx \pm y\sqrt{2\mu r+c_1r^2-c^2}}{\pm r^2\sqrt{2\mu r+c_1r^2-c^2}},$$

$$\frac{\mp c\left(y\frac{\partial y}{\partial x}+x\right)}{r^2\sqrt{2\mu r+c_1r^2-c^2}} + \left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)\frac{1}{r^2} = 0.$$

Da $x^2+y^2=r^2$, so ist $y\frac{\partial y}{\partial x}+x = r\frac{\partial r}{\partial x}$, und wenn $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, so ist

$$x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \frac{x\frac{\partial y}{\partial \omega} - y\frac{\partial x}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{r^2}{\frac{\partial x}{\partial \omega}},$$

so dass also

$$\frac{\mp c\frac{\partial r}{\partial x}}{r\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}}=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \omega}},\quad \frac{\pm c\frac{\partial r}{\partial \omega}}{r\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}}-1=0,$$

$$\omega+c_2=\pm\int\frac{c\,\partial r}{r\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}},$$

was die Gleichung (e) in §. 135 ist. Setzt man nun endlich in $\frac{\partial x}{\partial t}=z$ für z seinen Werth, oder besser in

$$x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}=xz+yu=\pm\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2},$$

so hat man

$$r\frac{\partial r}{\partial t}=\pm\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2},\quad t+c_3=\pm\int\frac{r\,\partial r}{\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}},$$

d. h. die Gleichung (d) des §. 135.

V. Seyen die Gleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}=A_1'\ x_1+A_2'\ x_2+\ldots+A_n'\ x_n,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}=A_1''\ x_1+A_1''\ x_2+\ldots+A_n''\ x_n,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial t}=A_1^{(n)}x_1+A_2^{(n)}x_2+\ldots+A_n^{(n)}x_n,$$

in denen die Grössen A bloss von t abhängen, vorgelegt, und bezeichnet man die zweiten Seiten mit $X_1, \ldots, X_n$, so ist die Gleichung (r) des §. 139, nämlich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (X_1\zeta)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial (X_n\zeta)}{\partial x_n}=0,\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}+X_1\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}$$
$$+\zeta\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

jetzt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+X_1\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}+\zeta(A_1'+A_2''+\ldots+A_n^{(n)})=0$$

und ihr wird genügt durch

$$\zeta=e^{-\int(A_1'+A_2''+\ldots+A_n^{(n)})\partial t}.$$

VI. In der analytischen Mechanik begegnet man häufig einem System von 2n Differentialgleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt}&=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\ \frac{dp_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{dp_n}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_n},\\ \frac{dq_1}{dt}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\ \frac{dq_2}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2},\ \ldots,\ \frac{dq_n}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial p_n},\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

wo φ eine Funktion der abhängigen Grössen $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, so

wie etwa auch der unabhängigen t ist. In diesem Falle ist die erste Gleichung (r):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial p_n}\left(\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)-\ldots-\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\right)=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \zeta}{\partial p_1}+\ldots+\frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \zeta}{\partial q_1}-\ldots-\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\frac{\partial \zeta}{\partial q_n}=0.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man $\zeta=1$ setzt. Demnach lässt sich in diesem Falle der letzte Multiplikator immer ermitteln.

Hieher gehört das Beispiel in IV, wo $p_1=x$, $p_2=y$, $q_1=z$, $q_2=u$, $\varphi=\frac{1}{2}(u^2+z^2)-\frac{\mu}{r}$.

§. 141.

Ueberflüssige Integrationskonstanten.

I. Wir haben in §. 132 gezeigt, dass wenn

$$f=c \tag{a}$$

eine Integralgleichung von

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=Z,\ \frac{\partial u}{\partial x}=U,\ldots \tag{b}$$

seyn soll, wo f keine willkürliche Konstante enthält, c aber eine solche ist, nothwendig identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+\frac{\partial f}{\partial u}U+\ldots=0 \tag{c}$$

seyn müsse, und umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, auch (a) eine der Integralgleichungen von (b) seyn werde.

Man hat also durch (c) immer ein Mittel zur Hand zu entscheiden, ob eine Gleichung (a) als eine der Integralgleichungen von (b) angesehen werden dürfe oder nicht.

Gesetzt aber es seyen $f_1,\ldots,f_r$ Funktionen der Veränderlichen x, y, z, ..., ohne willkürliche Konstanten, welche für f gesetzt der (c) identisch genügen, so genügt dieser Gleichung auch $\varphi(f_1,\ldots,f_r)$, wo φ eine willkürliche Funktion ist (§. 132, IV). Es ist also

$$\varphi(f_1,\ldots,f_r)=C \tag{d}$$

ebenfalls eine Integralgleichung von (b). Wegen der Willkürlichkeit der Funktion φ kann aber in (d) eine beliebige Anzahl Konstanten eintreten, in grösserer Zahl etwa als die Zahl der abhängig Veränderlichen (§. 131, II). Diese Konstanten nun sind überflüssige, und die (d) ist zu ersetzen durch das System

$$f_1 = c_1, \; f_2 = c_2, \; \ldots, \; f_r = c_r. \qquad (e)$$

II. Es fragt sich nun, ob man entscheiden könne, es enthalte eine gefundene Integralgleichung überflüssige Konstanten oder nicht. Sey also etwa die Gleichung

$$F(x, y, z, u, \ldots, a, b, c, \ldots) = C \qquad (f)$$

aus den (b) gefunden mit den Konstanten a, b, c, ..., C, die in (b) nicht vorkommen. Die Konstanten a, b, c, ..., die in F enthalten sind, werden nun überflüssige seyn, wenn F für f in (c) gesetzt, dieser Gleichung identisch genügt. Denn dann ist F nothwendig eine Funktion der Grössen $f_1, \ldots, f_r$ (§. 132, V), die keine willkürliche Konstante enthalten.

Legt man den a, b, c, ... besondere Werthe (etwa Null) bei, und man findet dadurch aus F verschiedene Funktionen, so ist jede eine der Grössen $f_1, \ldots$ in (e).

Wird die (c) nur dann durch F identisch erfüllt, dass man über a, b, c, ... besonders verfügt, so wird, wenn diese Verfügung vorgenommen ist, die (f) auf's Neue nach derselben Weise zu untersuchen seyn, falls sie ausser C noch willkürliche Konstanten enthält (die alsdann allerdings auch überflüssige sind).

III. Tritt der so eben betrachtete Fall nicht ein, so sind die Konstanten a, b, c, .. nicht alle überflüssige. Da wir immer annehmen es sey (f) jedenfalls eine Integralgleichung von (b), so muss immer

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} Y + \frac{\partial F}{\partial z} Z + \frac{\partial F}{\partial u} U + \ldots = 0 \qquad (g)$$

eine richtige Gleichung seyn, wenn sie auch nicht identisch erfüllt ist. Da die (g) eine Gleichung zwischen den Veränderlichen ist, die nicht identisch erfüllt aber richtig ist, so stellt sie selbst eine Integralgleichung von (b) vor. In ihr kommt C nicht vor und man kann sie also nach einer der in ihr noch vorkommenden Konstanten auflösen, damit sie die Form (f) annehme. Heisst sie dann

$$F_1 = C_1, \qquad (f')$$

so tritt jetzt wieder die Untersuchung für die Gleichung (f') ein.

Genügt F_1 der (c) identisch (wie in II), so sind die in F_1 noch enthaltenen Konstanten überflüssige; genügt (f') nicht der (c) identisch, so muss, da (f') eine Integralgleichung von (b) ist, immerhin

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} Y + \frac{\partial F_1}{\partial z} Z + \frac{\partial F_1}{\partial u} U + \ldots = 0 \qquad (h)$$

eine richtige Gleichung seyn. Diess ist also dann eine Integralgleichung von (b), die jetzt wieder in derselben Weise in Bezug auf die bleibenden Konstanten untersucht wird. U. s. w.

IV. In dieser Weise gelangt man zuletzt auf eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}Y+\frac{\partial\psi}{\partial z}Z+\frac{\partial\psi}{\partial u}U+\ldots=0, \tag{i}$$

welche keine willkürlichen Konstanten enthält, aber richtig seyn muss. Ist sie identisch erfüllt, so ist die Sache in Ordnung; ist sie nicht identisch, so kann sie nur eine Verbindung von den (e) seyn, wenn man den Konstanten besondere Werthe beigelegt hat.

Muss man aber so weit gehen, so sind keine der Konstanten a, b, c, . . . überflüssige gewesen.

§. 142.

I. Integration mittelst Reihen.

Seyen wieder

$$\frac{dy}{dx}=Y,\ \frac{dz}{dx}=Z,\ \frac{du}{dx}=U,\ldots. \tag{a}$$

die zu integrirenden Gleichungen, so bilde man folgende Grössen:

$$\begin{aligned}
Y_1&=\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}Y+\frac{\partial Y}{\partial z}Z+\frac{\partial Y}{\partial u}U+\ldots,\\
Z_1&=\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}Y+\frac{\partial Z}{\partial z}Z+\frac{\partial Z}{\partial u}U+\ldots,\\
U_1&=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}Y+\frac{\partial U}{\partial z}Z+\frac{\partial U}{\partial u}U+\ldots,\\
&\vdots\\
Y_2&=\frac{\partial Y_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}Y+\frac{\partial Y_1}{\partial z}Z+\frac{\partial Y_1}{\partial u}U+\ldots,\\
Z_2&=\frac{\partial Z_1}{\partial x}+\frac{\partial Z_1}{\partial y}Y+\frac{\partial Z_1}{\partial z}Z+\frac{\partial Z_1}{\partial u}U+\ldots,\\
U_2&=\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_1}{\partial y}Y+\frac{\partial U_1}{\partial z}Z+\frac{\partial U_1}{\partial u}U+\ldots,\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{b}$$

u. s. w., welche nichts Anderes sind, als die Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ..., $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ..., wie sie aus (a) hervorgehen; setze in diesen Grössen $x=a$ (etwa 0), $y=b$, $z=c$, ..., wo b, c, .., willkürliche Konstante seyn sollen, so ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$\begin{aligned}
y&=b+\frac{x-a}{1}(Y)_a+\frac{(x-a)^2}{1.2}(Y_1)_a+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}(Y_2)_a+\ldots,\\
z&=c+\frac{x-a}{1}(Z)_a+\frac{(x-a)^2}{1.2}(Z_1)_a+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}(Z_2)_a+\ldots,\\
u&=d+\frac{x-a}{1}(U)_a+\frac{(x-a)^2}{1.2}(U_1)_a+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}(U_2)_a+\ldots,\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{c}$$

wo die Anhängung des Zeigers a bedeutet, man solle $x=a$, $y=b$, $z=c$, $u=d$, .. setzen.

II. Besonderer Fall der Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial u},\ldots, \tag{d}$$

worin S eine Funktion der Grössen x, y, z, u,... ist mit einer Konstanten α, die bei der Bildung der Grössen Y_1, Z_1, U_1, ... in (b) wegfalle.

Es ist also $\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha}=0$, $\frac{\partial Z_1}{\partial \alpha}=0$, $\frac{\partial U_1}{\partial \alpha}=0$, ... Aber

$$Y_1=\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}+\ldots,$$

$$Z_1=\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\frac{\partial S}{\partial z}+\ldots,$$

$$\vdots$$

so dass, wenn

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}+\ldots=R: \tag{e}$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial Z_1}{\partial \alpha}=\frac{\partial R}{\partial z},\ldots\ldots,$$

d. h. also auch

$$\frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=0,\ldots\ldots;$$

mithin enthält R nur x und α. Weiter ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\ldots.$$

$$=\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\,\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}+\ldots.$$

$$=R,$$

und da R kein y, z, ... enthält, also $\int R\,\partial x$ ausführbar ist:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int R\,\partial x+C. \tag{f}$$

Diese Gleichung ist also ein Integral von (d).

Ueberdiess ist

$$R=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\ldots\right],$$

so dass es genügt zu sehen, ob

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\ldots. \tag{g}$$

von y, z, ... frei sey.

Sind in S mehrere Konstanten welche in der nämlichen Lage wie α sich befinden, so erhält man eben so viele Gleichungen (f) als es solcher Konstanten gibt.

Wir bemerken hiezu, dass die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=R$$

natürlich immer richtig ist, ob die Gleichungen $\frac{\partial R}{\partial y}=0$, $\frac{\partial R}{\partial z}=0$, ... stattfinden oder nicht. Die Gleichung (f) nützt aber nur dann, wenn R von y, z, ... frei ist, da man sonst nicht integriren kann.

Viertes Buch.

Untersuchungen über bestimmte Integrale. Anhang.

Neunzehnter Abschnitt.

Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.

§. 143.

Gränzwerth von $\int_a^b f(z)\, sin\, \mu z\, \partial z$ bei wachsendem μ.

I. Angenommen f(z) sey endlich von $z = a$ bis $z = b$, ferner μ eine positive ganze Zahl. Alsdann ist (§. 42, V):

$$\int_a^b f(z)\, sin\, \mu z\, \partial z = \frac{f(a)\, cos\, \mu a - f(b)\, cos\, \mu b}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z.$$

Wechselt nun f'(z) sein Zeichen nicht, wenn man z von a bis b gehen lässt, so hat man (§. 39, III):

$$\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z = cos\, \mu[a + \Theta(b-a)]\int_a^b f'(z)\, \partial z = [f(b) - f(a)]\, cos\, \mu[a + \Theta(b-a)],$$

woraus sich ergibt, dass $\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z$ einen endlichen Werth hat. — Wechselt f'(z) zwischen a und b sein Zeichen, so zerlege man das Integral $\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z$ nach §. 42, II durch Einschiebung von Gränzen in mehrere einzelne, für welche f'(z) sein Zeichen nicht ändert. Alsdann werden die einzelnen Integrale sämmtlich endliche (d. h. nicht unendlich grosse) Werthe haben und ihre Summe daher ebenfalls, d. h. $\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z$ ist endlich.

Lässt man nun μ unbegränzt wachsen und bezieht sich *Gr* auf ein unendlich wachsendes ganzes μ, so ist hiernach

$$Gr \int_a^b f(z)\, sin\, \mu z\, \partial z = 0. \qquad \text{(a)}$$

II. Der vorstehende Beweis setzt voraus, dass f'(z) endlich sey von a bis b (§. 39, I), da man sonst von $\int_a^b f'(z)\, cos\, \mu z\, \partial z$ nicht reden kann. Diese Bedingung ist aber nicht unerlässlich.

Ist nämlich $f'(z)$ einmal unendlich zwischen a und b (für z), etwa wenn $z=\alpha$, so hat man (§. 42, II):

$$\int_a^b f(z) \sin \mu z \, \partial z = \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z + \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(z) \sin \mu z \, \partial z + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z,$$

in welcher Gleichung (das positive) ε beliebig klein seyn kann. Für ein unendlich wachsendes μ werden die beiden ersten Integrale zu Null, da $f'(z)$ nicht unendlich wird von a bis $\alpha-\varepsilon$, und von $\alpha+\varepsilon$ bis b.

Was das dritte Integral betrifft, so haben wir zu beachten, dass möglicher Weise $f(z)$ für $z=\alpha$ springen kann, d. h. dass $f(z)$ vor $z=\alpha$ eine andere Funktion ist, als nach $z=\alpha$. * Alsdann ist allerdings $f'(z)$ unendlich für $z=\alpha$, weil jetzt die Stetigkeit von $f(z)$ bei $z=\alpha$ unterbrochen ist. Wir trennen daher das dritte Integral in die Summe

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \sin \mu z \, \partial z + \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z,$$

wo nun in jedem einzelnen der zwei Integrale jedenfalls $f(z)$ dieselbe Funktion bleibt.

Was nun auch μ sey, so kann man ε immer klein genug annehmen, damit $\sin \mu z$ sein Zeichen nicht ändere wenn z von $\alpha-\varepsilon$ bis α geht, oder wenn man z von α bis $\alpha+\varepsilon$ sich ändern lässt; ** alsdann ist

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \sin \mu z \, \partial z = f[\alpha-\varepsilon+\Theta\varepsilon] \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \sin \mu z \, \partial z = f[\alpha-\varepsilon+\Theta\varepsilon] \frac{\cos \mu(\alpha-\varepsilon) - \cos \mu\alpha}{\mu},$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z = f[\alpha+\Theta\varepsilon] \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \sin \mu z \, \partial z = f[\alpha+\Theta\varepsilon] \frac{\cos \mu\alpha - \cos \mu(\alpha+\varepsilon)}{\mu},$$

woraus sofort folgt, dass für unendlich wachsende μ beide Integrale, also auch ihre Summe, zu Null werden. Damit ergibt sich aber die Gleichung (a) als auch in diesem Falle richtig.

Würde $f'(z)$ mehrere Male unendlich zwischen a und b, so würde durch mehrfache Theilung des Integrals $\int_a^b f(z) \sin \mu z \, \partial z$ der Satz sich eben so beweisen lassen.

Uebrigens lässt sich die Behauptung, dass $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z$ gleich Null zu setzen ist, auch in folgender Weise zeigen. Man kann ε immer klein genug nehmen, damit $f(z)$ von $\alpha-\varepsilon$ bis α, so wie von α bis $\alpha+\varepsilon$ je dasselbe Zeichen habe. Dann ist

---

* Z. B. vor $z=\alpha$ etwa $f(z)=z$, nach $z=\alpha$ aber $f(z)=\frac{1}{z}$.

** Sollte $\sin \mu z$ sein Zeichen ändern, wenn z von $\alpha-\varepsilon$ bis α geht, so müsste, wenn φ zwischen 0 und ε läge, $\mu(\alpha-\varphi)=n\pi$ seyn, wo n eine ganze Zahl; nimmt man also ε nur kleiner als φ, so wird $\sin \mu z$ sein Zeichen nicht ändern. — Von $z=\alpha-\varepsilon$ bis $z=\alpha+\varepsilon$ aber kann man nicht gehen, da z. B. für $\alpha=2\pi$ jedenfalls $\sin \mu(2\pi-\varepsilon)$ und $\sin \mu(2\pi+\varepsilon)$ von verschiedenem Zeichen sind.

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z = \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \sin \mu z \, \partial z$$

$$+ \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z = \sin \mu (\alpha - \varepsilon + \Theta \varepsilon) \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \, \partial z + \sin \mu (\alpha + \Theta \varepsilon) \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \, \partial z.$$

Die beiden Integrale $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \partial z$, $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \partial z$ drücken Flächeninhalte aus (§. 45, I), da f(z) in jedem dieselbe Funktion ist und auch dasselbe Zeichen beibehält. Da der Unterschied der Gränzen ε ist, so wird in Fig. 16 die Grösse $MM' = \varepsilon$ seyn, woraus sofort hervorgeht, dass mit kleiner werdendem ε auch die Fläche unbegränzt klein wird. Man kann also ε immer klein genug nehmen, damit die Grössen $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} f(z) \partial z$, $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \partial z$ beliebig klein sind, woraus dann folgt, dass auch $\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z$ beliebig klein werden kann. Eine solche Grösse ist aber Null zu setzen. *

III. Ist also f(z) endlich von $z = 0$ bis $z = b$, so ist hiernach

$$Gr \int_0^b f(z) \sin \mu z \, \partial z = 0. \qquad (a')$$

Dieser Satz gilt übrigens auch, wenn f(z) unendlich ist für $z = 0$, wenn nur unbedingt $f(z) \sin \mu z$ endlich ist für $z = 0$, was auch μ sey. Denn es ist $(\varepsilon > 0)$

$$\int_0^b f(z) \sin \mu z \, \partial z = \int_0^{\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z + \int_{\varepsilon}^b f(z) \sin \mu z \, \partial z,$$

wo nun nach I das zweite Integral Null wird für $\mu = \infty$. Für das erste bleibt $f(z) \sin \mu z$ immer endlich, so dass ε klein genug gemacht werden kann, damit $\int_0^{\varepsilon} f(z) \sin \mu z \, \partial z$ beliebig klein, d. h. Null sey.* Würde aber $f(z) \sin \mu z$ für $z = 0$ mit μ unbegränzt wachsen, so lässt sich das Letztere nicht mehr behaupten, wie sich diess aus der geometrischen Betrachtung, welche wir oben anwendeten, auch sofort ergibt, wenn man nur $f(z) \sin \mu z$ als die Ordinate der Kurve ansieht (und dabei $\mu = \infty$, ε sehr klein denkt).

Gränzwerth von $\int_0^b \frac{F(z) \sin \mu z}{\sin z} \partial z$.

IV. In der Gleichung (a') wollen wir $f(z) = \frac{F(z) - F(0)}{\sin z}$ setzen, dabei F(z) endlich von 0 bis b, und $b \gtrless {0 \atop \pi}$ annehmen, so ist f(z) endlich von 0 bis b. Für $z = 0$ ist allerdings der Nenner 0; allein es ist (§. 22) für $z=0$: $\frac{\sin \mu z}{\sin z} = \mu$, so dass

---

* Ist eine Grösse so beschaffen, dass man sie beliebig klein nehmen kann, so muss sie gleich Null gesetzt werden. Denn wäre sie $= \delta$, wo δ von 0 verschieden, so widerspräche diess der Annahme, sie könne beliebig klein, also auch noch kleiner als δ seyn.

$$\frac{F(z)-F(0)}{\sin z} \sin \mu z \text{ zu } [F(0)-F(0)]\mu,$$

d. h. zu 0 wird, also endlich bleibt. Demnach

$$Gr\int_0^b \frac{F(z)-F(0)}{\sin z} \sin \mu z \, \partial z = 0.$$

Ist nun $Gr\int_0^b \frac{F(0) \sin \mu z}{\sin z} \partial z$ endlich, so folgt hieraus

$$Gr\int_0^b \frac{F(z)}{\sin z} \sin \mu z \, \partial z = Gr\int_0^b F(0) \frac{\sin \mu z}{\sin z} \partial z = F(0)\, Gr\int_0^b \frac{\sin \mu z}{\sin z} \partial z,$$

und es bleibt bloss zu zeigen, dass $Gr\int_0^b \frac{\sin \mu z}{\sin z} \partial z$ einen bestimmten Werth hat. Alsdann ist

$$Gr\int_0^b \frac{F(z) \sin \mu z}{\sin z} \partial z = F(0)\, Gr\int_0^b \frac{\sin \mu z}{\sin z} \partial z, \quad b \gtrless \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix}. \qquad \text{(b)}$$

Auf das letzte Integral kann der Satz (a′) nicht sofort angewendet werden [da dann $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, also unendlich für $z = 0$ wäre, und $\frac{\sin \mu z}{\sin z}$ für $z = 0$ gleich μ ist, also mit μ wächst]. Um es aber zu bestimmen, wollen wir $\mu = 2n + 1$ annehmen, wo n eine ganze positive Zahl ist. Man hat nun *

$$\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} = 1 + 2[\cos 2z + \cos 4z + \ldots + \cos 2nz],$$

also

$$\int \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} \partial z = z + \sin 2z + \frac{1}{2} \sin 4z + \ldots + \frac{1}{n} \sin 2nz,$$

woraus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} \partial z = \frac{\pi}{2},$$

was auch n seyn möge. Da ferner $\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} \partial z$ sich mit unendlich wachsendem n, nach der Gleichung (a), der Null unbegränzt nähert, wenn b zwischen 0 und π liegt, in welchem Falle $\frac{1}{\sin z}$ immer endlich bleibt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und b, so ist

---

* Man setze $1 + 2[\cos 2z + \cos 4z + \ldots + \cos 2nz] = S$, so ist $S \sin 2z = \sin 2z + \sin 4z - \sin 0 + \sin 6z - \sin 2z + \ldots + \sin(2n+2)z - \sin(2n-2)z = \sin(2n+2)z + \sin 2nz = 2\sin(2n+1)z \cos z$, und da $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, so ist

$$2S \sin z \cos z = 2 \sin(2n+1)z \cos z, \quad S = \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}.$$

(Vergl. mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“ I, §. 14)



$$Gr\int_0^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = Gr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z + Gr\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \frac{\pi}{2},$$

und mithin in (b):

$$Gr\int_0^b \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \frac{\pi}{2}F(0). \quad b \lesseqgtr \frac{\pi}{0}. \qquad \text{(c)}$$

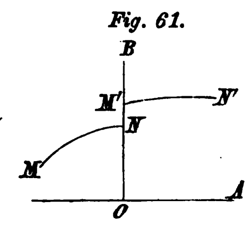


Fig. 61.

Dabei müssen wir bemerken, dass wenn $F(z)$ für $z=0$ etwa zwei Werthe hätte, was der Fall ist, wenn $F(z)$ die Ordinate der Kurve MNM'N' (Fig. 61) ausdrückt, wo für $z=0$ die zwei Werthe ON, OM' gewählt werden können, in der Formel (c) derjenige zu wählen ist, der gegen die positiven z liegt, also hier OM'. Wir wollen ihn dadurch bezeichnen, dass wir $F(+0)$ schreiben, so wie überhaupt, wenn $F(z)$ für $z=\alpha$ zwei Werthe haben könnte, wir den einen mit $F(\alpha-0)$, den andern mit $F(\alpha+0)$ bezeichnen wollen. Dass diese Möglichkeiten in unserer Formel (c) nicht ausgeschlossen sind, ist klar, da sie bloss verlangt, dass $F(z)$ endlich sey von $z=0$ bis $z=b$.

V. Der in der Gleichung (c) ausgesprochene Satz gilt nicht mehr für $b=\pi$, da die Grösse $\frac{F(z)-F(0)}{\sin z}$ für $z=\pi$ unendlich wird. Aber man hat:

$$\int_0^{\pi}\frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z.$$

Setzt man im zweiten Integrale $z=\pi-u$, $\frac{\partial z}{\partial u}=-1$, so sind die Gränzen von $u: \frac{\pi}{2}$, 0, und es ist (§. 42):

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{F(\pi-u)\sin(2n+1)(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}\partial u$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(\pi-u)\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(\pi-z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z;$$

also

$$Gr\int_0^{\pi}\frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = Gr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(z)+F(\pi-z)}{\sin z}\sin(2n+1)z\,\partial z$$

$$= \frac{\pi}{2}[F(+0)+F(\pi-0)], \qquad \text{(d)}$$

wenn man den Satz (c) beachtet, wo dann $b=\frac{\pi}{2}$ ist.

§. 144.

Die Fourierschen Reihen.

I. Wir wollen durch das Zeichen

$$\sum_1^n \int_0^\pi f(z) \cos \mu (z-x) \partial z$$

die Summe der Reihe bezeichnen, die man erhält, wenn man in $\int_0^\pi f(z) \cos \mu (z-x) \partial z$ nach einander setzt $\mu = 1, 2, \ldots\ldots, n$; dessgleichen bedeute $\sum_1^\infty \int_0^\pi f(z) \cos \mu (z-x) \partial z$ die Summe der unendlichen Reihe:

$$\int_0^\pi f(z) \cos (z-x) \partial z + \int_0^\pi f(z) \cos 2 (z-x) \partial z + \int_0^\pi f(z) \cos 3 (z-x) \partial z + \ldots\ldots,$$

welche Summe nichts Anderes ist, als der Gränzwerth dem die erstere sich mit unendlich wachsendem n nähert. Man hat aber

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z) \partial z + \sum_1^n \int_0^\pi f(z) \cos \mu (z-x) \partial z = \int_0^\pi f(z) \left[\frac{1}{2} + \cos (z-x) + \cos 2 (z-x) + \ldots \right.$$

$$\left. + \cos n (z-x)\right] \partial z = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(z) \frac{\sin (2n+1) \left(\frac{z-x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{z-x}{2}\right)} \partial z \text{ (§. 143).}$$

Setzt man $z - x = 2u$, so hat man

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z) \partial z + \sum_1^n \int_0^\pi f(z) \cos \mu (z-x) \partial z = \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi - x)} f(x+2u) \frac{\sin (2n+1) u}{\sin u} \partial u$$

$$= \int_{-\frac{x}{2}}^0 f(x+2u) \frac{\sin (2n+1) u}{\sin u} \partial u + \int_0^{\frac{\pi - x}{2}} f(x+2u) \frac{\sin (2n+1) u}{\sin u} \partial u$$

$$= \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-2z) \frac{\sin (2n+1) z}{\sin z} \partial z^* + \int_0^{\frac{\pi - x}{2}} f(x+2z) \frac{\sin (2n+1) z}{\sin z} \partial z.$$

Lässt man hier n unendlich gross werden, so hat man als Werthe dieser zwei Integrale, gemäss (c) und (d), wo F (z) gleich $f(x-2z)$ oder $f(x+2z)$:

a) wenn $x = 0$: erstes Integral $= 0$, zweites $= \frac{\pi}{2} f(x+0) = \frac{\pi}{2} f(+0)$,

b) wenn $x \gtrless {0 \atop \pi}$: erstes Integral $= \frac{\pi}{2} f(x-0)$, zweites $= \frac{\pi}{2} f(x+0)$,

c) wenn $x = \pi$: erstes Integral $= \frac{\pi}{2} f(\pi - 0)$, zweites $= 0$.

---

* $z = -u$ gesetzt.

Daraus folgt, dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + \sum_1^\infty \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z &= \frac{\pi}{2} f(+0), \text{ wenn } x=0,\\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \text{ wenn } x \gtrless {0 \atop \pi},\\ &= \frac{\pi}{2} f(\pi-0), \text{ wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\ (e)$$

Ist $f(x)$ nur einwerthig, so ist $f(x-0)+f(x+0)=2f(x)$.

II. Ganz in derselben Weise wird man nun erhalten:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + \sum_1^n \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z+x)\,\partial z = \int_0^\pi f(z)\Big[\frac{1}{2}+\cos(z+x)+\cos 2(z+x)+\ldots\ldots$$

$$+\cos n(z+x)\Big]\partial z = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\frac{\sin(2n+1)\frac{z+x}{2}}{\sin\frac{z+x}{2}}\partial z = \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u - \int_0^{\frac{1}{2}x} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u.$$

Lässt man hier wieder $n=\infty$ werden, so ist abermals

a) für $x=0$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(0-x)=\frac{\pi}{2}f(+0)$, zweites $=0$,

b) für $x\gtrless{0 \atop \pi}$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(0-x)$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(0-x)$,

c) für $x=\pi$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}[f(0-\pi)+f(\pi-0)]$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(0-\pi)$.

Demnach

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + \sum_1^\infty \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z+x)\,\partial z &= \frac{\pi}{2} f(+0), \text{ wenn } x=0,\\ &= 0, \text{ wenn } x \gtrless {0 \atop \pi},\\ &= \frac{\pi}{2} f(\pi-0), \text{ wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\ (f)$$

III. Addirt man die zwei Gleichungen (e) und (f) und beachtet, dass $\cos\mu(z-x)+\cos\mu(z+x)=2\cos\mu z\cos\mu x$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\mu x\int_0^\pi f(z)\cos\mu z\,\partial z &= \pi f(+0), \text{ wenn } x=0,\\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \text{ wenn } x \gtrless {0 \atop \pi},\\ &= \pi f(\pi-0), \text{ wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\ (g)$$

Ist $f(x)$ immer nur einwerthig, so ist also die erste Seite $=\pi f(x)$, wenn $0 \leqq x \leqq \pi$.

Subtrahirt man eben so die Gleichungen (e) und (f), so ist wegen $\cos\mu(z-x) - \cos\mu(z+x) = 2\sin\mu x \sin\mu z$:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_1^\infty \sin\mu x \int_0^\pi f(z)\sin\mu z\,\partial z &= 0, \text{ wenn } x=0 \text{ oder } =\pi, \\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \text{ wenn } 0<x<\pi. \end{aligned}\right\} \text{(h).}$$

§. 145.

Erweiterung der erhaltenen Ergebnisse.

I. Man setze in den Formeln (g) und (h): $z=\frac{\pi z'}{c}$, $x=\frac{\pi x'}{c}$, so sind die Gränzen nach z': 0 und c, wobei wir $c>0$ voraussetzen; mithin

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{c}\int_0^c f\left(\frac{\pi z'}{c}\right)\partial z' + \frac{2\pi}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x'}{c}\int_0^c f\left(\frac{\pi z'}{c}\right)\cos\frac{\mu\pi z'}{c}\partial z' \\ = \pi f(+0), \text{ wenn } x'=0, \\ = \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\pi x'}{c}-0\right)+f\left(\frac{\pi x'}{c}+0\right)\right], \text{ wenn } 0<\frac{\pi x'}{c}<\pi, \\ \text{d. h. } 0<x'<c, \\ = \pi f(\pi-0), \text{ wenn } x'=c, \end{aligned}$$

indem für $x=\pi$ auch $x'=c$ ist. Eben so:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x'}{c}\int_0^c f\left(\frac{\pi z'}{c}\right)\sin\frac{\mu\pi z'}{c}\partial z' &= 0, \text{ wenn } x'=0, \text{ oder } x'=c, \\ &= \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\pi x'}{c}-0\right)+f\left(\frac{\pi x'}{c}+0\right)\right], 0<x'<c. \end{aligned}$$

Setzt man hier $f\left(\frac{\pi u}{c}\right)=\varphi(u)$ und lässt dann die Accente weg, so erhält man [indem $f(+0)=\varphi(+0)$, $f(\pi-0)=\varphi(c-0)$]:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^c \varphi(z)\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c \varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z &= c\,\varphi(+0), \text{ wenn } x=0, \\ &= \frac{c}{2}[\varphi(x-0)+\varphi(x+0)], 0<x<c, \\ &= c\,\varphi(c-0), x=c; \\ 2\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c \varphi(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z &= 0, \text{ wenn } x=0 \text{ oder } =c, \\ &= \frac{c}{2}[\varphi(x-0)+\varphi(x+0)], 0<x<c. \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

II. Man setze in der ersten Formel (i): $\varphi(z)=f(z)+f(-z)$, so ist

$$\begin{aligned} \int_0^c \varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z &= \int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z + \int_0^c f(-z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z \\ &= \int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z - \int_0^{-c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z, \end{aligned}$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z &= c\,[f(+0)+f(-0)], \text{ wenn } x=0,\\ &= \frac{c}{2}\,[f(x-0)+f(-x+0)+f(x+0)\\ &\quad + f(-x-0)],\ 0<x<c,\\ &= c\,[f(c-0)+f(-c+0)],\ x=c.\end{aligned}\right\}\ (k)$$

Eben so wenn man in der zweiten Formel (i) setzt: $\varphi(z)=f(z)-f(-z)$:

$$\begin{aligned}2\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_{-c}^{+c} f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z &= 0, \text{ wenn } x=0 \text{ oder } =c, \qquad (k')\\ &= \frac{c}{2}\,[f(x-0)-f(-x+0)+f(x+0)-f(-x-0)],\ 0<x<c.\end{aligned}$$

III. Die Addition der Formeln (k) und (k′) gibt wegen $\cos\frac{\mu\pi x}{c}\cos\frac{\mu\pi z}{c} + \sin\frac{\mu\pi x}{c}\sin\frac{\mu\pi z}{c} = \cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}$:

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty\int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z &= c\,[f(+0)+f(-0)],\ x=0,\\ &= \frac{c}{2}\,[2f(x-0)+2f(x+0)],\ 0<x<c,\\ &= c\,[f(c-0)+f(-c+0)],\ x=c.\end{aligned}$$

Eben so liefert die Subtraktion:

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty\int_{-c}^{+c} f(c)\cos\frac{\mu\pi(z+x)}{c}\,\partial z &= c\,[f(+0)+f(-0)],\ x=0,\\ &= c\,[f(-x+0)+f(-x-0)],\ 0<x<c,\\ &= c\,[f(c-0)+f(-c+0)],\ x=c.\end{aligned}$$

Man wird leicht übersehen, dass für ein negatives x zwischen 0 und — c die erste Formel in die zweite übergeht, so dass man setzen kann:

$$\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty\int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z = c\,[f(x-0)+f(x+0)],\ -c<x<+c, \quad (l)$$

da für $x=0$ wirklich $c[f(-0)+f(+0)]$ erscheint; für $0<x<c$ aber $c[f(x-0)+f(x+0)]$; für $0>x>-c$, also wenn $x=-x'$, für $0<x'<c$: $c[f(-x'-0)+f(-x'+0)]$. Für $x=\pm c$ müsste die zweite Seite heissen $c[f(c-0)+f(-c+0)]$.

IV. Die Formeln (i) und (l) heissen auch:

$$\int_0^c f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z = c\,f(x),\ 0<x<c,$$

$$2\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z = c\,f(x),\ 0<x<c,$$

$$\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + 2\sum_1^\infty\int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z = 2c\,f(x),\ -c<x<+c,$$

wenn man dazu nur die Bedingung knüpft, dass falls $f(x)$ einmal doppelwerthig ist, man die halbe Summe beider Werthe zu nehmen habe. Die erste

Formel gilt für $x=0$, wenn man alsdann nur den Werth $f(+0)$ wählt, und für $x=c$, wenn man $f(c-0)$ nimmt.

Aus diesen Formeln zieht man $(c>0)$:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{c}\int_0^c f(z)\,\partial z + \frac{2}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z,\quad 0<x<c;\\
f(x) &= \frac{2}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\,\partial z,\quad 0<x<c;\\
f(x) &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + \frac{1}{c}\sum_1^\infty \int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z,\quad -c<x<+c,
\end{aligned}\right\}\quad (m)$$

wo die erste Formel für $x=0$ und $x=c$ noch gilt, wenn man im Falle etwaiger Doppelwerthigkeit an diesen Stellen nur die Werthe $f(+0)$, $f(c-0)$ auf der ersten Seite setzt. Hat überhaupt $f(x)$ einmal zwei Werthe, so ist auf der ersten Seite alsdann die halbe Summe dieser Werthe zu nehmen.

Für $x=0$ oder $=c$ müsste in der zweiten Formel die erste Seite $=0$ gesetzt werden; für $x=\pm c$ aber in der dritten $=\frac{1}{2}[f(c-0)+f(-c+0)]$. $f(x)$ ist übrigens keiner weitern Bedingung unterworfen, als endlich zu seyn in den angegebenen Gränzen.

§. 146.

Anwendung der erhaltenen Sätze.

Die im Vorigen gefundenen Sätze geben nun bereits die Mittel zur Auflösung einer bedeutenden Anzahl eigenthümlicher Aufgaben an die Hand, von denen wir einige betrachten wollen.

1. Man soll eine Funktion von x finden, die von $x=0$ bis $x=c$ gleich 1 sey.

Man setze in der zweiten Formel (m) $f(z)=1$, so ist $\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z$ $=-\frac{c}{\mu\pi}[\cos\mu\pi-1]$, so dass also

$$1=\frac{2}{c}\sum_1^\infty -\frac{c}{\mu\pi}(\cos\mu\pi-1)\sin\frac{\mu\pi x}{c} = -\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{\mu}(\cos\mu\pi-1)\sin\frac{\mu\pi x}{c}.$$

Setzt man hier $\mu=1, 2, \ldots$, so wird also die unendliche Reihe

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{c}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{c}+\ldots\ldots\right]$$

immer 1 seyn von $x=0$ bis $x=c$, jedoch mit Ausschluss dieser Gränzen. (Sie ist -1 für $0>x>-c$).

2) Man soll eine Funktion von x bestimmen, die von $-c$ bis $+c$ gleich x sey.

In derselben Formel setze man $f(z)=z$, so wird sie auch von 0 bis $-c$ für x gelten. Alsdann ist.

$$\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_0^c z\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = -\frac{c^2}{\mu\pi}\cos\mu\pi,$$

und mithin

$$-\frac{2}{c}\sum_1^\infty \frac{c^2}{\mu\pi}\cos\mu\pi\sin\frac{\mu\pi x}{c}=x,\ -c<x<+c$$

d. h. die unendliche Reihe

$$\frac{2c}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{c}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c}+\ldots\right]$$

ist gleich x, von $x=-c$ bis $x=+c$ mit Ausschluss dieser Gränzen.

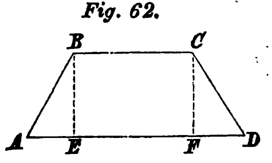


Fig. 62.

3) In dem Trapez ABCD (Fig. 62) ist $AE=DF=BE=CF=\alpha$, BC parallel AD, $AD=c$; man soll die Gleichung des Umfangs ABCD aufstellen.

Nimmt man AD als Abszissenaxe, A als Anfangspunkt, so ist $y=x$ die Gleichung der Geraden AB, $y=\alpha$ die von BC, $y=c-x$ die von CD, so dass man also eine Funktion y von x zu bestimmen hat, die von $x=0$ bis $x=\alpha$ gleich x, von $x=\alpha$ bis $x=c-\alpha$ gleich α, von $x=c-\alpha$ bis $x=c$ gleich $c-x$ ist. Wählt man dazu wieder die zweite Gleichung (m), so ist

$$\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\int_0^\alpha z\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z+\int_\alpha^{c-\alpha}\alpha\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z+\int_{c-\alpha}^c(c-z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z$$
$$=\frac{c^2}{\mu^2\pi^2}\left[\sin\frac{\mu\alpha\pi}{c}+\sin\left(\mu\pi-\frac{\mu\pi\alpha}{c}\right)\right].$$

Setzt man hier nach einander $\mu=1,\ 2,\ldots,$ so ist also

$$y=\frac{4c}{\pi^2}\left[\sin\frac{\alpha\pi}{c}\sin\frac{x\pi}{c}+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\alpha\pi}{c}\sin\frac{3\pi x}{c}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\alpha\pi}{c}\sin\frac{5x\pi}{c}+\ldots\right],$$

welche Gleichung (in diesem Falle) auch noch für $x=0$ und $x=c$ gilt.

Wollte man überhaupt, es solle $y=\varphi_1(x)$ seyn von $x=0$ bis $x=a_1$, gleich $\varphi_2(x)$ von $x=a_1$ bis $x=a_2,\ldots,$ gleich $\varphi_n(x)$ von $x=a_{n-1}$ bis a_n, so wäre, wenn man etwa die erste Formel (m) benützen würde:

$$y=A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{a_n}+A_2\cos\frac{2\pi x}{a_n}+\ldots\ldots,$$

wo

$$A_0=\frac{1}{a_n}\left[\int_0^{a_1}\varphi_1(z)\partial z+\int_{a_1}^{a_2}\varphi_2(z)\partial z+\ldots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\varphi_n(z)\partial z\right],$$

und

$$A_r=\frac{2}{a_n}\left[\int_0^{a_1}\varphi_1(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z+\int_{a_1}^{a_2}\varphi_2(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z+\ldots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\varphi_n(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z\right],$$

$r=1,\ 2,\ldots.$ Für $x=a_1$ ist übrigens $y=\frac{1}{2}[\varphi_1(a_1)+\varphi_2(a_1)],\ldots,$ für $x=a_{n-1}$: $y=\frac{1}{2}[\varphi_{n-1}(a_{n-1})+\varphi_n(a_{n-1})]$.

4) Das bereits in §. 61, I gelöste Problem lässt sich auch mittelst der Formeln des §. 144 leicht lösen. Man hatte dort:

$$x=\psi+\frac{e}{a}\sin x,\ tg\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\,tg\tfrac{1}{2}x,\ r=a-e\cos x,$$

und sollte x als Funktion von ψ bestimmen, um namentlich v als Funktion von ψ zu erhalten. Man setze

$$v - \psi = A_1 \sin\psi + A_2 \sin 2\psi + \ldots\ldots,$$

so wird es sich um die Bestimmung von A_n handeln. Nach dem Satze (h) ist aber, wenn $v - \psi = f(\psi)$:

$$f(\psi) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sin\mu\psi \int_0^\pi f(z) \sin\mu z\, \partial z, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(z) \sin n z\, \partial z.$$

Die Grösse $f(z)$ erhält man, wenn man in $v - \psi$, d. h. $f(\psi)$, die ψ durch z ersetzt, wo der Zusammenhang zwischen v und ψ durch die obigen Gleichungen gegeben ist. Man sieht leicht, dass

$$\int_0^\pi f(z) \sin n z\, \partial z = \int_0^\pi (v - \psi) \sin n\psi\, \partial\psi,$$

wo der Zusammenhang zwischen v und ψ geradezu aus den obigen Formeln entnommen werden muss. Setzt man hier (behufs Umformung)

$$\psi = x - \frac{e}{a} \sin x, \text{ so ist } tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\, tg\tfrac{1}{2}x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a - e\cos x},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1 - \frac{e}{a}\cos x,$$

und da die Gränzen von x auch sind 0 und π, so ist

$$\int_0^\pi f(z) \sin n z\, \partial z = \int_0^\pi \left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right) \sin n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right] \left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right) \partial x.$$

Aber es ist (§. 27):

$$\int \left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right) \sin n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x = -\frac{\left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right)\cos n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]}{n}$$

$$+ \frac{1}{n}\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - 1 + \frac{e}{a}\cos x\right) \cos n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right] \partial x,$$

da $\int \sin n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x = -\frac{1}{n}\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)$ ist. Also da für $x = 0$, $v = 0$; für $x = \pi$, $v = \pi$:

$$\int_0^\pi \left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right) \sin n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x =$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a - e\cos x} - 1 + \frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\partial x =$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a - e\cos x}\cos n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]\partial x - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\partial x,$$

und da letztere Grösse $= 0$, indem $\int \left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\partial x = \frac{1}{n}\sin n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)$, so ist endlich

$$A_n = \frac{2\sqrt{a^2 - e^2}}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\left(nx - \frac{e}{a}\sin x\right)}{a - e\cos x}\partial x.$$

Will man diesen Werth berechnen, so setze man zuerst

$$\cos\left(nx-\frac{ne}{a}\sin x\right)=\cos nx\cos\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)+\sin nx\sin\left(\frac{ne}{a}\sin x\right),$$

verwandle dann $\cos\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)$, $\sin\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)$ in unendliche Reihen (§. 54), so wird man Integrale erhalten, die wie in §. 35, III bestimmt werden können.

Setzt man eben so

$$r=B_0+B_1\cos\psi+B_2\cos 2\psi+\ldots\ldots,$$

so ist nach der Formel (g):

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi r\cos n\psi\,\partial\psi,\quad B_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\,\partial\psi.$$

Ganz eben so wie vorhin ist wieder

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(a-e\cos x)\cos n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\partial x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)e\sin x\,\partial x$$

$$=-\frac{2e}{n\pi}\int_0^\pi\sin x\sin\left[n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\right]\partial x,\ n=1,2,\ldots;\ B_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(a-e\cos x)\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\partial x$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)^2\partial x=a\left(1+\frac{1}{2}\frac{e^2}{a^2}\right).$$

Diese Auflösung rührt von Bessel her. Man sehe „Zeitschrift für Astronomie etc." von Lindenau und Bohnenberger, 5. Band, 1818, S. 367. Poisson theilt sie in seiner Mechanik (ohne Nennung des Urhebers) I, §. 221 mit, jedoch in etwas zu weitläufiger Form.

5) Dass man die abgeleiteten Formeln zu Reihensummirungen benützen kann, ist leicht ersichtlich.

Setzt man etwa in der Formel (h): $f(x)=e^{mx}$, so ergibt sich:

$$\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\sin x-\frac{2(e^{m\pi}-1)}{m^2+4}\sin 2x+\frac{3(e^{m\pi}+1)}{m^2+9}\sin 3x-\ldots=\frac{\pi}{2}e^{mx},\ 0<x<\pi,$$

während die Formel (g) gibt:

$$\frac{e^{m\pi}-1}{2m^2}-\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\cos x+\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+4}\cos 2x-\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+9}\cos 3x+\ldots=\frac{\pi}{2m}e^{mx},\ 0\overline{\overline{<}}x\overline{\overline{<}}\pi.$$

Setzt man in derselben Formel $f(x)=\sin x$, so ist wegen

$$\int_0^\pi\sin z\cos\mu z\,\partial z=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi[\sin(\mu+1)x-\sin(\mu-1)z]\,\partial z=\tfrac{1}{2}\left(-\frac{\cos(\mu+1)\pi}{\mu+1}+\frac{\cos(\mu-1)\pi}{\mu-1}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\mu^2-1}\right)=-\frac{1}{\mu^2-1}+\frac{\cos\mu\pi}{2(\mu+1)}-\frac{\cos\mu\pi}{2(\mu-1)}=-\frac{\cos\mu\pi+1}{\mu^2-1}=-\frac{\cos\mu\pi+1}{(\mu+1)(\mu-1)},$$

und

$$\int_0^\pi\sin z\cos z\,\partial z=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2z\,\partial z=0,\ \int_0^\pi\sin z\,\partial z=2:$$

$$1-2\left(\frac{\cos 2x}{1.3}+\frac{\cos 4x}{3.5}+\frac{\cos 6x}{5.7}+\ldots\right)=\frac{\pi}{2}\sin x,\ 0\overline{\overline{<}}x\overline{\overline{<}}\pi.$$

Eine Menge solcher Resultate habe ich abgeleitet in Crelles Journal, 34. Bd., S. 75 — 100.

§. 147.

Erweiterung für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

I. Die Formeln des §. 145 lassen sich leicht auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen. * Ist nämlich f(x, y) eine beliebige Funktion der zwei Veränderlicken x und y, so hat man nach (m):

$$f(x,y)=\frac{1}{c}\int_0^c f(u,y)\,\partial u+\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(u,y)\cos\frac{n\pi u}{c}\,\partial u,$$

$$=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(u,y)\sin\frac{n\pi u}{c}\,\partial u,$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(u,y)\,\partial u+\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-c}^{+c} f(u,y)\cos\frac{n(u-x)\pi}{c}\,\partial u,$$

während nach denselben Formeln:

$$f(u,y)=\frac{1}{c'}\int_0^{c'} f(u,v)\,\partial v+\frac{2}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^{c'} f(u,v)\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v,$$

$$=\frac{2}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\sin\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^{c'} f(u,v)\sin\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v,$$

$$=\frac{1}{2c'}\int_{-c'}^{c'} f(u,v)\,\partial v+\frac{1}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\int_{-c'}^{+c'} f(u,v)\cos\frac{n'(v-y)\pi}{c'}\,\partial v.$$

Setzt man letztere Werthe in jeden der ersten ein, so erhält man neunerlei Ausdrücke für f(x, y), die sind:

$$f(x,y)=\frac{1}{cc'}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\,\partial v+\frac{2}{cc'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v$$

$$+\frac{2}{cc'}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{n\pi x}{c}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\cos\frac{n\pi u}{c}\,\partial v$$

$$+\frac{4}{cc'}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\cos\frac{n\pi u}{c}\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v,$$

$$0\overline{\overline{<}}\,x\,\overline{\overline{<}}\,c,\quad 0\overline{\overline{<}}\,y\,\overline{\overline{<}}\,c',$$

$$f(x,y)=\frac{2}{cc'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\sin\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\sin\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v$$

$$+\frac{4}{cc'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c\partial u\int_0^{c'} f(u,v)\cos\frac{n\pi u}{c}\sin\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v$$

$$0\overline{\overline{<}}\,x\,\overline{\overline{<}}\,c,\quad 0<y<c'$$

u. s. w.

Man sieht, dass man hiedurch unendliche Doppelreihen erhält, deren Glieder von der Form

---

* Hiebei lassen wir nun, um die Untersuchung nicht zu verwickelt zu machen, die Unterscheidung für den Fall der Doppelwerthigkeit fallen. Wir würden also allen Formeln nunmehr beisetzen müssen, dass dieselben für diejenigen Werthe der Veränderlichen, für die die Funktion mehrwerthig auftritt, nicht gelten, wohl aber für alle andern.

$$A \frac{\sin}{\cos} \frac{n\pi x}{c} \frac{\sin}{\cos} \frac{n'\pi y}{c'}$$

sind. Gesetzt also etwa, man solle $f(x, y)$ als eine unendliche Doppelreihe ausdrücken, deren allgemeines Glied

$$A_{n, n'} \sin \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi y}{c'},$$

wo n und n' von 1 bis ∞ gehen können, so ist dem Vorstehenden gemäss

$$A_{n, n'} = \frac{4}{c c'} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} f(u, v) \sin \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi v}{c'} \partial v.$$

II. Ganz in derselben Weise wird man eine Funktion dreier Veränderlichen im Ganzen in 27 verschiedenen Weisen durch dreifach unendliche Reihen ausdrücken. Gesetzt etwa, man solle $f(x, y, z)$ als eine solche Reihe finden, deren allgemeines Glied ist

$$A_{n, n', n''} \cos \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi y}{c'} \sin \frac{n''\pi z}{c''},$$

wobei n, n', n'' von 1 bis ∞ gehen können, so dass eine dreifach unendliche Reihe entsteht, so wird man nach einander haben:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{c} \int_0^c f(u, y, z) \partial u + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{n\pi u}{c} \int_0^c f(u, y, z) \cos \frac{n\pi u}{c} \partial n, \quad 0 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} c,$$

$$f(u, y, z) = \frac{2}{c'} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sin \frac{n'\pi y}{c'} \int_0^{c'} f(u, v, z) \sin \frac{n'\pi v}{c'} \partial v, \quad 0 < y < c',$$

$$f(u, v, z) = \frac{2}{c''} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \sin \frac{n''\pi z}{c''} \int_0^{c''} f(u, v, w) \sin \frac{n''\pi w}{c''} \partial w, \quad 0 < z < c'',$$

woraus nun, indem man substituirt:

$$f(x, y, z) = \frac{4}{c c' c''} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \sin \frac{n'\pi y}{c'} \sin \frac{n''\pi z}{c''} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} \partial y \int_0^{c''} f(u, v, w) \sin \frac{n'\pi v}{c'} \sin \frac{n''\pi w}{c''} \partial w$$

$$+ \frac{8}{c c' c''} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \cos \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi y}{c'} \sin \frac{n''\pi z}{c''} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} \partial v \int_0^{c''} f(u, v, w) \sin \frac{n\pi u}{c}$$

$$\sin \frac{n'\pi v}{c'} \sin \frac{n''\pi w}{c''} \partial w,$$

$$0 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} c, \quad 0 < y < c', \quad 0 < z < c'' \quad (c, c', c'' \text{ positiv}).$$

Wie man eben so für Funktionen von vier oder mehr Veränderlichen verfahren kann, ist hiernach klar. So wäre also etwa

$$f(x, y, z, s) = \frac{16}{c' c' c'' c'''} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \sum_{n'''=1}^{n'''=\infty} \sin \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n'\pi y}{c'} \sin \frac{n''\pi z}{c''} \times$$

$$\sin \frac{n'''\pi s}{c'''} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} \partial v \int_0^{c''} \partial w \int_0^{c'''} f(u, v, w, t) \sin \frac{n\pi u}{c} \sin \frac{n'\pi v}{c'} \sin \frac{n''\pi w}{c''} \sin \frac{n'''\pi t}{c'''} \partial t,$$

$$0 < x < c, \quad 0 < y < c', \quad 0 < z < c'', \quad 0 < s < c''',$$

u. s. w.

§. 148.

Andere Form der Fourierschen Reihen.

I. Wir wollen in den Formeln (i) des §. 145 annehmen, es sey $\varphi(x)$ von $x=0$ bis $x=a$ gleich einer bestimmten Funktion $F(x)$, dagegen Null von $x=a$ bis $x=c$, wo $a>0$, $c>a$ sey: alsdann ist

$$\int_0^c \varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z+\int_a^c 0\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z,$$

und es ist also

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{c}\int_0^a F(z)\partial z+\frac{2}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\begin{cases}F(x), & \text{wenn } 0\overline{\overline{<}}x<a,\\ \frac{1}{2}F(a), & \text{wenn } x=a,\\ 0, & \text{wenn } a<x\overline{\overline{<}}c,\end{cases}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c>a>0.\\ \frac{2}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^a F(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\begin{cases}F(x), & 0<x<a,\\ \frac{1}{2}F(a), & x=a,\\ 0, & a<x<c,\end{cases}\end{array}\right\}\quad(n)$$

Setzen wir eben so in der Formel (l) des §. 145 voraus, $f(x)$ sey gleich $F(x)$ von $x=-a$ bis $x=+a$, Null von $x=-c$ bis $x=-a$, und von $x=+a$ bis $x=+c$, so erhält man:

$$\frac{1}{2c}\int_{-a}^{+a} F(z)\partial z+\frac{1}{c}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z=\left.\begin{cases}F(x), & -a<x<+a,\\ \frac{1}{2}F(x), & x=\pm a, \qquad c>a>0.\\ 0, & -c<x<-a,\ +a<x<+c,\end{cases}\right\}(n')$$

Wäre $F(x)$ zwischen 0 und a, oder $-a$ und $+a$, doppelwerthig, so gälte die seitherige Bemerkung; an den Gränzen a (oder $\pm a$) muss jedoch $F(x)$ nur einwerthig seyn. Wir setzen jedoch, der Kürze wegen, $F(x)$ überhaupt nur einwerthig voraus.

II. Es lassen sich diese Sätze in mancherlei Weise verbinden, wie wir an einigen Beispielen näher betrachten wollen.

Setzt man in (n′) $c=2a$, so hat man

$$\frac{1}{4a}\int_{-a}^{+a} F(z)\partial z+\frac{1}{2a}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{2a}\partial z=F(x),\quad -a<x<+a.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit 2 und subtrahirt man davon die dritte (m), in der $f(x)=F(x)$, $c=a$ gesetzt worden, so erhält man

$$\frac{1}{a}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{2a}\partial z-\frac{1}{a}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-x)}{2a}\partial z=F(x),\ -a<x<+a.$$

Da die zweite Reihe nur gerade Vielfache von $\frac{\pi(z-x)}{2a}$ enthält, so fallen auf der ersten Seite dieselben sämmtlich aus, und es bleiben also nur ungerade Vielfache von $\frac{\pi(z-x)}{2a}$ übrig; so dass

$$\frac{1}{a}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{(2\mu-1)\pi(z-x)}{2a}\partial z=F(x),\quad -a<x<+a.$$

Setzt man $-x$ für x, so hat man

$$\frac{1}{a}\sum_1^\infty \int_{-a}^{+a} F(z) \cos\frac{(2\mu-1)\pi(z+x)}{2a}\,\partial z = F(-x), \quad -a < x < +a.$$

Die Addition liefert:

$$F(x)+F(-x) = \frac{2}{a}\sum_1^\infty \cos\frac{(2\mu-1)\pi x}{2a}\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{(2\mu-1)\pi z}{2a}\,\partial z.$$

Aus der dritten (m) zieht man in derselben Weise:

$$F(x)-F(-x) = \frac{2}{a}\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{a}\int_{-a}^{+a} F(z)\sin\frac{\mu\pi z}{a}\,\partial z,$$

aus welchen Gleichungen sich durch Addition sofort ergibt:

$$F(x) = \frac{1}{a}\sum_1^\infty \cos\frac{(2\mu-1)\pi x}{2a}\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{(2\mu-1)\pi z}{2a}\,\partial z$$
$$+\frac{1}{a}\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{a}\int_{-a}^{+a} F(z)\sin\frac{\mu\pi z}{a}\,\partial z, \quad -a < x < +a.$$

Eben so:

$$F(x)-F(-x) = \frac{2}{a}\sum_1^\infty \sin\frac{(2\mu-1)\pi x}{2a}\int_{-a}^{+a} F(z)\sin\frac{(2\mu-1)\pi z}{2a}\,\partial z,$$

$$F(x)+F(-x) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} F(z)\,\partial z + \frac{2}{a}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{a}\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{a}\,\partial z,$$

woraus

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} F(z)\,\partial z + \frac{1}{a}\sum_1^\infty \sin\frac{(2\mu-1)\pi x}{2a}\int_{-a}^{+a} F(z)\sin\frac{(2\mu-1)\pi z}{2a}\,\partial z$$
$$+\frac{1}{a}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{a}\int_{-a}^{+a} F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{a}\,\partial z, \quad -a < x < +a.$$

III. Es ist

$$f(x,y) = \frac{1}{4ab}\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\,\partial v + \frac{1}{2ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n'(v-y)}{b}\,\partial v$$
$$+\frac{1}{2ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n\pi(u-x)}{a}\,\partial v$$
$$+\frac{1}{ab}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n\pi(u-x)}{a}\times$$
$$\cos\frac{n'\pi(v-y)}{b}\,\partial v, \quad \begin{cases} -a < x < +a, \\ -b < y < +b. \end{cases}$$

Man setze hier $2a$ statt a, nehme weiter an $f(x,y)$ sey Null, wenn x ausserhalb $\pm a$ liegt, was auch y sey, so ist

$$f(x,y) = \frac{1}{8ab}\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\,\partial v + \frac{1}{4ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n'(v-y)}{b}\,\partial v$$
$$+\frac{1}{4ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n\pi(u-x)}{2a}\,\partial v$$
$$+\frac{1}{2ab}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b} f(u,v)\cos\frac{n\pi(u-x)}{2a}\times$$
$$\cos\frac{n'\pi(v-y)}{b}\,\partial v.$$

Die Verbindung beider Gleichungen führt zu:

$$f(x,y)=\frac{1}{2ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b}f(u,v)\cos\frac{(2n-1)\pi(u-x)}{2a}\partial v$$

$$+\frac{1}{ab}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b}f(u,v)\cos\frac{(2n-1)\pi(u-x)}{2a}\cos\frac{n'\pi(v-y)}{b}\partial v,$$

$$-a<x<+a,\quad -b<y<+b.$$

Setzt man hier nun überdiess 2 b statt b, nimmt dabei aber an, dass $f(x,y)$ Null sey, wenn y ausserhalb $\pm b$ liegt, was immer x seyn möge, so ergibt sich

$$f(x,y)=\frac{1}{4ab}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b}f(u,v)\cos\frac{(2n-1)\pi(u-x)}{2a}\partial v$$

$$+\frac{1}{2ab}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b}f(u,v)\cos\frac{(2n-1)\pi(u-x)}{2a}\cos\frac{n'\pi(v-y)}{2b}\partial v.$$

Die Verbindung der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$f(x,y)=\frac{1}{ab}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\partial u\int_{-b}^{+b}f(u,v)\cos\frac{(2n-1)\pi(u-x)}{2a}\times$$

$$\cos\frac{(2n'-1)(v-y)}{2b}\partial v,\quad -a<x<+a,\quad -b<y<+b.$$

§. 149.

Die Fourierschen Integrale.

I. Die Sätze (n) und (n′) bestehen für jedes c, also auch noch wenn c unbegränzt wächst. Setzt man nun $\frac{\pi}{c}=\varepsilon$, so wird ε mit unbegränzt wachsendem c unbegränzt abnehmen, und da hiernach $c=\frac{\pi}{\varepsilon}$. so ist wenn *Gr* sich auf ein unendliches Abnehmen von ε bezieht:

$$Gr\left[\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^a F(z)\partial z+\frac{2\varepsilon}{\pi}\sum_1^\infty\cos\mu\varepsilon x\int_0^a F(z)\cos\mu\varepsilon z\,\partial z\right]=F(x),\quad 0\overline{\gtrless}x<a \text{ u. s. w.}$$

Aber es ist die erste Seite gleich

$$Gr\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{2}+\cos\varepsilon x\cos\varepsilon z+\cos2\varepsilon x\cos2\varepsilon z+\ldots\ldots\right]F(z)\partial z$$

$$=Gr\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^a[1+\cos\varepsilon x\cos\varepsilon z+\cos2\varepsilon x\cos2\varepsilon z+\ldots\ldots]F(z)\partial z,$$

indem $Gr\,\frac{\varepsilon}{\pi}=0$, man also immer $\frac{\varepsilon}{\pi}$ in den Klammern zufügen kann. Diese Grösse ist aber (§. 39):

$$\frac{2}{\pi}\int_a^a\partial z\int_0^\infty\cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial u,$$

so dass man aus den Gleichungen (n) und (n′) zieht

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \cos(ux)\cos(uz)\,F(z)\,\partial z = \begin{cases} F(x), & 0 \overline{\overline{<}} x < a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \sin(ux)\sin(uz)\,F(z)\,\partial z = \begin{cases} F(x), & 0 < x < a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases} \quad \text{(p)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-a}^{+a} \cos u(z-x)\,F(z)\,\partial z = \begin{cases} F(x), & -a < x < +a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = \pm a, \\ 0, & -\infty < x < -a,\ +a < x < +\infty. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist a ganz beliebig. Lässt man nun a unbegränzt wachsen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int\!\!\int_0^{+\infty} \cos(ux)\cos(uz)\,F(z)\,\partial u\,\partial z = F(x),\ 0 \overline{\overline{<}} x < \infty; \\ &\frac{2}{\pi}\int\!\!\int_0^{+\infty} \sin(ux)\sin(uz)\,F(z)\,\partial u\,\partial z = F(x),\ 0 < x < \infty; \\ &\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(z-x)\,F(z)\,\partial z = F(x),\ -\infty < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \quad \text{(q)}$$

von welchen Formeln die letzte auch gibt (§. 42, VII):

$$\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(z-x)\,F(z)\,\partial u\,\partial z = F(x),\ -\infty < x < +\infty. \quad \text{(r)}$$

II. Es versteht sich ganz von selbst, dass in all' diesen Formeln F (z) innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn muss. Wir wollen diese Ergebnisse nun auf einige Beispiele anwenden.

1) Sey in der Formel (q) $F(z) = e^{-z}$, so ist (§. 43, III): $\int_0^\infty e^{-z}\cos(uz)\,\partial z = \frac{1}{1+u^2}$, $\int_0^\infty e^{-z}\sin(uz)\,\partial z = \frac{u}{1+u^2}$, so dass

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0 \overline{\overline{<}} x < \infty;\quad \int_0^\infty \frac{u\sin(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0 < x < \infty,$$

welche Formeln schon in §. 87, II gefunden wurden.

2) Setzt man $F(z) = \int_a^b f(v)\,e^{-zv}\,\partial v$, so erhält man aus denselben Formeln (q):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_a^b \cos(ux)\cos(uz)\,f(v)\,e^{-zv}\,\partial v = \int_a^b f(v)\,e^{-xv}\,\partial v,\ 0 \overline{\overline{<}} x < \infty,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_a^b \sin(ux)\sin(uz)\,f(v)\,e^{-zv}\,\partial v = \int_a^b f(v)\,e^{-xv}\,\partial v,\ 0 < x < \infty.$$

Nun ist aber (§. 43, III):

$$\int_0^\infty e^{-zv}\cos(uz)\,\partial z = \frac{v}{u^2+v^2},\quad \int_0^\infty e^{-zv}\sin(uz)\,\partial z = \frac{u}{u^2+v^2},$$

so dass also

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v\cos(ux)}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v = \int_a^b f(v)\,e^{-xv}\,\partial v,\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{u\sin(ux)}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v = \int_a^b f(v)\,e^{-xv}\,\partial v.\end{array}\right\}\quad(\alpha)$$

Beide Formeln verlangen, dass $x>0$ sey; die erste gilt noch für $x=0$, d. h. man hat:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v = \int_a^b f(v)\,\partial v. \qquad (\alpha')$$

Setzt man in der Formel (α') etwa $f(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, nimmt $a=0$, $b=1$, so ist wegen $\int_0^1 \frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\infty \partial u \int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Aber

$$\int \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+u^2}+\sqrt{1-v^2}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right),$$

so dass endlich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right)\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Setzt man in diesem Integrale $u=tg\,x$, also $\sqrt{1+u^2}=\frac{1}{\cos x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, so sind die Gränzen von $x: 0$ und $\frac{\pi}{2}$, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\frac{\partial x}{\cos x}=\frac{\pi^2}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(cotg\frac{x}{2}\right)\frac{\partial x}{\cos x}=\frac{\pi^2}{4}.$$

3) Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x=\frac{a}{a^2+b^2},\quad b>0,\ a>0,$$

in §. 43 folgt nach §. 85, wenn $z>0$:

$$\int_0^z \partial b\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = a\int_0^z \frac{\partial b}{a^2+b^2}.$$

Da aber $\int_0^z \cos(bx)\,\partial b=\frac{1}{x}\sin(xz)$, $\int_0^z\frac{\partial b}{a^2+b^2}=\frac{1}{a}\,arc\left(tg=\frac{z}{a}\right)$, so ist also

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin(xz)}{x}\,\partial x = arc\left(tg=\frac{z}{a}\right),\quad z>0,\ a\overline{\gtrless}0,$$

wie schon aus der Formel (c) in §. 85 folgt, wenn man dort $\beta=\infty$, $\alpha=a$, $b=z$ setzt und beachtet, dass dann die zweite Seite $=$

$$arc(tg=\infty)-arc\left(tg=\frac{a}{z}\right)=\frac{\pi}{2}-arc\left(tg=\frac{a}{z}\right)=arc\left(tg=\frac{z}{a}\right)$$

ist [§. 32, IV, (h)].

Angenommen nun, man setze in (q) $F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zv} \sin(av)}{v} \partial v = arc\left(tg = \frac{a}{z}\right)$, so ist

$$\frac{2}{\pi} \int\int\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zv} \cos(ux) \cos(uz) \sin(av)}{v} \partial u \, \partial z \, \partial v = arc\left(tg = \frac{a}{x}\right), \; 0 \overline{\overline{<}} x < \infty,$$

$$\frac{2}{\pi} \int\int\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zv} \sin(ux) \sin(uz) \sin(av)}{v} \partial u \, \partial z \, \partial v = arc\left(tg = \frac{a}{x}\right), \; 0 < x < \infty.$$

Aber es ist

$$\int_0^\infty e^{-zv} \cos(uz) \partial z = \frac{v}{v^2 + u^2}, \quad \int_0^\infty e^{-zv} \sin(uz) \partial z = \frac{u}{v^2 + u^2},$$

so dass:

$$\left.\begin{aligned} &\int\int_0^\infty \frac{\cos(ux) \sin(av)}{v^2 + u^2} \partial u \, \partial v = \frac{\pi}{2} arc\left(tg = \frac{a}{x}\right), \; 0 \overline{\overline{<}} x < \infty, \\ &\int\int_0^\infty \frac{\sin(ux) \sin(av)}{v^2 + u^2} \frac{u}{v} \partial u \, \partial v = \frac{\pi}{2} arc\left(tg = \frac{a}{x}\right), \; 0 < x < \infty, \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

4) Will man diejenige Funktion f(u) suchen, für welche von $x = 0$ bis $x = \infty$:

$$\int_0^\infty \cos(ux) f(u) \partial u = F(x),$$

so ist dieselbe, gemäss (q):

$$f(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(uz) F(z) \partial z.$$

Eben so, wenn von $x > 0$ bis $x < \infty$:

$$\int_0^\infty \sin(ux) f(u) \partial u = F(x) : f(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(uz) F(z) \partial z.$$

III. Es lassen sich die in I aufgestellten Formeln leicht zur Herstellung einer Reihe anderer verwenden, von denen wir nur die folgenden betrachten wollen.

Sey $b > a > 0$, so ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \partial u \int_a^b \cos(ux) \cos(uz) F(z) \partial z =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \partial u \int_0^b \cos(ux) \cos(uz) F(z) \partial z - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \partial u \int_0^a \cos(ux) \cos(uz) F(z) \partial z.$$

Aus der ersten (p) folgt nunmehr, dass das eben gegebene Integral 0 ist für $x < a$ und $> b$; $\frac{1}{2} F(x)$ für $x = a$ und $x = b$; $F(x)$ für $x > a$ und $< b$.

Eben so findet sich, dass

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \partial u \int_a^b \sin(ux) \sin(uz) F(z) \partial z$$

in derselben Lage ist. Es ist überdiess:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\partial u\int_a^b \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial z=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\partial u\int_a^b \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial z,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\partial u\int_a^b \sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial z=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\partial u\int_a^b \sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial z,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial u\int_a^b \sin(ux)\cos(uz)F(z)\partial z=0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial u\int_a^b \cos(ux)\sin(uz)F(z)\partial z=0,$$

woraus leicht folgt, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{uxi}\partial u\int_a^b F(z)e^{-uzi}\partial z=F(x), \qquad (p')$$

wenn x zwischen a und b liegt; für $x=a$ oder b ist das Integral nur $\frac{1}{2}F(x)$; unter $x=a$, oder über $x=b$ aber Null.

§. 150.

Erweiterung für Funktionen mehrerer Veränderlichen. Anwendung.

I. Aus der Formel (r) folgt:

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int F(u,y)\cos\alpha(u-x)\,\partial\alpha\,\partial u,$$

$$F(u,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int F(u,v)\cos\beta(v-y)\,\partial\beta\,\partial v,$$

also

$$F(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\overline{\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)\cos\alpha(u-x)\cos\beta(v-y)\,\partial u\,\partial v\,\partial\alpha\,\partial\beta. \qquad (r')$$

Eben so wenn n die Anzahl der Veränderlichen:

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int\int\ldots\int}_{-\infty}^{+\infty}F(u_1,u_2,\ldots,u_n)\cos\alpha_1(u_1-x)\cos\alpha_2(u_2-y)\ldots\ldots$$
$$\partial u_1\,\partial u_2\ldots\partial u_n\,\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n. \qquad (r'')$$

Da (§. 42)

$$\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha(u-x)\,\partial u\,\partial\alpha=0,$$

so ist

$$\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha(u-x)i}F(u)\,\partial u\,\partial\alpha=\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha(u-x)F(u)\,\partial u\,\partial\alpha,$$

so dass auch

$$\frac{1}{2\pi}\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}e^{(u-x)\alpha i}F(u)\,\partial\alpha\,\partial u=F(x), \qquad (s)$$

woraus

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\int\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]i} F(u_1,u_2,\ldots,u_n)\,\partial\alpha_1\ldots\ldots\partial\alpha_n\,\partial u_1\ldots\partial u_n. \quad (s')$$

Diese Formel kommt auf

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\int\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} cos[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]F(u_1,\ldots,u_n)\,\partial\alpha_1\ldots\partial u_n \quad (s'')$$

zurück, die jedoch mit (r″) übereinstimmt, wenn man $cos[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]$ entwickelt und beachtet, dass alle Glieder die einen Sinus enthalten von selbst wegfallen. Dass in allen diesen Formeln die Grösse unter den Integralzeichen innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn muss, versteht sich von selbst. Diese Formeln zeigen, in welcher Weise Funktionen durch bestimmte Integrale auszudrücken sind, und sind in den Anwendungen auf mathematische Physik von ausgedehnter Anwendung, wie wir diess an einem Beispiele erläutern wollen.

II. In §. 75, VII haben wir für die Bewegung der Wärme in einem dünnen Stabe oder Ringe die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{w\gamma}{c\omega\varrho}v$$

gefunden, wobei die äussere Temperatur $=0$ gesetzt ist. Setzt man zur Abkürzung $\frac{k}{c\varrho}=a$, $\frac{w\gamma}{c\omega\varrho}=b$, so ist sie: $\frac{\partial v}{\partial t}=a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-bv$, und wenn dann $v=e^{-bt}u$ gesetzt wird, so ist $\frac{\partial v}{\partial t}=-be^{-bt}u+e^{-bt}\frac{\partial u}{\partial t}$, also:

$$-be^{-bt}u+e^{-bt}\frac{\partial u}{\partial t}=ae^{-bt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-be^{-bt}u, \text{ d. h. } \frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt nun u, d. h. v; somit muss u so beschaffen seyn, dass sein Werth dieser Gleichung genügt, und überdiess muss für $t=0$ dann durch u (d. h. v) der anfängliche, als gegeben anzusehende Zustand des Stabes dargestellt seyn. Wir wollen, um die Betrachtung zu erleichtern, annehmen es handle sich um einen geschlossenen zylindrischen Ring, der dünn genug sey, damit dieselben Gleichungen für ihn gelten wie für einen Stab. Derselbe ist anfänglich willkürlich erwärmt worden, und wurde dann sich selbst überlassen, indem er in einen Raum von der Temperatur 0^0 gebracht wurde. Sey x der Abstand eines Punktes des Ringes (seiner Mittellinie) von einem beliebig gewählten Anfangspunkte, f(x) die Temperatur zu Anfang der Zeit in diesem Punkte, λ die Länge des Ringes, v die Temperatur zur Zeit t in dem Punkte x. Man erhält aus der Differentialgleichung, wenn man $u=e^{mx+nt}$ setzt: $n=am^2$, so dass ihr also $u=e^{mx+am^2t}$ genügen wird. Natürlich genügt ihr eben so $u=Ae^{mx+am^2t}$, wenn A eine beliebige Konstante ist. Eben so wird ihr eine Summe ähnlicher Grössen genügen, so dass allgemein

$$u=A_1e^{m_1x+am_1^2t}+A_2e^{m_2x+am_2^2t}+\ldots,$$

seyn kann. Da $v=ue^{-bt}$, so kennt man v aus u. Wären die Grössen $m_1^2, m_2^2, \ldots$,

positiv, so würde mit sehr grossem t die Grösse u sicher bedeutend gross werden; ferner muss für $x=0$ und $x=\lambda$ nothwendig, was auch t sey, derselbe Werth von u herauskommen, da ja auch derselbe Werth von v dann gilt. Diess ist aber nicht der Fall, wenn $m_1, m_2, \dots$ reell, sondern nur, wenn sie imaginär sind. Man setze also $m_1 i, m_2 i, \dots$ für $m_1, m_2, \dots$, so ist

$$u = A_1 e^{-a m_1^2 t}[\cos m_1 x + i \sin m_1 x] + A_2 e^{-a m_2^2 t}[\cos m_2 x + i \sin m_2 x] + \dots,$$

oder da $e^{-a m_1^2 t}\cos m_1 x$, $e^{-a m_1^2 t}\sin m_1 x$ für sich der Differentialgleichung genügen:

$$u = A + A_1 e^{-a m_1^2 t}\cos m_1 x + A_2 e^{-a m_2^2 t}\cos m_2 x + \dots$$
$$+ B_1 e^{-a m_1^2 t}\sin m_1 x + B_2 e^{-a m_2^2 t}\sin m_2 x + \dots .$$

Nun muss aber für $x=0$ und $x=\lambda$ derselbe Werth von u herauskommen; demnach müssen $m_1, m_2, \dots$ Vielfache von $\frac{2\pi}{\lambda}$ seyn, so dass etwa $m_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$, $m_2 = \frac{4\pi}{\lambda}$, $m_3 = \frac{6\pi}{\lambda}, \dots$. Ferner muss für $t=0: v=f(x)$, d. h. da für $t=0$ auch $v=u$: $u=f(x)$ seyn, so dass also

$$f(x) = A + A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \dots + B_1 \sin m_1 x + B_2 \sin m_2 x + \dots$$

seyn wird. Vergleicht man diess mit den Formeln (m) in §. 145, d. h. mit

$$f(x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(z)\,\partial z + \frac{1}{c}\sum_1^\infty \int_{-c}^{+c} f(z)\left[\cos\frac{\mu\pi z}{c}\cos\frac{\mu\pi x}{c} + \sin\frac{\mu\pi z}{c}\sin\frac{\mu\pi x}{c}\right]\partial z,$$

so ist $c = \frac{1}{2}\lambda$, und dann

$$A = \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda} f(z)\,\partial z,\quad A_1 = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda} f(z)\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\,\partial z, \dots,\quad A_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda} f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\,\partial z, \dots\dots,$$

$$B_1 = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\lambda} f(z)\sin\frac{2\pi z}{\lambda}\,\partial z, \dots,\quad B_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda} f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\,\partial z, \dots .$$

Nun muss aber $f(x)$ von $x=0$ bis $-\frac{1}{2}\lambda$ dieselben Werthe haben, wie von $x=\lambda$ bis $x=\frac{1}{2}\lambda$, so dass, wie man leicht sieht:

$$A = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\,\partial z,\quad A_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\,\partial z,\quad B_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\,\partial z.$$

Demnach ist endlich

$$\lambda v = e^{-bt}\left[\int_0^\lambda f(z)\,\partial z + 2e^{-a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 t}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2\pi(z-x)}{\lambda}\,\partial z\right.$$
$$\left. + 2e^{-a\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 t}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{4\pi(z-x)}{\lambda}\,\partial z + \dots\right].$$

Ist der Ring ein Kreis vom Halbmesser r, so ist $\lambda = 2r\pi$. Diese Gleichung drückt nun den Zustand der Temperatur im Ringe zu der Zeit t aus. Sie genügt der Differentialgleichung und stellt auch für $t=0$ den anfänglichen Zustand dar. Sey etwa $f(x) = \tau\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$, wo τ die Temperatur im Punkte $x=0$ zu Anfang der

Zeit vorstellt, so ist $\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z=0$, wenn $n>1$, aber $=\frac{1}{2}\tau\lambda$, wenn $n=1$; $\int_0^\lambda f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z=0$, so dass jetzt wegen $\int_0^\lambda f(z)\partial z=0$:

$$\lambda v=\tau\lambda e^{-bt} e^{-a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 t}\cos\frac{2\pi x}{\lambda},\ \text{d. h. } v=\tau e^{-\left[b+\frac{4a\pi^2}{\lambda^2}\right]t}\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

welche einfache Gleichung zu jeder Zeit den Zustand der Wärme im Ringe ausdrückt.

Zwanzigster Abschnitt.

Die elliptischen Integrale.

§. 151.

Eintheilung.

I. Wir haben in §. 32 gesehen, dass Integrale in denen $\sqrt{a+bx+cx^2}$ vorkommt bestimmt werden können; kömmt aber $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ vor, so kann in der dortigen Weise eine Bestimmung nicht durchgeführt werden. Wir werden nun aber sehen, dass alle solche Integrale auf eines der drei folgenden zurückgeführt werden können:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad \int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x,\quad \int\frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} \qquad \text{(a)}$$

welche drei wir nun zunächst weiter untersuchen wollen. Dabei setzen wir $e^2 \lesseqgtr 1$ voraus, und werden nicht nöthig haben, x über $\frac{\pi}{2}$ hinausgehen zu lassen. Ferner werden wir setzen

$$\int_0^\varphi\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=F(\varphi,e),\ \int_0^\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x=E(\varphi,e),\ \int_0^\varphi\frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=\Pi(\varphi,a,e),$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\int_0^\varphi\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}}=F(\varphi,e),\ \int_0^\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}\,\partial \varphi=E(\varphi,e),\ \int_0^\varphi\frac{\partial \varphi}{(1+a\sin^2 \varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}}=\Pi(\varphi,a,e), \qquad \text{(b')}$$

so dass (§. 85)

$$\frac{\partial F(\varphi,e)}{\partial\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\quad \frac{\partial E(\varphi,e)}{\partial\varphi}=\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\partial \Pi(\varphi,a,e)}{\partial\varphi}=\frac{1}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad \text{(c)}$$

Die allgemeinen Grössen in (a) sind nun offenbar

$$F(x,e)+C,\ E(x,e)+C,\ \Pi(x,a,e)+C,$$

wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet.

II. Wird in (b) e = 0 gesetzt, so hat man

$$F(\varphi,0)=\int_0^\varphi \partial x=\varphi,\ E(\varphi,0)=\int_0^\varphi \partial x=\varphi,\ \Pi(\varphi,a,0)=\int_0^\varphi \frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}, \quad (d)$$

wo das letzte Integral sich nach §. 36 bestimmen lässt, indem man $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ setzt. Dadurch wird

$$\int\frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}=2\int\frac{\partial x}{2+a-a\cos 2x}=\int\frac{\partial z}{2+a-a\cos z}\ (z=2x).$$

Wie wir sogleich (§. 152) sehen werden, genügt es a zwischen 0 und — 1 anzunehmen, so dass also

$$\int\frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}=\int\frac{\partial z}{2+a-a\cos z}=\frac{2}{\sqrt{(2+a)^2-a^2}}\,arc\left(tg=\sqrt{\frac{2+2a}{2}}\,tg\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a}}\,arc\left(tg=\sqrt{1+a}\,tg\,x\right),$$

und

$$\int_0^\varphi\frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{1+a}}\,arc\,(tg=\sqrt{1+a}\,tg\,\varphi). \quad (d')$$

Für e = 1 hat man

$$F(\varphi,1)=\int_0^\varphi\frac{\partial x}{\cos x}=l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\right),\ E(\varphi,1)=\int_0^\varphi \cos x\,\partial x=\sin\varphi,$$

$$\Pi(\varphi,a,1)=\int_0^\varphi\frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\cos x},$$

von denen das letzte durch Umformung leicht integrirt werden kann. *

Die drei Integrale in (b) nennen wir **elliptische** und zwar $F(\varphi,e)$ das der ersten Art, $E(\varphi,e)$ der zweiten, $\Pi(\varphi,a,e)$ der dritten.

---

* Man setzt $\sin x = z$ und findet

$$\int\frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\cos x}=\int\frac{\partial z}{(1-z^2)(1+az^2)}=\int\frac{\partial z}{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)}\ (a=-\alpha^2),$$

diess ist aber (§. 29) gleich

$$\frac{1}{2(1-\alpha^2)}[l(1+z)-l(1-z)-\alpha\,l(1+\alpha z)+\alpha\,l(1-\alpha z)]=\frac{1}{2(1+a)}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{2(1+a)}\,l\left(\frac{1-\alpha z}{1+\alpha z}\right)=\frac{1}{2(1+a)}\,l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+\frac{\alpha}{2(1+a)}\,l\left(\frac{1-\alpha\sin x}{1+\alpha\sin x}\right),$$

wo $\alpha=\sqrt{-a}$.

§. 152.

Reduktion des Integrals der dritten Art.

I. Das Integral $\Pi(\varphi, a, e)$, in welchem e zwischen 0 und 1, φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, a aber beliebig (natürlich reell) ist, kann immer auf eines derselben Art zurückgeführt werden, in welchem a zwischen 0 und -1 liegt, wie wir nun zeigen wollen. Wir müssen zu dem Ende folgende Voraussetzungen untersuchen:

1) a zwischen $-\infty$ und -1.

Man setze

$$a = -\frac{1-e^2 \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \sin^2\alpha = \frac{a+1}{a+e^2}, \quad \alpha \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2},$$

so wird wirklich, wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, a von -1 bis $-\infty$ gehen.*

Man hat aber für jedes a:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{1}{a}\left[\int_0^\varphi \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \int_0^\varphi \frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\right] \\
&\qquad = \frac{F(\varphi,e)-\Pi(\varphi,a,e)}{a}, \\
&\int_0^\varphi \frac{\cos^2 x\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \int_0^\varphi \frac{(1-\sin^2 x)\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{1+a}{a}\Pi(\varphi,a,e) \\
&\qquad - \frac{1}{a}F(\varphi,e), \\
&\int_0^\varphi \frac{(1-e^2\sin^2 x)\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{a+e^2}{a}\Pi(\varphi,a,e) - \frac{e^2}{a}F(\varphi,e).
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Ferner ist identisch

$$\frac{(1-e^2)\sin^2 x}{\cos^2\alpha-(1-e^2\sin^2\alpha)\sin^2 x} + \frac{1-e^2\sin^2 x}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2\alpha[1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x]}{\cos^2\alpha - \sin^2 x + e^2\sin^4\alpha\sin^2 x + e^2\sin^2\alpha\sin^4 x(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

---

* Die Grösse $\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ durchläuft, wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, alle Werthe von 1 bis ∞. Für $\alpha=0$ ist sie wirklich $=1$, für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ aber ∞. Sie durchläuft diese Reihe von Werthen auch so, dass kein Werth zweimal erscheint, da sie sonst Maxima oder Minima zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=\frac{\pi}{2}$ haben müsste. Dazu gehört aber dass $-2e^2\sin\alpha\cos^3\alpha + 2(1-e^2\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha = 0$, d. h. $\sin\alpha\cos\alpha[-2e^2\cos^2\alpha+2-2e^2\sin^2\alpha]=0$, $2\sin\alpha\cos\alpha(1-e^2)=0$, was zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ unmöglich ist.

$$= \frac{\cos^2\alpha\,[1 - e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x]}{\cos^2\alpha\cos^2 x + \cos^2\alpha\sin^2 x - \sin^2 x + e^2\sin^4\alpha\sin^2 x + e^2\sin^2\alpha\sin^4 x\,(1 - e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha\,(1 - e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x)}{\cos^2\alpha\cos^2 x - \sin^2\alpha\sin^2 x\,(1 - e^2\sin^2\alpha)\,(1 - e^2\sin^2 x)},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{1-e^2}{\cos^2\alpha}\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{\left[1 - \frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2 x\right]\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \int_0^\varphi \frac{(1 - e^2\sin^2 x)\,\partial x}{(1 - e^2\sin^2\alpha\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

$$= \int_0^\varphi \frac{1 - e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x - tg^2\alpha\sin^2 x\,(1 - e^2\sin^2\alpha)\,(1 - e^2\sin^2 x)}\,\frac{\partial x}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 x}}.$$

Die zwei ersten Integrale werden nach den Formeln (f) bestimmt; was das letzte anbelangt, so ist das unbestimmte Integral gleich

$$\int \frac{1 - e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\;\frac{\partial x}{1 - tg^2\alpha\, tg^2 x\,(1 - e^2\sin^2 x)\,(1 - e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \int\left(\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{\cos^2 x} - \frac{e^2\sin^2 x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\right)\frac{\partial x}{1 - tg^2\alpha\, tg^2 x\,(1 - e^2\sin x)\,(1 - e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \int \frac{\partial\left(tg\, x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\right)}{\partial x}\;\frac{\partial x}{1 - tg^2\alpha\, tg^2 x\,(1 - e^2\sin^2 x)\,(1 - e^2\sin^2\alpha)}.$$

Man setze also

$$tg\,\alpha\, tg\, x\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)} = u,\quad \frac{\partial\left(tg\, x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\right)}{\partial u} = \frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

so ist dasselbe gleich (§. 28)

$$\int \frac{\frac{\partial\left(tg\, x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\right)}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial u}{1-u^2} = \int \frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\,\frac{\partial u}{1-u^2}$$

$$= \frac{cotg\,\alpha}{2\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\, l\left(\frac{1+u}{1-u}\right),$$

mithin

$$\int_0^\varphi \frac{1 - e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x - tg^2\alpha\sin^2 x\,(1 - e^2\sin^2\alpha)\,(1 - e^2\sin^2 x)}\;\frac{\partial x}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 x}}$$

$$= \frac{cotg\,\alpha}{2\sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}}\, l\left(\frac{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi\sqrt{(1 - e^2\sin^2\alpha)\,(1 - e^2\sin^2\varphi)}}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\varphi\sqrt{(1 - e^2\sin^2\alpha)\,(1 - e^2\sin^2\varphi)}}\right).\,*$$

---

* Hierin kann jedoch φ nicht bis $\frac{\pi}{2}$ gehen, da zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Grösse unter dem Integralzeichen ∞ wird. Allein in diesem Falle kann auch von $\Pi\left[\frac{\pi}{2}, -\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, e\right]$ keine Rede seyn, da in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{\left[1 - \frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2 x\right]\sqrt{1 - e^2\sin^2 x}}$ die Grösse unter dem

Setzt man nun noch die Werthe aus (f) in die obige Gleichung ein, so ergibt sich leicht:

$$\Pi\left(\varphi, -\frac{1-e^2 \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, e\right) = \frac{1-e^2\sin^2\alpha}{1-e^2} \cotg^2\alpha\, \Pi(\varphi, -e^2\sin^2\alpha, e) - \frac{\cotg^2\alpha}{1-e^2} F(\varphi, e)$$

$$+ \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}{2(1-e^2)} \cotg\alpha\, l\left(\frac{1+tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}{1-tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}\right), \qquad (g)$$

vermittelst welcher Formel die Integrale $\Pi(\varphi, a, e)$, für welche a zwischen $-\infty$ und -1 liegt, auf solche zurückgeführt werden, für die a zwischen -1 und 0 liegt, da $e^2\sin^2\alpha$ zwischen 0 und 1 (genauer 0 und e^2).

2) a zwischen 0 und ∞.

Man setze

$$a = e^2 tg^2\alpha,\quad tg^2\alpha = \frac{a}{e^2},$$

so wird α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gehen, wenn a von 0 bis ∞ geht. Man hat aber jetzt:

$$\frac{(1-e^2)\cos^2\alpha\sin^2 x}{1-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)\sin^2 x} + \frac{1-e^2\sin^2 x}{1+e^2 tg^2\alpha\sin^2 x}$$

$$= \frac{1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{1-\cos^2\alpha\sin^2 x+\sin^2\alpha\sin^2 x\left[-e^2+\frac{e^2}{\cos^2\alpha}-e^2\sin^2 x - e^4 tg^2\alpha\sin^2 x\right]}$$

$$= \frac{1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2\alpha\sin^2 x\left[1+e^2 tg^2\alpha - e^2\sin^2 x - e^4 tg^2\alpha\sin^2 x\right]}$$

$$= \frac{1-e^2\sin x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2\alpha\sin^2 x\,(1+e^2 tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)},$$

woraus, wenn man mit $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}$ beiderseitig dividirt und beachtet dass

$$\int \frac{1-e^2\sin^2 x - e^2\sin x\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2\alpha\sin^2 x\,(1+e^2 tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)} \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+e^2 tg^2\alpha}} arc\left[tg = \sin\alpha\, tg\, x\sqrt{(1+e^2 tg\alpha)(1-e^2\sin^2 x)}\right],$$

durch Integration zwischen den Gränzen 0 und φ folgt:

$$(1-e^2)\cos^2\alpha\left[\frac{F(\varphi,e)-\Pi[\varphi,-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha),e]}{-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)}\right] + \frac{e^2 tg^2\alpha+e^2}{e^2 tg^2\alpha}\Pi(\varphi, e^2 tg^2\alpha, e)$$

$$-\cotg^2\alpha\, F(\varphi, e) = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+e^2 tg^2\alpha}} arc\left[tg = \sin\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1+e^2 tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}\right],$$

und hieraus:

Integralzeichen für x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ ebenfalls unendlich wird, indem $1-e^2\sin^2\alpha > 1-\sin^2\alpha$ d. h. $> \cos^2\alpha$, also $\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} > 1$ ist. Für $\sin^2\varphi = \frac{\cos^2\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha}$ wird also das hier betrachtete Integral ebenfalls unstetig.

$$\Pi(\varphi, e^2 tg^2 \alpha, e) = -\frac{(1-e^2)\sin^2\alpha}{1+e^2 tg^2\alpha}\Pi[\varphi, -(\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha), e] + \frac{F(\varphi, e)}{1+e^2 tg^2\alpha}$$
$$+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+e^2 tg^2\alpha}} arc\left[tg = \sin\alpha\, tg\,\varphi\sqrt{(1+e^2 tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}\right], \quad \text{(h)}$$

vermittelst welcher Formel man die Grössen $\Pi(\varphi, a, e)$, für welche a zwischen 0 und ∞ liegt, ausdrücken kann durch solche, für die a zwischen 0 und — 1 liegt (genauer — 1 und — e^2).

Damit ist die anfänglich ausgesprochene Behauptung erwiesen.

II. Statt der Formeln (g) und (h), die zur Reduktion der elliptischen Integrale dritter Art dienen, kann man auch folgende Reduktionsformel aufstellen: Sey $z = \frac{tg\,x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$, so ist für $k = (1+a)\left(1+\frac{e^2}{a}\right)$, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \frac{1}{\left(1+\frac{e^2}{a}\sin^2 x\right)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

woraus

$$\int_0^\varphi \frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = \Pi(\varphi, a, e) + \Pi\left(\varphi, \frac{e^2}{a}, e\right) - F(\varphi, e)$$

d. h. da $\int \frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = \int\frac{\partial z}{1+kz^2}$, es ist, wenn man ϱ aus der Gleichung $\varrho = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ bestimmt:

$$\Pi(\varphi, a, e) + \Pi\left(\varphi, \frac{e^2}{a}, e\right) = F(\varphi, e) + \int_0^\varrho \frac{\partial z}{1+kz^2}.$$

Ist nun a seinem Werthe nach über e, so ist $\frac{e^2}{a}$ unter e; mithin ist das elliptische Integral der dritten Art auf ein anderes derselben Art reduzirt, in dem a zwischen — e und + e liegt. Das Integral $\int_0^\varrho \frac{\partial z}{1+kz^2}$ ist immer leicht zu bestimmen. (Vergl. §. 160, III u. 157, IV.)

§. 153.

Berechnung der elliptischen Integrale.

I. Die sich zunächst darbietende Berechnungsweise ist die mittelst unendlicher Reihen (§. 57). So ergibt sich:

$$F(\varphi, e) = \int_0^\varphi \partial x + \frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \sin^2 x\,\partial x + \frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi \sin^4 x\,\partial x + \ldots,$$

$$E(\varphi, e) = \int_0^\varphi \partial x - \frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \sin^2 x\,\partial x - \frac{1}{3}\frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi \sin^4 x\,\partial x - \ldots,$$

welche Reihen, namentlich wenn e nicht nahe an 1, ziemlich rasch konvergiren. *

* Man wird dabei beachten, dass $\int_0^\varphi \sin^{2n} x\,\partial x < \varphi$ ist (§. 39, II).

Eben so ist

$$\left.\begin{array}{l}\Pi(\varphi,a,e)=\int_0^\varphi \frac{(1+a\sin^2 x)^{-1}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x=\int_0^\varphi\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-a\int_0^\varphi\frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\ \qquad +a^2\int_0^\varphi\frac{\sin^4 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\ldots,\\ \Pi(\varphi,a,e)=\int_0^\varphi\frac{(1-e^2\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}}{1+a\sin^2 x}\partial x=\int_0^\varphi\frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}+\frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi\frac{\sin^2 x\,\partial x}{1+a\sin^2 x}\\ \qquad+\frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi\frac{\sin^4 x\,\partial x}{1+a\sin^2 x}+\ldots,\end{array}\right\}\quad (i)$$

in welchen Formeln die Integrale zweiter Seite in §. 154 sollen bestimmt werden.

II. Eine zweite Art der Berechnung von $F(\varphi, e)$ ergibt sich durch folgende Betrachtungen. Man setze

$$tg\, x=\frac{\sin 2z}{e+\cos 2z},$$

so folgt daraus nach einander:

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x=\frac{1+2e\cos 2z+e^2}{(e+\cos 2z)^2},\quad \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2(e\cos 2z+1)}{(e+\cos 2z)^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2(e\cos 2z+1)}{1+2e\cos 2z+e^2},\quad \sin^2 x=\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}=\frac{\sin^2 2z}{1+2e\cos 2z+e^2},$$

$$1-e^2\sin^2 x=\frac{(1+e\cos 2z)^2}{1+2e\cos 2z+e^2},\quad \sqrt{1-e^2\sin^2 x}=\frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{(1+2e\cos 2z+e^2)}}$$

(da $1+e\cos 2z>0$)

$$=\frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{[1+e^2+2e(1-2\sin^2 z)]}}=\frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{[(1+e)^2-4e\sin^2 z]}}=\frac{1+e\cos 2z}{(1+e)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}}.$$

Die Gränzen von z sind, wenn die von x Null und φ waren, 0 und φ_1, wo

$$tg\,\varphi=\frac{\sin 2\varphi_1}{e+\cos 2\varphi_1},\quad \sin\varphi\,(e+\cos 2\varphi_1)=\sin 2\varphi_1\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi\cos 2\varphi_1-\sin 2\varphi_1\cos\varphi=-e\sin\varphi,$$

$$\sin(2\varphi_1-\varphi)=e\sin\varphi,$$

so dass $2\varphi_1-\varphi<\varphi$, $\varphi_1<\varphi$ und also

$$F(\varphi,e)=\int_0^{\varphi_1}\frac{2(1+e\cos 2z)}{1+2e\cos 2z+e^2}\,\frac{(1+e)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}}{1+e\cos 2z}\,\partial z$$

$$=2\int_0^{\varphi_1}\frac{(1+e)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}\,\partial z}{(1+e)^2[1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z]}=\frac{2}{1+e}\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial z}{\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e^2)}\sin^2 z}}$$

$$=\frac{2}{1+e}F(\varphi_1,\ e_1),\ \text{wenn } e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e}.$$

Da $1-2e+e^2=(1-e)^2$, also $1-2e+e^2>0$, $1+2e+e^2>4e$, $(1+e)^2>4e$, $1+e>2\sqrt{e}$, $1>\frac{2\sqrt{e}}{1+e}$, so ist $e_1<1$; ferner $(1+e)e_1=2\sqrt{e}$, $1+e<2$, $(1+e)e_1<2e_1$, $2e_1>2\sqrt{e}$, $e_1>\sqrt{e}$ und da wegen $e<1$ auch $\sqrt{e}>e$, so ist $e_1>e$. Demnach liegt e_1 zwischen e und 1.

Nach derselben Weise kann man nun $F(\varphi_1, e_1)$ abermals umformen und erhält leicht folgendes Ergebniss:

Man bestimme die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; ferner die Grössen $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ aus den Gleichungen

$$\sin(2\varphi_1-\varphi)=e\sin\varphi,\ \sin(2\varphi_2-\varphi_1)=e_1\sin\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \sin(2\varphi_n-\varphi_{n-1})=e_{n-1}\sin\varphi_{n-1};$$

$$e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e},\ e_2=\frac{2\sqrt{e_1}}{1+e_1},\ \ldots\ldots,\ e_n=\frac{2\sqrt{e_{n-1}}}{1+e_{n-1}},$$

so ist

$$F(\varphi, e)=\frac{2}{1+e}F(\varphi_1, e_1),\ F(\varphi_1, e_1)=\frac{2}{1+e_1}F(\varphi_2, e_2),\ \ldots\ldots,$$

$$F(\varphi_{n-1}, e_{n-1})=\frac{2}{1+e_{n-1}}F(\varphi_n, e_n);\ F(\varphi, e)=\frac{2}{1+e}\,\frac{2}{1+e_2}\cdots\frac{2}{1+e_{n-1}}F(\varphi_n, e_n).$$

Da $e_1>e$, $e_2>e_1, \ldots$, so wird bei ziemlich grossem n nahezu $e_n=1$, also dann $F(\varphi_n, e_n)=l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi_n\right)$ seyn (§. 151, II), so dass alsdann

$$F(\varphi, e)=\frac{2}{1+e}\,\frac{2}{1+e_1}\cdots\frac{2}{1+e_{n-1}}\,l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi_n\right)=\frac{e_1}{\sqrt{e}}\,\frac{e_2}{\sqrt{e_1}}\cdots\frac{e_n}{\sqrt{e_{n-1}}}\,l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi_n\right)$$

$$=\sqrt{\frac{e_1 e_2\ldots\ldots e_{n-1}}{e}}\,l\,tg\left(\frac{\pi}{\pi}+\frac{1}{2}\varphi_n\right),\ \text{wenn } e_n=1.\ ^*$$

III. Man zieht aus II sofort auch

$$F(\varphi_1, e_1)=\frac{1+e}{2}F(\varphi, e),$$

wo nun $e<e_1$, $\varphi>\varphi_1$. Vertauscht man die Zeichen e, φ mit e_1, φ_1, so hat man also auch:

$$F(\varphi, e)=\frac{1+e_1}{2}F(\varphi_1, e_1),\ tg\,\varphi_1=\frac{\sin 2\varphi}{e_1+\cos 2\varphi},\quad e=\frac{2\sqrt{e_1}}{1+e_1};\ e_1<e,\ \varphi_1>\varphi.$$

Daraus ergibt sich

$$tg(\varphi_1-\varphi)=\frac{tg\,\varphi_1-tg\,\varphi}{1+tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi}=\frac{1-e_1}{1+e_1}tg\,\varphi;$$

$$e_1=\frac{2-e^2-2\sqrt{1-e^2}}{e^2}=\left(\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right)^2,\ \sqrt{e_1}=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e};$$

$$\frac{1-e_1}{1+e_1}=\sqrt{1-e^2};\ tg(\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-e^2}\,tg\,\varphi.$$

---

* Es ist überhaupt

$$\frac{2}{1+e}\,\frac{2}{1+e_1}\cdots\frac{2}{1+e_{n-1}}=\frac{e_1}{\sqrt{e}}\,\frac{e_2}{\sqrt{e_1}}\cdots\cdots\frac{e_n}{\sqrt{e_{n-1}}}=e_n\sqrt{\frac{e_1 e_2\ldots\ldots e_{n-1}}{e}}.$$

Dabei ist immer $e_1 > 0$. Setzt man $e = \sin\alpha$, so ist

$$\sqrt{e_1} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = tg\frac{\alpha}{2},\ e_1 = tg^2\frac{\alpha}{2};\ 1+e_1 = 1+tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

woraus leicht das Nachstehende folgt:

Berechnet man $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ je zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ aus

$$\sin\alpha = e,\ \sin\alpha_1 = tg^2\frac{\alpha}{2},\ \sin\alpha_2 = tg^2\frac{\alpha_1}{2}, \ldots, \sin\alpha_{n-1} = tg^2\frac{\alpha_{n-2}}{2},$$

ferner $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ aus

$$tg(\varphi_1-\varphi) = \cos\alpha\, tg\varphi,\ tg(\varphi_2-\varphi_1) = \cos\alpha_1\, tg\varphi_1, \ldots, tg(\varphi_n-\varphi_{n-1}) = \cos\alpha_{n-1}\, tg\varphi_{n-1};$$

so ist

$$F(\varphi, e) = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\ldots\ldots\cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}}\ \frac{F(\varphi_n, e_n)}{2^n},\ e_n = tg^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}.$$

Da die e abnehmen, so ist bald $e_n = 0$ zu setzen, und dann ist $F(\varphi_n, e_n) = \varphi_n$. Uebrigens kann φ_n ganz wohl $\frac{\pi}{2}$ (weit) überschreiten.

IV. Aus II folgt sofort auch

$$(1+e)\sqrt{1-e_1^2\sin^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = e\cos x + \sqrt{1-e^2\sin^2 x} + \frac{e^2-1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}};$$

$$(1+e)\int_0^\varphi \sqrt{1-e_1^2\sin^2 z}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = e\sin\varphi + E(\varphi, e) + \frac{e^2-1}{2}F(\varphi, e),$$ d. h. (§. 42, IV):

$$(1+e)E(\varphi_1, e_1) = e\sin\varphi + E(\varphi, e) + \frac{e^2-1}{2}F(\varphi, e);$$

$$E(\varphi, e) = (1+e)E(\varphi_1, e_1) + \frac{1-e^2}{2}F(\varphi, e) - e\sin\varphi.$$

Daraus ergibt sich, wenn die Bezeichnungen in II gelten:

$$E(\varphi, e) = (1+e)E(\varphi_1, e_1) + \frac{1-e^2}{2}F(\varphi, e) - e\sin\varphi;$$

$$E(\varphi_1, e_1) = (1+e_1)E(\varphi_2, e_2) + \frac{1-e_1^2}{2}F(\varphi_1, e_1) - e_1\sin\varphi_1;$$

$$\vdots$$

$$E(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = (1+e_{n-1})E(\varphi_n, e_n) + \frac{1-e^2_{n-1}}{2}F(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) - e_{n-1}\sin\varphi_{n-1}.$$

Ist $e_n = 1$, so ist $E(\varphi_n, e_n) = \sin\varphi_n$ und zugleich $F(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = \frac{2}{1+e_{n-1}}$ $F(\varphi_n, e_n)$, $F(\varphi_{n-2}, e_{n-2}) = \frac{2}{1+e_{n-2}}\frac{2}{1+e_{n-1}}F(\varphi_n, e_n)$, ... so dass die Berechnung von $E(\varphi, e)$ hiedurch ermöglicht ist.

V. Man hat übrigens auch

$$E(\varphi_1, e_1) = \frac{1}{1+e}E(\varphi, e) - \frac{1-e}{2}F(\varphi, e) + \frac{e}{1+e}\sin\varphi_1$$

so dass, wenn man e und φ mit e_1 und φ_1 vertauscht:

$$E(\varphi, e) = \frac{1}{1+e_1} E(\varphi_1, e_1) - \frac{1-e_1}{2} F(\varphi_1, e_1) + \frac{e_1}{1+e_1} \sin\varphi_1,$$

oder wenn man die Bezeichnungen in III anwendet:

$$E(\varphi, e) = \cos^2\frac{\alpha}{2} E(\varphi_1, e_1) - \cotg\alpha\, tg\frac{\alpha}{2} F(\varphi_1, e_1) + \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\varphi_1;\ e_1 = tg^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dazu dann:

$$E(\varphi_1, e_1) = \cos^2\frac{\alpha_1}{2} E(\varphi_2, e_2) - \cotg\alpha_1\, tg\frac{\alpha_1}{2} F(\varphi_2, e_2) + \sin^2\frac{\alpha_1}{2} \sin\varphi_2;\ e_2 = tg^2\frac{\alpha_1}{2};$$

$$\vdots$$

$$E(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = \cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2} E(\varphi_n, e_n) - \cotg\alpha_{n-1}\, tg\frac{\alpha_{n-1}}{2} F(\varphi_n, e_n) + \sin^2\frac{\alpha_{n-1}}{2} \sin\varphi_n;$$

$$e_n = tg^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}.$$

Für $e_n = 0$ ist

$$E(\varphi_n, e_n) = \varphi_n;\ F(\varphi_n, e_n) = \varphi_n,\ F(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}}\varphi_n,$$

$$F(\varphi_{n-2}, e_{n-2}) = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{n-2}}{2}}\varphi_n, \ldots,$$

Alles berechnet nach den Vorschriften in III.

Die Formeln in II und IV werden für e^2 nahe an 1 ($e^2 > \frac{1}{2}$), die in III und V für e^2 nahe an 0 ($e^2 < \frac{1}{2}$) geeignet seyn.

§. 154.

Ermittlung der Integrale in den Formeln (i).

I. Man hat identisch

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n+2}x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} = -\frac{1}{a}\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} + \frac{1}{a}\int_0^\varphi \sin^{2n}x\,\partial x,$$

welche Reduktionsformel schliesslich auf $\int_0^\varphi \frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}$ führt, ein Integral das schon in §. 151, II bestimmt wurde.

II. Um nun aber die Integrale deren allgemeine Form ist

$$\int \frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

zu bestimmen, wollen wir etwas allgemeinere Reduktionsformeln aufstellen. Zu dem Ende bezeichnen wir durch ξ eine der drei Grössen $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ und behaupten, es sey immer:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4},$$

b, c bestimmte Grössen sind. Um diess zu rechtfertigen, sey

1) $\xi = \sin x$, also $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\cos x = \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\sqrt{1-\sin^2 x} =$

$$\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x + e^2 \sin^4 x},$$

$a = 1$, $b = -(1+e^2)$, $c = e^2$, und das obere Zeichen gilt;

2) $\xi = \cos x$, $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x} = -\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-e^2+e^2\cos^2 x)}$

$$= -\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x - e^2\cos^4 x},$$

$a = 1-e^2$, $b = -1+2e^2$, $c = -e^2$, das untere Zeichen gilt;

3) $\xi = tg\,x$, $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{e^2 tg^2 x}{1+tg^2 x}}\,(1+tg^2 x)$

$$\sqrt{1+(2-e^2)tg^2 x + (1-e^2)tg^4 x},$$

$a = 1$, $b = 2-e^2$, $c = 1-e^2$, das obere Zeichen gilt.

Sey nun

$$y = \xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4},$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(\xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4})}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(n-3)a\xi^{n-4}+(n-2)b\xi^{n-2}+(n-1)c\xi^n}{\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4}}\;\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= \pm\frac{(n-3)a\xi^{n-4}+(n-2)b\xi^{n-2}+(n-1)c\xi^n}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

so dass also, wenn man nach x integrirt:

$$\pm\xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4} = (n-3)a\int\frac{\xi^{n-4}\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + (n-2)b\int\frac{\xi^{n-2}\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

$$+(n-1)c\int\frac{\xi^n\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Setzt man hier $\xi = \sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ und beachtet die oben gefundenen Werthe von a, b, c, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\sin^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}\frac{1+e^2}{e^2}\int\frac{\sin^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{n-3}{(n-1)e^2}\int\frac{\sin^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{\sin^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x+e^2\sin^4 x},\\
\int\frac{\cos^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}\frac{2e^2-1}{e^2}\int\frac{\cos^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \frac{n-3}{n-1}\frac{1-e^2}{e^2}\int\frac{\cos^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{\cos^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x-e^2\cos^4 x},\\
\int\frac{tg^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= -\frac{n-2}{n-1}\frac{2-e^2}{1-e^2}\int\frac{tg^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{n-3}{n-1}\frac{1}{1-e^2}\int\frac{tg^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{tg^{n-3}x}{(n-1)(1-e^2)}\sqrt{1+(2-e^2)tg^2 x+(1-e^2)tg^4 x},
\end{aligned}\right\}\quad(k)$$

in welchen Formeln die letzten Glieder auch heissen:

$$\frac{\sin^{n-3}x\cos x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)e^2},\quad \frac{\cos^{n-3}x\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)e^2},\quad \frac{tg^{n-3}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^2 x}.$$

Dabei setzen wir nun n als positive ganze Zahl voraus, obgleich die Formeln unbedingt gelten. Alsdann führen dieselben schliesslich auf

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad \int\frac{\xi\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad \int\frac{\xi^2\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Das erste dieser Integrale gehört zu den unmittelbar elliptischen Integralen; das zweite lässt sich nach §. 32 bestimmen,* während für das dritte man hat:

$$\int\frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=\frac{1}{e^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{1}{e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x,$$

$$\int\frac{\cos^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\int\frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

$$\int\frac{tg^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=-\frac{1}{1-e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x+\frac{1}{1-e^2}\int\frac{1-e^2\sin^2 x-e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x$$

$$=-\frac{1}{1-e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x+\frac{1}{1-e^2}tg\,x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}.$$

III. Die Reduktionsformeln (k) gelten natürlich auch für ein negatives n. Setzt man, um diess klarer hervortreten zu lassen, $-n+4$ an die Stelle von n, so zieht man leicht aus denselben:

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\partial x}{\sin^n x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\frac{n-2}{n-1}(1+e^2)\int\frac{\partial x}{\sin^{n-2}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad-\frac{n-3}{n-1}e^2\int\frac{\partial x}{\sin^{n-4}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{\cos x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)\sin^{n-1}x}\\
\int\frac{\partial x}{\cos^n x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=-\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2e^2-1}{1-e^2}\int\frac{\partial x}{\cos^{n-2}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{n-3}{n-1}\,\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{\partial x}{\cos^{n-4}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}+\frac{\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^{n-1}x},\\
\int\frac{\partial x}{tg^n x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=-\frac{n-2}{n-1}(2-e^2)\int\frac{\partial x}{tg^{n-2}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad-\frac{n-3}{n-1}(1-e^2)\int\frac{\partial x}{tg^{n-4}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)\cos^2 x\,tg^{n-1}x}.
\end{aligned}\right\}\quad (k')$$

Diese Formeln führen schliesslich auf

$$\int\frac{\partial x}{\xi^2\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad \int\frac{\partial x}{\xi\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

von welchen Integralen das erste für $n=2$ noch durch (k′) auf bekannte reduzirt, das zweite aber nach §. 32 bestimmt wird.

---

* Man setze zu dem Ende für $\xi=\sin x:\cos x=z$, für $\xi=\cos x:\sin x=z$, für $\xi=tg\,x:\cos x=z$.

Man ersieht aus (k) und k′), dass die Grösse $\int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$ nur für ein gerades n (positiv oder negativ) schliesslich auf elliptische Integrale führt.

IV. Auch für den Fall dass $\xi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 x}$, hat man

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\, \frac{\partial \xi}{\partial x} = - e^2 \sin x \cos x = - e^2 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{e^2}} \sqrt{\frac{e^2-1+\xi^2}{e^2}} =$$
$$- \sqrt{e^2 - 1 - (e^2-2)\xi^2 - \xi^4},$$

$a = e^2 - 1$, $b = 2 - e^2$, $c = -1$, und es gilt das untere Zeichen, mithin:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x = \frac{n-2}{n-1}(2-e^2) \int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x \\
&\qquad - \frac{n-3}{n-1}(1-e^2) \int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x + \frac{e^2 \sin x \cos x (1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-3}{2}}}{n-1}, \\
&\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \frac{n-2}{n-1}\frac{2-e^2}{1-e^2} \int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \\
&- \frac{n-3}{n-1}\frac{1}{1-e^2} \int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \frac{e^2 \sin x \cos x}{(n-1)(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}}.
\end{aligned}\right\} \text{(l)}$$

So etwa wäre für $n = 2$:

$$\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-e^2} \int \frac{1-e^2 \sin^2 x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x - \frac{e^2 \sin x \cos x}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$
$$= \frac{1}{1-e^2} \int \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\, \partial x - \frac{e^2}{1-e^2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}.$$

V. Da $\sin^2 x = \frac{1-(1-e^2 \sin^2 x)}{e^2}$, $\cos^2 x = \frac{e^2 - 1 + (1 - e^2 \sin^2 x)}{e^2}$, so werden die Integrale

$$\int \frac{\sin^{2m} x\, \partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\cos^{2m} x\, \partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$

leicht auf obige zurückgeführt werden können. Setzt man eben so

$$\int \frac{\xi^n \partial x}{(1 \pm e\xi)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = R_n, \quad \int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = P_n,$$

so ist

$$R_n \pm e\, R_{n+1} = P_n,$$

so dass also

$$R_0 \pm e R_1 = P_0, \quad R_1 \pm e R_2 = P_1, \quad R_2 \pm e R_3 = P_2, \ldots,$$

woraus, wenn P_0, $P_1, \ldots$ nach dem Obigen bekannt sind, dessgleichen R_0, dann R_1, $R_2, \ldots$ gefunden werden. Für $\xi = \sin x$ ist aber

$$\int \frac{\partial x}{(1 \pm e \sin x)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \int \frac{(1 \mp e \sin x)\partial x}{(\sqrt{1-e^2 \sin^2 x})^3} = \int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \mp e \int \frac{\sin x\, \partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}},$$

welche beide Integrale bestimmt werden können. Aehnliche Integrale werden wir aber immer durch die nachfolgenden Methoden bestimmen können, so dass die Aufstellung weiterer besonderer Reduktionsformeln unterbleiben kann.

§. 155.

Reduktion des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + .. Ex^4}}$ auf elliptische Integrale.

Das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

lässt sich immer auf die Form $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 \pm z^2)(1 \pm e^2 z^2)}}$ bringen, eben so dasjenige, das man für $E = 0$ aus dem vorigen erhält, wie sich im Nachstehenden zeigen wird.

E nicht $= 0$, mithin gegeben $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$.

I. Die Gleichung $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = 0$ habe vier reelle Wurzeln a, b, c, d so, dass $a < b < c < d$. Wir setzen diese Wurzeln als ungleich voraus, denn wären nur zwei einander gleich, so käme das vorgelegte Integral auf §. 32 zurück. Man hat also identisch

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Wir müssen nun, in Bezug auf die Gränzen von x, folgende Fälle unterscheiden.

1) x liegt unter a, oder über d. Da immer $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ positiv seyn muss, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ es aber ist, so muss nothwendig $E > 0$ seyn, da sonst x nicht in der angegebenen Weise liegen darf. * Man setze nun

$$\frac{x-a}{x-d} = \alpha \frac{1-z}{1+z}, \quad x = \frac{a(1+z) - \alpha d(1-z)}{1+z-\alpha(1-z)}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha(d-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

woraus

$$x - a = \frac{\alpha(a-d)(1-z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z}, \quad x - b = \frac{a-b+\alpha(b-d)+(a+\alpha d-b-\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

$$x - c = \frac{a-c+\alpha(c-d)+(a+\alpha d-c-\alpha c)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z}, \quad x - d = \frac{(a-d)(1+z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

so dass

---

* Für die Anwendungen nämlich wird immer $\sqrt{A + Bx + \ldots + Ex^4}$ reell seyn; analytisch wäre ein negatives E auch zulässig; man würde aber dann bloss $i = \sqrt{-1}$ als Faktor im Nenner herauszusetzen haben.

$$\frac{1}{E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2$$

$$= \frac{4\alpha^2(d-a)^2}{E} \frac{1}{\alpha(a-d)^2(1-z^2)[(a-b)(1+z)+\alpha(b-d)(1-z)][(a-c)[1+z)+\alpha(c-d)(1-z)]}.$$

Die noch unbestimmte Grösse α wollen wir nun so bestimmen, dass das im Produkte der zwei letzten Faktoren enthaltene Glied mit z ausfalle, wozu nothwendig ist dass

$$(a-b)(a-c) - \alpha^2 (b-d)(c-d) = 0, \quad \alpha^2 = \frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)};$$

dann ist jenes Produkt

$$(a-b)(a-c)(1+z^2) + \alpha[(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)](1-z^2) + \alpha^2(b-d)(c-d)$$
$$(1+z^2) = 2(a-b)(a-c)(1+z^2) + \alpha[(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)](1-z^2) =$$
$$2(a-b)(a-c) + \alpha[(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)] + [2(a-b)(a-c)$$
$$- \alpha\{(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)\}]z^2.$$

Die Grössen $(a-b)(a-c)$, $(c-d)(a-b)$, $(a-c)(b-d)$ sind alle positiv; setzt man also α auch positiv voraus, d. h. $= \sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)}}$, so ist

$$2(a-b)(a-c) + \alpha[(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)] = \alpha\left[\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$
$$2(a-b)(a-c) - \alpha[(c-d)(a-b) + (a-c)(b-d)] = -\alpha\left[-\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$

so dass wenn zur Abkürzung

$$e = \frac{-\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}}{\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}} = \frac{(a-c)(b-d) - (c-d)(a-b)}{[\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}]^2}$$
$$= \frac{(a-d)(b-c)}{[\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}]^2}$$

gesetzt wird, wo also e positiv und < 1, man hat:

$$\frac{1}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{4}{E[\sqrt{(c-d)(a-b)} + \sqrt{(a-c)(b-d)}]^2} \times$$
$$\frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)} = \frac{4e}{E(a-d)(b-c)} \frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)}$$

und man hat daher das folgende Schema:

$$\frac{x-a}{x-d} = \alpha\frac{1-z}{1+z}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{(b-a)(c-a)}{(d-b)(d-c)}}, \quad e = \frac{\sqrt{(c-a)(d-b)} - \sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)} + \sqrt{(d-c)(b-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

Was die Gränzen von z anbelangt, so liegt diese Grösse zwischen -1 und $+1$. *

---

* Da $\frac{x-a}{x-d}$ hier immer positiv ist, so ist auch $\alpha\frac{1-z}{1+z}$ positiv; da wir weiter α positiv

2) x liege zwischen a und b. In diesem Falle ist $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ nothwendig negativ, also muss E negativ seyn. Man setze nun

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ x=\frac{b+\alpha a+(b-a\alpha)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^2},$$

woraus

$$x-a=\frac{(b-a)(1+z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-b=-\frac{\alpha(b-a)(1-z)}{1+a+(1-\alpha)z},$$

$$x-c=\frac{(b-c)(1+z)+\alpha(a-c)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-d=\frac{(b-d)(1+z)+\alpha(a-d)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},$$

so dass wenn wieder α so bestimmt wird aus

$$(b-c)(b-d)-\alpha^2(a-c)(a-d)=0,\ \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},$$

man zugleich beachtet, dass dann

$$(b-c)(b-d)+\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)$$
$$=\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$
$$(b-c)(b-d)-\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)=$$
$$-\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$

und man setzt:

$$e=\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}}{\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}},$$

man haben wird:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=-\alpha(b-a)^2(1-z^2)\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2(1-e^2z^2)[1+\alpha+(1-\alpha)z]^{-4},$$

und da auch

$$e=\frac{(d-c)(b-a)}{\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2},$$

so erhält man jetzt folgendes Schema:

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},\ e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(c-b)(d-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(c-b)(d-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(d-c)(b-a)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z)}}.$$

Dabei liegt z immer zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

3) x liege zwischen b und c. Jetzt muss E positiv seyn und man erhält ganz in derselben Weise:

---

nehmen, so muss $\frac{1-z}{1+z}>0$ seyn. Dazu gehört aber, dass z zwischen -1 und $+1$ liege. Für $x=-\infty$ ist $\frac{x-a}{x-d}=1$, also $\alpha\frac{1-z}{1+z}=1$, $z=-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, für $x=a$, aber $z=1$; für $x=d$ ist $\frac{x-a}{x-d}=\infty$, also $z=-1$, für $x=\infty$ wieder $z=-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Auch ist $e<1$.

$$\frac{c-x}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(d-c)(c-a)}{(d-b)(b-a)}},\ e=\frac{\sqrt{(d-b)(c-a)}-\sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(d-b)(c-a)}+\sqrt{(d-c)(b-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

z zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

4) x liege zwischen c und d. Jetzt muss $E<0$ seyn und man hat:

$$\frac{d-x}{x-c}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}},\ e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(d-a)(c-b)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(d-a)(c-b)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(b-a)(d-c)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

II. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ hat nur zwei reelle Wurzeln: $a<b$, und zwei imaginäre: $m\pm ni$, so dass

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=E(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2],$$

wo natürlich $n^2>0$. Man hat nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $x<a$ oder $>b$, so ist $E>0$, und man setze wieder

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ x=\frac{a-\alpha b+(a+\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so ist

$$(x-m)^2+n^2=\frac{[a-\alpha b-m+m\alpha+(a+\alpha b-m-m\alpha)z]^2+n^2[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so dass wenn α aus der Gleichung

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)(a+\alpha b-m-m\alpha)+n^2(1-\alpha^2)=0$$

bestimmt wird, aus der folgt

$$\alpha^2=\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2},$$

und man zur Abkürzung setzt:

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)^2+n^2(1-\alpha)^2=\beta^2,\ (a+\alpha b-m-m\alpha)^2+n^2(1+\alpha)^2=\gamma^2,$$

man hat

$$(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2]=\frac{\alpha(b-a)^2(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^4},$$

so dass also hier:

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2}},\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

$$=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}},$$

z zwischen -1 und $+1$.

2) x liege zwischen a und b. Ganz wie so eben hat man, da jetzt $E<0$:

so dass, wenn man e und φ mit e_1 und φ_1 vertauscht:

$$E(\varphi, e) = \frac{1}{1+e_1} E(\varphi_1, e_1) - \frac{1-e_1}{2} F(\varphi_1, e_1) + \frac{e_1}{1+e_1} \sin\varphi_1,$$

oder wenn man die Bezeichnungen in III anwendet:

$$E(\varphi, e) = \cos^2\frac{\alpha}{2} E(\varphi_1, e_1) - \cotg\alpha\, tg\frac{\alpha}{2} F(\varphi_1, e_1) + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi_1;\ e_1 = tg^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dazu dann:

$$E(\varphi_1, e_1) = \cos^2\frac{\alpha_1}{2} E(\varphi_2, e_2) - \cotg\alpha_1\, tg\frac{\alpha_1}{2} F(\varphi_2, e_2) + \sin^2\frac{\alpha_1}{2}\sin\varphi_2;\ e_2 = tg^2\frac{\alpha_1}{2};$$

$$\vdots$$

$$E(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = \cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2} E(\varphi_n, e_n) - \cotg\alpha_{n-1}\, tg\frac{\alpha_{n-1}}{2} F(\varphi_n, e_n) + \sin^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}\sin\varphi_n;$$

$$e_n = tg^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}.$$

Für $e_n = 0$ ist

$$E(\varphi_n, e_n) = \varphi_n;\ F(\varphi_n, e_n) = \varphi_n,\ F(\varphi_{n-1}, e_{n-1}) = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}}\varphi_n,$$

$$F(\varphi_{n-2}, e_{n-2}) = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha_{n-1}}{2}\cos^2\frac{\alpha_{n-2}}{2}}\varphi_n, \ldots,$$

Alles berechnet nach den Vorschriften in III.

Die Formeln in II und IV werden für e^2 nahe an 1 ($e^2 > \frac{1}{2}$), die in III und V für e^2 nahe an 0 ($e^2 < \frac{1}{2}$) geeignet seyn.

§. 154.

Ermittlung der Integrale in den Formeln (i).

I. Man hat identisch

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n+2}x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} = -\frac{1}{a}\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} + \frac{1}{a}\int_0^\varphi \sin^{2n}x\,\partial x,$$

welche Reduktionsformel schliesslich auf $\int_0^\varphi \frac{\partial x}{1+a\sin^2 x}$ führt, ein Integral das schon in §. 151, II bestimmt wurde.

II. Um nun aber die Integrale deren allgemeine Form ist

$$\int \frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

zu bestimmen, wollen wir etwas allgemeinere Reduktionsformeln aufstellen. Zu dem Ende bezeichnen wir durch ξ eine der drei Grössen $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ und behaupten, es sey immer:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} = \pm\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4},$$

wo a, b, c bestimmte Grössen sind. Um diess zu rechtfertigen, sey

1) $\xi = \sin x$, also $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\cos x = \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\sqrt{1-\sin^2 x} =$

$$\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x + e^2 \sin^4 x},$$

$a=1$, $b=-(1+e^2)$, $c=e^2$, und das obere Zeichen gilt;

2) $\xi = \cos x$, $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x} = -\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-e^2+e^2\cos^2 x)}$

$$= -\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x - e^2\cos^4 x},$$

$a=1-e^2$, $b=-1+2e^2$, $c=-e^2$, das untere Zeichen gilt;

3) $\xi = tg\, x$, $\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{e^2 tg^2 x}{1+tg^2 x}}\,(1+tg^2 x)$

$$\sqrt{1+(2-e^2)\,tg^2 x + (1-e^2)\,tg^4 x},$$

$a=1$, $b=2-e^2$, $c=1-e^2$, das obere Zeichen gilt.

Sey nun

$$y = \xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4},$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(\xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4})}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(n-3)a\xi^{n-4}+(n-2)b\xi^{n-2}+(n-1)c\xi^n}{\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4}}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= \pm\frac{(n-3)a\xi^{n-4}+(n-2)b\xi^{n-2}+(n-1)c\xi^n}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

so dass also, wenn man nach x integrirt:

$$\pm\xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4} = (n-3)a\int\frac{\xi^{n-4}\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + (n-2)b\int\frac{\xi^{n-2}\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

$$+(n-1)c\int\frac{\xi^n\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Setzt man hier $\xi = \sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ und beachtet die oben gefundenen Werthe von a, b, c, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\sin^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}\,\frac{1+e^2}{e^2}\int\frac{\sin^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{n-3}{(n-1)e^2}\int\frac{\sin^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad + \frac{\sin^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x+e^2\sin^4 x},\\
\int\frac{\cos^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}\,\frac{2e^2-1}{e^2}\int\frac{\cos^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \frac{n-3}{n-1}\,\frac{1-e^2}{e^2}\int\frac{\cos^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad + \frac{\cos^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x-e^2\cos^4 x},\\
\int\frac{tg^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= -\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2-e^2}{1-e^2}\int\frac{tg^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{n-3}{n-1}\,\frac{1}{1-e^2}\int\frac{tg^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad + \frac{tg^{n-3}x}{(n-1)(1-e^2)}\sqrt{1+(2-e^2)\,tg^2 x+(1-e^2)\,tg^4 x},
\end{aligned}\right\}\quad (k)$$

in welchen Formeln die letzten Glieder auch heissen:

$$\frac{\sin^{n-3} x \cos x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)e^2}, \quad \frac{\cos^{n-3} x \sin x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)e^2}, \quad \frac{tg^{n-3} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^2 x}.$$

Dabei setzen wir nun n als positive ganze Zahl voraus, obgleich die Formeln unbedingt gelten. Alsdann führen dieselben schliesslich auf

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\xi \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\xi^2 \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}.$$

Das erste dieser Integrale gehört zu den unmittelbar elliptischen Integralen; das zweite lässt sich nach §. 32 bestimmen,* während für das dritte man hat:

$$\int \frac{\sin^2 x \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{e^2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \frac{1}{e^2}\int \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\, \partial x,$$

$$\int \frac{\cos^2 x \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \int \frac{\sin^2 x \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}},$$

$$\int \frac{tg^2 x \, \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{1-e^2}\int \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\, \partial x + \frac{1}{1-e^2}\int \frac{1-e^2 \sin^2 x - e^2 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}\partial x$$

$$= -\frac{1}{1-e^2}\int \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\, \partial x + \frac{1}{1-e^2}\, tg\, x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}.$$

III. Die Reduktionsformeln (k) gelten natürlich auch für ein negatives n. Setzt man, um diess klarer hervortreten zu lassen, $-n+4$ an die Stelle von n, so zieht man leicht aus denselben:

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\partial x}{\sin^n x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}(1+e^2)\int \frac{\partial x}{\sin^{n-2} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \\
&\quad - \frac{n-3}{n-1}e^2 \int \frac{\partial x}{\sin^{n-4} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \frac{\cos x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)\sin^{n-1} x} \\
\int \frac{\partial x}{\cos^n x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} &= -\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2e^2-1}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{\cos^{n-2} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \\
&\quad + \frac{n-3}{n-1}\,\frac{e^2}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{\cos^{n-4} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} + \frac{\sin x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^{n-1} x}, \\
\int \frac{\partial x}{tg^n x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} &= -\frac{n-2}{n-1}(2-e^2)\int \frac{\partial x}{tg^{n-2} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \\
&\quad - \frac{n-3}{n-1}(1-e^2)\int \frac{\partial x}{tg^{n-4} x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{(n-1)\cos^2 x \, tg^{n-1} x}.
\end{aligned}\right\} (k')$$

Diese Formeln führen schliesslich auf

$$\int \frac{\partial x}{\xi^2 \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\partial x}{\xi \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}},$$

von welchen Integralen das erste für $n=2$ noch durch (k′) auf bekannte reduzirt, das zweite aber nach §. 32 bestimmt wird.

---

* Man setze zu dem Ende für $\xi = \sin x : \cos x = z$, für $\xi = \cos x : \sin x = z$, für $\xi = tg\, x : \cos x = z$.



Man ersieht aus (k) und k'), dass die Grösse $\int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$ nur für ein gerades n (positiv oder negativ) schliesslich auf elliptische Integrale führt.

IV. Auch für den Fall dass $\xi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 x}$, hat man

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = -e^2 \sin x \cos x = -e^2 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{e^2}}\sqrt{\frac{e^2-1+\xi^2}{e^2}} = \\ -\sqrt{e^2-1-(e^2-2)\xi^2-\xi^4},$$

$a = e^2 - 1$, $b = 2 - e^2$, $c = -1$, und es gilt das untere Zeichen, mithin:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x = \frac{n-2}{n-1}(2-e^2)\int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x \\
&\quad - \frac{n-3}{n-1}(1-e^2)\int \frac{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x + \frac{e^2 \sin x \cos x (1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-3}{2}}}{n-1}, \\
&\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{2-e^2}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \\
&- \frac{n-3}{n-1}\,\frac{1}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} - \frac{e^2 \sin x \cos x}{(n-1)(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}}.
\end{aligned}\right\} \text{(l)}$$

So etwa wäre für $n = 2$:

$$\int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-e^2}\int \frac{1-e^2 \sin^2 x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} \partial x - \frac{e^2 \sin x \cos x}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$
$$= \frac{1}{1-e^2}\int \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}\,\partial x - \frac{e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}.$$

V. Da $\sin^2 x = \frac{1-(1-e^2 \sin^2 x)}{e^2}$, $\cos^2 x = \frac{e^2 - 1 + (1 - e^2 \sin^2 x)}{e^2}$, so werden die Integrale

$$\int \frac{\sin^{2m} x\,\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}, \quad \int \frac{\cos^{2m} x\,\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$

leicht auf obige zurückgeführt werden können. Setzt man eben so

$$\int \frac{\xi^n \partial x}{(1 \pm e\xi)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = R_n, \quad \int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = P_n,$$

so ist

$$R_n \pm e\,R_{n+1} = P_n,$$

so dass also

$$R_0 \pm e R_1 = P_0,\ R_1 \pm e R_2 = P_1,\ R_2 \pm e R_3 = P_2, \ldots,$$

woraus, wenn P_0, P_1, ... nach dem Obigen bekannt sind, dessgleichen R_0, dann R_1, R_2, ... gefunden werden. Für $\xi = \sin x$ ist aber

$$\int \frac{\partial x}{(1 \pm e \sin x)\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \int \frac{(1 \mp e \sin x)\,\partial x}{(\sqrt{1-e^2 \sin^2 x})^3} = \int \frac{\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \mp e \int \frac{\sin x\,\partial x}{(1-e^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}},$$

welche beide Integrale bestimmt werden können. Aehnliche Integrale werden wir aber immer durch die nachfolgenden Methoden bestimmen können, so dass die Aufstellung weiterer besonderer Reduktionsformeln unterbleiben kann.

§. 155.

Reduktion des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + .. Ex^4}}$ auf elliptische Integrale.

Das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

lässt sich immer auf die Form $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 \pm z^2)(1 \pm e^2 z^2)}}$ bringen, eben so dasjenige, das man für $E = 0$ aus dem vorigen erhält, wie sich im Nachstehenden zeigen wird.

$$E \text{ nicht } = 0, \text{ mithin gegeben } \int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}.$$

I. Die Gleichung $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = 0$ habe vier reelle Wurzeln a, b, c, d so, dass $a < b < c < d$. Wir setzen diese Wurzeln als ungleich voraus, denn wären nur zwei einander gleich, so käme das vorgelegte Integral auf §. 32 zurück. Man hat also identisch

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Wir müssen nun, in Bezug auf die Gränzen von x, folgende Fälle unterscheiden.

1) x liegt unter a, oder über d. Da immer $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ positiv seyn muss, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ es aber ist, so muss nothwendig $E > 0$ seyn, da sonst x nicht in der angegebenen Weise liegen darf. * Man setze nun

$$\frac{x-a}{x-d} = \alpha \frac{1-z}{1+z}, \quad x = \frac{a(1+z) - \alpha d(1-z)}{1+z-\alpha(1-z)}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha(d-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

woraus

$$x - a = \frac{\alpha(a-d)(1-z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z}, \quad x - b = \frac{a-b+\alpha(b-d)+(a+\alpha d-b-\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

$$x - c = \frac{a-c+\alpha(c-d)+(a+\alpha d-c-\alpha c)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z}, \quad x - d = \frac{(a-d)(1+z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

so dass

---

* Für die Anwendungen nämlich wird immer $\sqrt{A + Bx + \ldots + Ex^4}$ reell seyn; analytisch wäre ein negatives E auch zulässig; man würde aber dann bloss $i = \sqrt{-1}$ als Faktor im Nenner herauszusetzen haben.

$$\frac{1}{E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2$$

$$= \frac{4\alpha^2(d-a)^2}{E} \frac{1}{\alpha(a-d)^2(1-z^2)[(a-b)(1+z)+\alpha(b-d)(1-z)][(a-c)[1+z)+\alpha(c-d)(1-z)]}.$$

Die noch unbestimmte Grösse α wollen wir nun so bestimmen, dass das im Produkte der zwei letzten Faktoren enthaltene Glied mit z ausfalle, wozu nothwendig ist dass

$$(a-b)(a-c)-\alpha^2(b-d)(c-d)=0,\quad \alpha^2=\frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)};$$

dann ist jenes Produkt

$$(a-b)(a-c)(1+z^2)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)](1-z^2)+\alpha^2(b-d)(c-d)$$
$$(1+z^2)=2(a-b)(a-c)(1+z^2)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)](1-z^2)=$$
$$2(a-b)(a-c)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]+[2(a-b)(a-c)$$
$$-\alpha\{(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)\}]z^2.$$

Die Grössen $(a-b)(a-c)$, $(c-d)(a-b)$, $(a-c)(b-d)$ sind alle positiv; setzt man also α auch positiv voraus, d. h. $= \sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)}}$, so ist

$$2(a-b)(a-c)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]=\alpha\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$
$$2(a-b)(a-c)-\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]=-\alpha\left[-\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$

so dass wenn zur Abkürzung

$$e=\frac{-\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}}{\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}}=\frac{(a-c)(b-d)-(c-d)(a-b)}{\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}$$
$$=\frac{(a-d)(b-c)}{\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}$$

gesetzt wird, wo also e positiv und < 1, man hat:

$$\frac{1}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{E\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}\times$$
$$\frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)}=\frac{4e}{E(a-d)(b-c)}\frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)}$$

und man hat daher das folgende Schema:

$$\frac{x-a}{x-d}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(b-a)(c-a)}{(d-b)(d-c)}},\quad e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(d-c)(b-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

Was die Gränzen von z anbelangt, so liegt diese Grösse zwischen -1 und $+1$. *

---

* Da $\frac{x-a}{x-d}$ hier immer positiv ist, so ist auch $\alpha\frac{1-z}{1+z}$ positiv; da wir weiter α positiv

2) x liege zwischen a und b. In diesem Falle ist $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ nothwendig negativ, also muss E negativ seyn. Man setze nun

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ x=\frac{b+\alpha a+(b-a\alpha)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^2},$$

woraus

$$x-a=\frac{(b-a)(1+z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-b=-\frac{\alpha(b-a)(1-z)}{1+a+(1-\alpha)z},$$

$$x-c=\frac{(b-c)(1+z)+\alpha(a-c)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-d=\frac{(b-d)(1+z)+\alpha(a-d)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},$$

so dass wenn wieder α so bestimmt wird aus

$$(b-c)(b-d)-\alpha^2(a-c)(a-d)=0,\ \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},$$

man zugleich beachtet, dass dann

$$(b-c)(b-d)+\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)$$
$$=\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$
$$(b-c)(b-d)-\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)=$$
$$-\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$

und man setzt:

$$e=\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}}{\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}},$$

man haben wird:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=-\alpha(b-a)^2(1-z^2)\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2(1-e^2z^2)[1+\alpha+(1-\alpha)z]^{-4},$$

und da auch

$$e=\frac{(d-c)(b-a)}{\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2},$$

so erhält man jetzt folgendes Schema:

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},\ e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(c-b)(d-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(c-b)(d-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(d-c)(b-a)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z)}}.$$

Dabei liegt z immer zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

3) x liege zwischen b und c. Jetzt muss E positiv seyn und man erhält ganz in derselben Weise:

---

nehmen, so muss $\frac{1-z}{1+z}>0$ seyn. Dazu gehört aber, dass z zwischen -1 und $+1$ liege. Für $x=-\infty$ ist $\frac{x-a}{x-d}=1$, also $\alpha\frac{1-z}{1+z}=1$, $z=-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, für $x=a$, aber $z=1$; für $x=d$ ist $\frac{x-a}{x-d}=\infty$, also $z=-1$, für $x=\infty$ wieder $z=-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Auch ist $e<1$.

$$\frac{c-x}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(d-c)(c-a)}{(d-b)(b-a)}},\ e=\frac{\sqrt{(d-b)(c-a)}-\sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(d-b)(c-a)}+\sqrt{(d-c)(b-a)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

z zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

4) x liege zwischen c und d. Jetzt muss $E<0$ seyn und man hat:

$$\frac{d-x}{x-c}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}},\ e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(d-a)(c-b)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(d-a)(c-b)}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(b-a)(d-c)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

II. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ hat nur zwei reelle Wurzeln: $a<b$, und zwei imaginäre: $m\pm ni$, so dass

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=E(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2],$$

wo natürlich $n^2>0$. Man hat nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $x<a$ oder $>b$, so ist $E>0$, und man setze wieder

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ x=\frac{a-\alpha b+(a+\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so ist

$$(x-m)^2+n^2=\frac{[a-\alpha b-m+m\alpha+(a+\alpha b-m-m\alpha)z]^2+n^2[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so dass wenn α aus der Gleichung

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)(a+\alpha b-m-m\alpha)+n^2(1-\alpha^2)=0$$

bestimmt wird, aus der folgt

$$\alpha^2=\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2},$$

und man zur Abkürzung setzt:

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)^2+n^2(1-\alpha)^2=\beta^2,\ (a+\alpha b-m-m\alpha)^2+n^2(1+\alpha)^2=\gamma^2,$$

man hat

$$(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2]=\frac{\alpha(b-a)^2(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^4},$$

so dass also hier:

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2}},\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

$$=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}},$$

z zwischen -1 und $+1$.

2) x liege zwischen a und b. Ganz wie so eben hat man, da jetzt $E<0$:

17 *

$$\frac{b-x}{x-a} = \alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \sqrt{\frac{(b-m)^2+n^2}{(a-m)^2+n^2}},\ \beta^2 = (b+\alpha a - m - m\alpha)^2 + n^2(1+\alpha)^2,$$
$$\gamma^2 = (b-\alpha a - m + m\alpha)^2 + n^2(1-\alpha)^2,$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}}.$$

III. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ habe die vier imaginären Wurzeln: $m \pm ni$, $m' \pm n'i$, so dass

$$A+Bx-Cx^2+Dx^3+Ex^4 = E[(x-m)^2+n^2][(x-m')^2+n'^2],\ E>0.$$

Man setze

$$\frac{x-m}{n} = \frac{1+\alpha z}{\alpha - z},\ x = \frac{n(1+\alpha z)+m(\alpha - z)}{\alpha - z},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{n(1+\alpha^2)}{(\alpha - z)^2},$$

so ist

$$(x-m)^2+n^2 = \frac{n^2[(\alpha-z)^2+(1+\alpha z)^2]}{(\alpha-z)^2} = \frac{n^2(1+\alpha^2)(1+z^2)}{(\alpha-z)^2},$$
$$(x-m')^2+n'^2 = \frac{[n+m\alpha-m'\alpha+(m'+n\alpha-m)z]^2+n'^2(\alpha-z)^2}{(\alpha-z)^2},$$

so dass, wenn α aus der Gleichung

$$(n+m\alpha-m'\alpha)(m'+n\alpha-m)-n'^2\alpha = 0$$

bestimmt wird, man hat

$$(x-m')^2+n'^2 = \frac{\beta^2+\gamma^2 z^2}{(\alpha-z)^2},\ \beta^2 = (n+m\alpha-m'\alpha)^2+n'^2\alpha^2,\ \gamma^2 = (m'+n\alpha-m)^2+n'^2.$$

Was α anbelangt, so gibt obige Gleichung

$$\alpha = \frac{n'^2+(m-m')^2-n^2+\sqrt{4n^2(m-m')^2+[n'^2+(m-m')^2-n^2]^2}}{2n(m-m')}.$$

Setzt man nun die angeführten Werthe ein, so ergibt sich (wo die Wurzelgrösse positiv zu vehmen ist):

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}}.$$

Was β^2 und γ^2 anbelangt, so ist

$$\beta^2-\gamma^2 = [n^2-(m-m')^2-n'^2](1-\alpha^2)+4n(m-m')\alpha = [n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)$$
$$+2[n'^2+(m-m')^2-n^2]\alpha^2+4n(m-m')\alpha = [n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)+$$
$$2n(m-m')\alpha(\alpha^2-1)+4n(m-m')\alpha^* = [n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)+2n(m-m')\times$$
$$\alpha(1+\alpha^2) = (1+\alpha^2)[n^2-(m-m')^2-n'^2+2n(m-m')\alpha].$$

Nun ist aber $1+\alpha^2>0$; ferner, wenn man obigen Werth von α einsetzt:

---

* Die Gleichung, welche α bestimmt, ist

$$[n^2-(m-m')^2-n'^2]\alpha+n(m-m')\alpha^2-(m-m')n = 0,$$

woraus folgt

$$[n'^2+(m-m')^2-n^2]\ \alpha = n(m-m')(\alpha^2-1),$$
$$[n'^2+(m-m')^2-n^2]\alpha^2 = n(m-m')\alpha(\alpha^2-1).$$

$$n^2 - (m-m')^2 - n'^2 + 2n(m-m')\alpha = \sqrt{4n^2(m-m')^2 + [n'^2 + (m-m')^2 - n^2]^2},$$

also auch positiv, mithin $\beta^2 - \gamma^2 > 0$, d. h. $\beta^2 > \gamma^2$.

$E = 0$, mithin vorgelegt $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}}$.

Man wird leicht beachten, dass es im Vorstehenden in Wahrheit nur darauf ankam, die Integrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\pm(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{\pm(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2]}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{[(x-m)^2+n^2][(x-m')^2+n'^2]}}$$

umzuformen. Ferner ist klar, dass wenn man in dem Ausdruck

$$E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

setzt $E = \varepsilon$, $a = -\frac{1}{\varepsilon}$ und dann ε zu Null werden lässt, derselbe zu

$$(\varepsilon x + 1)(x-b)(x-c)(x-d) = (x-b)(x-c)(x-d)$$

wird. Je nachdem nun die Wurzeln von $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$ beschaffen sind, wird man haben

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = D(x-b)(x-c)(x-d) \text{ oder } = D(x-b)[(x-m)^2+n^2],$$

und man wird für $E = \varepsilon$ und $a = -\frac{1}{\varepsilon}$ diese Grössen, in denen D weggelassen ist, unmittelbar aus dem Früheren erhalten, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt. Daraus folgt nun leicht:

IV. Die Gleichung $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$ habe drei reelle Wurzeln: $b < c < d$, so dass

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = D(x-b)(x-c)(x-d).$$

Dabei sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) x sey immer grösser als d, so dass $D > 0$. Setzt man in I 1): $E = \varepsilon$, $a = -\frac{1}{\varepsilon}$ und lässt dann $\varepsilon = 0$ werden, so ergibt sich das folgende Schema, wenn man statt des Faktors $x - a$ geradezu 1 setzt, oder statt α: $\frac{\alpha}{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{x-d} = \alpha\frac{1-z}{1+z}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{(d-b)(d-c)}}, \quad e = \frac{\sqrt{d-b}-\sqrt{d-c}}{\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}} = \frac{c-b}{[\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}]^2},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{D(c-b)}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

2) x sey kleiner als b, also $D < 0$. In derselben Weise erhält man aus den Formeln in I 2):

$$b - x = \alpha \frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \sqrt{(c-b)(d-b)},\ e = \frac{\sqrt{d-b} - \sqrt{c-b}}{\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}} = \frac{d-c}{[\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}]^2}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-D(d-c)}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z)^2)(1-e^2 z^2)}}.$$

3) x liege zwischen b und c, also $D > 0$. Aus den Formeln in I 3) folgt:

$$\frac{c-x}{x-b} = \alpha \frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \sqrt{\frac{d-c}{d-b}},\ e = \frac{\sqrt{d-b} - \sqrt{d-c}}{\sqrt{d-b} + \sqrt{d-c}} = \frac{c-b}{[\sqrt{d-b} + \sqrt{d-c}]^2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{D(c-b)}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2 z^2)}}.$$

4) x liege zwischen c und d, also $D < 0$. Aus I 4) folgt:

$$\frac{d-x}{x-c} = \alpha \frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \sqrt{\frac{d-b}{c-b}},\ e = \frac{\sqrt{d-b} - \sqrt{c-b}}{\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}} = \frac{d-c}{[\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}]^2},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-D(d-c)}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2 z^2)}}.$$

V. Die Gleichung $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$ habe nur eine reelle Wurzel b. Alsdann ist

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = D(x-b)\,[(x-m)^2 + n^2].$$

1) Sey $x > b$, also $D > 0$, so folgt aus II 1):

$$\frac{1}{x-b} = \alpha \frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{(b-m)^2 + n^2}},\ \beta^2 = 2[1 + \alpha(b-m)],\ \gamma^2 = 2[1 - \alpha(b-m)],$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{D}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2 + \gamma^2 z^2)}}.$$

2) $x < b$, also $D < 0$, wo nun aus II 2) folgt:

$$b - x = \alpha \frac{1-z}{1+z},\ \alpha = \sqrt{(b-m)^2 + n^2},\ \beta^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha(b-m),\ \gamma^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha(b-m),$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-D}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2 + \gamma^2 z^2)}}.$$

VI. Man kann sich leicht überzeugen, dass die in IV und V behandelten Fälle richtig gelöst sind, wenn man direkt substituirt, und wir wollen diess, um keinerlei Unklarheit zu verursachen, doch noch kurz andeuten.

1) $x = \frac{1+z}{\alpha(1-z)} + d,\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2}{\alpha(1-z)^2},\ x - b = \frac{1+z}{\alpha(1-z)} + d - b,\ x - c = \frac{1+z}{\alpha(1-z)} + d - c,$

$$D(x-b)(x-c)(x-d) = D\frac{[1 + \alpha(d-b) + (1 - \alpha(d-b))z][1 + \alpha(d-c) + (1 - \alpha(d-c))z](1+z)}{\alpha^3(1-z)^3}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} D[\sqrt{d-c} + \sqrt{d-b} + (\sqrt{d-c} - \sqrt{d-b})z][\sqrt{d-b} + \sqrt{d-c} \\ + (\sqrt{d-b} - \sqrt{d-c})z](1-z^2) \end{array}\right\}}{\sqrt{d-c}\sqrt{d-b}\,\alpha^3(1-z)^4}$$

$$= \frac{D(\sqrt{d-c} + \sqrt{d-b})^2(1-ez)(1+ez)(1-z^2)}{\sqrt{d-c}\sqrt{d-b}\,\alpha^3(1-z)^4} = \frac{D(c-b)(1-e^2z^2)(1-z^2)}{\alpha^2 e(1-z)^4}.$$

$$2)\quad x = b - \frac{\alpha(1-z)}{1+z};\ D(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$= -\frac{\alpha(1-z)\,[b-c-\alpha+(b-c+\alpha)z]\,[b-d-\alpha+(b-d+\alpha)z]}{(1+z)^3}$$

$$= -\frac{\left\{\begin{array}{l} D\alpha(1-z^2)\sqrt{c-b}\sqrt{d-b}\,[-\sqrt{c-b}-\sqrt{d-b}+(\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b})z] \\ \quad [-\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b}+(\sqrt{c-b}-\sqrt{d-b})z]\end{array}\right.}{(1+z)^4}$$

$$= -\frac{D\alpha^2(1-z^2)\,[\sqrt{c-b}+\sqrt{d-b}]^2(-1+ez)(-1-ez)}{(1+z)^4}$$

$$= -\frac{D\alpha^2(1-z^2)(1-e^2z^2)}{e(1+z)^4}(d-c),\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha}{(1+z)^2}.$$

$$3)\quad x = \frac{c+\alpha b+(c-\alpha b)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ (x-b)(x-c)(x-d)$$

$$= -\frac{\alpha(c-b)^3(1-z^2)\,[c-d+\alpha(b-d)+\{c-d-\alpha(b-d\}z]}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^3} =$$

$$\frac{\alpha(c-b)^3(1-z^2)\,[\alpha^2+\alpha+(\alpha^2-\alpha)z](d-b)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^3} = \frac{\alpha^2(c-b)^2(d-b)(1-z^2)\,[(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2z^2]}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4}$$

$$= \frac{\alpha^2(1+\alpha)^2(d-b)(c-b)^2(1-z^2)(1-e^2z^2)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4} = \frac{\alpha^2(c-b)^3(1-z^2)(1-e^2z^2)}{e\,[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha(c-b)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^2}.$$

4) Wie unter Nr. 3.

$$5)\quad x = \frac{1+z}{\alpha(1-z)}+b,\ (x-b)\,[(x-m)^2+n^2]$$

$$= \frac{(1+z)\,[(1+z+\alpha(b-m)(1-z))^2+n^2\alpha^2(1-z)^2]}{\alpha^3(1-z)^3}$$

$$= \frac{(1-z^2)\,[(1+z)^2+2\alpha(b-m)(1-z^2)+(1-z)^2]}{\alpha^3(1-z)^4} = \frac{(1-z^2)\,[\beta^2+\gamma^2z^2]}{\alpha^3(1-z)^4},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2}{\alpha(1-z)^2}.$$

$$6)\quad x = b-\frac{\alpha(1-z)}{1+z},\ (x-b)\,[(x-m)^2+n^2] = -\frac{\alpha(1-z^2)\,[\beta^2+\gamma^2z^2]}{(1+z)^4},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha}{(1-z)^2}.$$

VII. Hieraus ergibt sich, dass das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$, so wie $\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ immer auf eine der drei Formen

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\ e^2<1;\ \int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}};\ \int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}}\ (\beta^2>\gamma^2),$$

zurückgeführt werden kann. Die zwei letzten kann man dadurch, dass man β^2 als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzt, d. h. $\beta^2+\gamma^2z^2=\beta^2\left(1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}z^2\right)$ schreibt, noch etwas vereinfachen, so dass man schliesslich nur die Integrale

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\quad \int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}},\quad \int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+e^2z^2)}},$$

in denen $e^2 < 1$ ist, zu betrachten hat. Dabei liegt für die zwei ersten z zwischen -1 und $+1$, d. h. da dieselben nur z^2 enthalten, z zwischen 0 und 1 (§. 42, VII), für das letzte kann z alle möglichen Werthe haben. Um nun diese Integrale auf elliptische zu reduziren, setze man in denselben bezüglich

$$z = \sin\varphi,\ z = \cos\varphi,\ z = tg\,\varphi$$

und hat

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}} = \int\frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}} = \int\frac{-\sin\varphi\,\partial\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}} = -\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1+k^2-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+e^2z^2)}} = \int\frac{\partial\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{(1+tg^2\varphi)(1+e^2tg^2\varphi)}} = \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+e^2\sin^2\varphi}} =$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\varphi}},$$

welche drei Integrale, in denen φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, zu den elliptischen Integralen der ersten Art gehören, da e^2, $\frac{k^2}{1+k^2}$, $1-e^2$ kleiner als 1 und positiv sind.

§. 156.

Reduktion des Integrals $\int\frac{f(x)\,\partial x}{\sqrt{A+Bx+..+Ex^4}}$.

I. Gesetzt man habe das Integral

$$\int\frac{f(x)\,\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}, \qquad (a)$$

in welchem E auch $= 0$ seyn kann, und wo $f(x)$ eine rationale Funktion von x ist von der Form der in §. 29 betrachteten Brüche, also

$$f(x) = \frac{a+bx+cx^2+\ldots.}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots.},$$

so ersetze man x durch z, wie es §. 155 verlangen würde, damit $\sqrt{A+..+Ex^4}$ auf die Form $\sqrt{(1\pm z^2)(1\pm e^2z^2)}$ reduzirt werde, so wird $f(x)$ immer noch eine rationale gebrochene Funktion von z seyn; alsdann ersetze man z durch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $tg\,\varphi$, je nachdem es $\sqrt{(1\pm z^2)(1\pm e^2z^2)}$ verlangt, so wird das Integral (a) auf das folgende reduzirt seyn:

$$\int\frac{F\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

wo F eine rationale gebrochene Funktion von *sin* φ, oder *cos* φ, oder *tg* φ ist. Zerfällt man dieselbe nach §. 29 in Partialbrüche, so wird man die Integrale

$$\int\frac{\sin^n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\cos^n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{tg^n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\int\frac{(A\sin\varphi+B)\,\partial\varphi}{[(\sin\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int\frac{(A\cos\varphi+B)\,\partial\varphi}{[(\cos\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(A\,tg\,\varphi+C)\,\partial\varphi}{[(tg\,\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\quad (b)$$

zu ermitteln haben, und wenn man alle diese Integrale zu bestimmen im Stande ist, so darf offenbar die allgemeine Aufgabe, das Integral (a) zu bestimmen, als vollständig erledigt angesehen werden. Was nun diese Integrale anbelangt, in denen φ nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so sind durch die Formeln (k) des §. 154 die ersten drei bereits bestimmt, während die Formeln (k′) desselben §. die drei anderen bestimmen würden wenn $a=0$ wäre.

II. Um für den allgemeinen Fall, in dem a nicht $=0$ ist, Reduktionsformeln aufzustellen, beachten wir dass

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin\varphi)^{n-1}}\right]=\frac{1}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}[n-1+a(1+e^2)\sin\varphi$$
$$-(n-2)(1+e^2)\sin^2\varphi-2ae^2\sin^3\varphi+(n-3)e^2\sin^4\varphi].$$

Man setze nun

$$n-1+a(1+e^2)\sin\varphi-(n-2)(1+e^2)\sin^2\varphi-2ae^2\sin^3\varphi+(n-3)e^2\sin^4\varphi=A$$
$$+B(a+\sin\varphi)+C(a+\sin\varphi)^2+D(a+\sin\varphi)^3+E(a+\sin\varphi)^4,$$

so erhält man, indem man die Koeffizienten derselben Potenzen von *sin* φ einander gleich setzt:

$$(n-3)e^2=E,\ -2ae^2=4aE+D,\ -(n-2)(1+e^2)=6a^2E+3aD+C,$$
$$a(1+e^2)=4a^3E+3a^2D+2aC+B,\ n-1=Ea^4+Da^3+Ca^2+Ba+A,$$

woraus

$$E=(n-3)e^2,\ D=-(4n-10)ae^2,\ C=(n-2)(6a^2e^2-e^2-1),$$
$$B=(2n-3)[1+e^2-2a^2e^2]a,\ A=(n-1)(1-a^2)(1-a^2e^2),$$

so dass also:

$$-\frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin\varphi)^{n-1}}=(n-1)(1-a^2)(1-a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(2n-3)a(1+e^2-2a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-2)(6a^2e^2-e^2-1)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\qquad (c)$$
$$+(10-4n)ae^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+(n-3)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

welche Formel eine Reduktionsformel für $\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ darbietet. Sie führt bei fortgesetzter Anwendung (bis zu $n=2$) schliesslich auf

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\sin\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\sin\varphi)^2\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von welchen Integralen die drei letzten bereits in §. 154 behandelt sind. Das erste gibt

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\frac{a-\sin\varphi}{a^2-\sin^2\varphi}=a\int\frac{\partial\varphi}{(a^2-\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{(a^2-\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen das erste zur dritten Gattung der elliptischen Integrale gehört, das zweite aber nach §. 32 integrirt werden kann ($\cos\varphi=x$ gesetzt).

III. Ganz in derselben Weise erhält man auch folgende Reduktionsformel:

$$\frac{\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\cos\varphi)^{n-1}}=-(n-3)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(4n-10)ae^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-2)(2e^2-1-6a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(2n-3)(1-2e^2+2a^2e^2)a\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-1)(1-a^2)(1-e^2+a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.\quad\text{(d)}$$

Diese Reduktionsformel, die noch für $n=2$ anwendbar ist, führt schliesslich auf die Integrale

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\cos\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\cos\varphi)^2\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen die drei letzten in §. 154 schon behandelt wurden, und

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{(a-\cos\varphi)\,\partial\varphi}{(a^2-\cos^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=a\int\frac{\partial\varphi}{(a^2-1+\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\int\frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{(a^2-\cos^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

wovon das erste zur dritten Gattung elliptischer Integrale gehört, das zweite nach §. 32 integrirt werden kann (wenn man $\sin\varphi=x$ setzt).

IV. Ferner hat man in derselben Weise:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+tg\,\varphi)^{n-1}\cos^2\varphi}=-(n-3)(1-e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+(4n-10)a(1-e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-(n-2)[2-e^2+6a^2(1-e^2)]\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+(2n-3)a[2-e^2+2a^2(1-e^2)]\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-(n-1)[1+a^2(1-e^2)](1+a^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)^{n}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \quad (e)$$

welche Formel (für $n=2$) schliesslich ausser den schon in §. 154 behandelten Integralen noch auf das Folgende führt:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\,\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{a-tg\,\varphi}{a^2-tg^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int\frac{a\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=a\int\frac{\cos^2\varphi}{a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen das letzte nach §. 32 integrirt werden kann ($\sin^2\varphi=x$), während

$$\int\frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{1-\sin^2\varphi}{a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{1}{1+a^2}\int\frac{\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{1+a^2}\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

und also auf elliptische Integrale der dritten und ersten Art zurückkommt.

V. Wir hätten nunmehr noch Reduktionsformeln für die drei letzten der Integrale in (b) aufzustellen. Wir können diess jedoch vermeiden, wenn wir in den drei vorhergehenden a auch imaginär seyn lassen, also bei der Zerfällung von $f(x)$ in Partialbrüche nur Nenner von der Form $(x+a)^n$ zulassen, wo a sowohl reell als imaginär seyn kann. Dann gelten natürlich dieselben Reduktionsformeln (c), (d), (e) noch, wenn auch a imaginär ist. Da die imaginären Wurzeln immer paarweise vorkommen, so wird schliesslich das Imaginäre immer wegfallen. Wendet man aber die Reduktionsformeln (c), (d), (e) an, so gelangt man zum Ende auf ein elliptisches Integral der dritten Art, in dem imaginäre Konstanten vorkommen, d. h. auf ein Integral der Form

$$\int\frac{\partial\varphi}{[1+(m+ni)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

mit dessen Bestimmung wir uns im folgenden §. beschäftigen wollen.

§. 157.

Bestimmung von $\Pi(\varphi, m+ni, e)$.

I. Man setze

$$x = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad \text{(a)}$$

so ergibt sich leicht

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)},$$

woraus, wenn β (wie α) eine noch beliebige Konstante:

$$\frac{1}{1+\beta x^2}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta(1-\sin^2\varphi)\sin^2\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

und hieraus, da für $x=0$ auch $\varphi=0$:

$$\int_0^\varphi \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int_0^x \frac{\partial x}{1+\beta x^2}, \qquad \text{(b)}$$

wo das letzte Integral in allen Fällen leicht bestimmt werden kann. *

II. Wir wollen nun die Grössen α, β, nebst der weitern γ so bestimmen, dass identisch

$$(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi) = (1+a\sin^2\varphi)(1+b\sin^2\varphi)(1+\gamma\sin^2\varphi),$$

wo wir a und b als bekannt (d. h. beliebig gewählt) betrachten. Setzt man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\sin^2\varphi$ beiderseitig gleich, so ergibt sich:

$$ab\gamma = -\alpha^2 e^2,\quad (a+b)\gamma+ab = -\beta+\alpha^2-2\alpha e^2,\quad a+b+\gamma = 2\alpha-e^2+\beta.$$

Hieraus:

$$\gamma = -\frac{\alpha^2 e^2}{ab},\quad \beta = \alpha^2-2\alpha e^2-ab+\alpha^2 e^2\frac{a+b}{ab},$$

und wenn man diese Werthe in die dritte Gleichung einsetzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^2[ab+(a+b)e^2+e^2]+2\alpha(1-e^2)ab = ab(a+b+ab+e^2),\\
&\alpha = \frac{-ab(1-e^2)\pm\sqrt{ab(1+a)(1+b)(b+e^2)(a+e^2)}}{ab+(a+b)e^2+e^2},\\
&\gamma = -\frac{\alpha^2 e^2}{ab},\quad \beta = a+b+\gamma+e^2-2\alpha,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

aus welchen Gleichungen zwei Werthe von α, und also auch von β und γ folgen.

Man setze nun:

---

* Natürlich muss die obere Gränze x so liegen, dass der Nenner $1+\beta x^2$ nicht Null werden kann von $x=0$ bis zu jenem Werthe.

$$\frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}=\frac{1}{\alpha}+\frac{A}{1+a\sin^2\varphi}+\frac{B}{1+b\sin^2\varphi}+\frac{C}{1+\gamma\sin^2\varphi},$$

so erhält man zur Bestimmung von A, B, C:

$$1+\alpha(A+B+C)=\alpha,\ a+b+\gamma+A\alpha(b+\gamma)+B\alpha(a+\gamma)+C\alpha(a+b)=-(2+\alpha)\alpha,$$
$$(a+b)\gamma+ab+A\alpha b\gamma+B\alpha a\gamma+C\alpha ab=(1+2\alpha)\alpha e^2,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=\dfrac{\alpha-1}{\alpha},\ A(b+\gamma)+B(a+\gamma)+C(a+b)=-\dfrac{2\alpha+\alpha^2+a+b+\gamma}{\alpha}, \\ Ab\gamma+Ba\gamma+Cab=\dfrac{(1+2\alpha)\alpha e^2-(ab+a\gamma+b\gamma)}{\alpha}, \end{array}\right\} \quad (d)$$

woraus nun A, B, C leicht folgen.

Setzt man in (b) ein so erhält man:

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi,e)+A\Pi(\varphi,a,e)+B\Pi(\varphi,b,e)+C\Pi(\varphi,\gamma,e)=\int_0^x\frac{\partial z}{1+\beta z^2}, \quad (e)$$

in welch wichtiger Formel α, β, γ durch (c); A, B, C durch (d); x durch (a) gegeben sind. Da die Konstanten doppelwerthig sind so umfasst diese Formel eigentlich zwei.

III. Man setze nun in der Formel (e):

$$a=r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon),\ b=r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon),$$

wo r und ε konstante Zahlen ($r>0$), so ist

$$ab=r^2,\ a+b=2r\cos\varepsilon,\ (1+a)(1+b)=1+2r\cos\varepsilon+r^2,$$
$$(a+e^2)(b+e^2)=e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2,$$

und mithin:

$$\alpha=\frac{-r^2(1-e^2)\pm r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2},\ \gamma=-\frac{e^2\alpha^2}{r^2},$$
$$\beta=2r\cos\varepsilon+e^2-2\alpha-\frac{e^2\alpha^2}{r^2},$$

so dass α, β, γ reell sind.

Setzt man, um die beiderlei Werthe zu unterscheiden, die einen mit, die andern ohne Zeiger, so erhält man aus (e) die beiden Formen:

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi,e)+A\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon),e]+B\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon),e]+C\Pi(\varphi,\gamma,e)$$
$$=\int_0^x\frac{\partial z}{1+\beta z^2}, \quad (f)$$

wo

$$\alpha=\frac{-r^2(1-e^2)+r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2},\ \gamma=-\frac{\alpha^2e^2}{r^2}.$$
$$\beta=2r\cos\varepsilon+e^2-2\alpha-\frac{e^2\alpha^2}{r^2};\ A+B+C=\frac{\alpha-1}{\alpha},$$

$$A[\gamma+r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon)]+B[\gamma+r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)]+2Cr\cos\varepsilon=-\frac{2\alpha+\alpha^2+2r\cos\varepsilon+\gamma}{\alpha},$$

$$A\gamma r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon)+B\gamma r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)+Cr^2=\frac{(1+2\alpha)\alpha e^2-(r^2+2r\gamma\cos\varepsilon)}{\alpha},$$

$$x=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Ferner

$$\frac{1}{\alpha'}F(\varphi,e)+A'\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon),e]+B'\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon),e]+C'\Pi(\varphi,\gamma',e)$$
$$=\int_0^{x'}\frac{\partial z}{1+\beta' z^2}, \qquad \text{(f')}$$

wo

$$\alpha'=\frac{-r^2(1-e^2)-r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2},\quad \gamma'=-\frac{\alpha'^2e^2}{r^2},$$

$$\beta'=2r\cos\varepsilon+e^2-2\alpha'-\frac{e^2\alpha'^2}{r^2};\quad A'+B'+C'=\frac{\alpha'-1}{\alpha'},$$

$$A'[\gamma'+r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon)]+B'[\gamma'+r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)]+2C'r\cos\varepsilon=-\frac{2\alpha'+\alpha'^2+2r\cos\varepsilon+\gamma'}{\alpha'},$$

$$A'\gamma'r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon)+B'\gamma'r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)+C'r^2=\frac{(1+2\alpha')\alpha'e^2-(r^2+2r\gamma'\cos\varepsilon)}{\alpha'},$$

$$x'=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha'\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Aus den beiden Gleichungen (f) und (f') lassen sich die elliptischen Integrale $\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon),e]$, $\Pi[\varphi,r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon),e]$ leicht ableiten, und damit ist dann die gestellte Aufgabe erledigt.

IV. Wir haben bereits in der Note zu I darauf aufmerksam gemacht, dass $1+\beta x^2$ nicht Null werden darf. Nun ist aber aus den (c) leicht zu schliessen, dass

$$(1+a)(1+b)(1+\gamma)=(1-e^2)(1+\alpha)^2,$$

was immer a, b seyn mögen. Sind nun a und b wie in III bestimmt, so ist $(1+a)(1+b)$ positiv und α reell, demnach auch $(1+a)(1+b)(1+\gamma)$ positiv, d. h. auch $1+\gamma$ positiv. Mithin sind die Werthe γ und γ' in (f) und (f'), die negativ sind, nie unter -1.

Die Grösse $(1+a\sin^2\varphi)(1+b\sin^2\varphi)$ ist positiv, wenn a und b die Werthe in III haben; $1+\gamma\sin^2\varphi$ ist, da γ nie unter -1 sinkt, ebenfalls positiv, also ist

$(1+a\sin^2\varphi)(1+b\sin^2\varphi)(1+\gamma\sin^2\varphi)$ ebenfalls immer positiv.

Diese Grösse ist aber nach II gleich

$$(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)\left[1+\beta\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)}\right]$$
$$=(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)[1+\beta x^2],$$

so dass also $1+\beta x^2$ nothwendig immer positiv ist (und eben so $1+\beta' x^2$).

Dieser Beweis setzt allerdings voraus, dass $1+\alpha\sin^2\varphi$ nicht Null werden kann, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht. Diess können wir jedoch nicht kurzweg voraussetzen, doch berührt diess einen einzigen Werth von φ, und sonst immer ist $1+\beta x^2$ positiv.

Es kann aber eine andere Schwierigkeit auftauchen. Gesetzt β (oder β') sey positiv, so ist

$\int \frac{\partial x}{1+\beta x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} arc(tg = x\sqrt{\beta})$. Für $\varphi = 0$ ist $x = 0$, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ aber auch $x = 0$, und es fragt sich also, ob wenn man in (f) [oder (f')] $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, wirklich die zweite Seite Null wäre ($\beta > 0$ vorausgesetzt). — Ist x, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, niemals unendlich geworden, d. h. ist die Gleichung $1 + \alpha \sin^2\varphi = 0$ unmöglich, so muss man diess zugeben; ist aber die Gleichung $1 + \alpha \sin^2\varphi = 0$ möglich, so springt x bei dem Werthe φ, gegeben durch diese Gleichung, von $+\infty$ zu $-\infty$, und es ist also die Grösse $\left(\text{für } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_0^x \frac{\partial z}{1+\beta z^2} = \int_0^\infty \frac{\partial z}{1+\beta z^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial z}{1+\beta z^2} = 2\int_0^\infty \frac{\partial z}{1+\beta z^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$$

zu setzen.

Man kann diess auch daraus entnehmen, dass die (b) eigentlich gibt:

$$\frac{1}{\alpha}\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + A\int \frac{\partial\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + B\int \frac{\partial\varphi}{(1+b\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+ C\int \frac{\partial\varphi}{(1+\gamma\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{\partial x}{1+\beta x^2} + \mu,$$

wo μ eine willkürliche Konstante, und $x = \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$.

Gemäss §. 151, I heisst diese Gleichung auch:

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi, e) + A\Pi(\varphi, a, e) + B\Pi(\varphi, b, e) + C\Pi(\varphi, \gamma, e) = \int \frac{\partial x}{1+\beta x^2} + \mu,$$

und ist richtig für alle φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Setzt man hier $\varphi = 0$ so ist unzweifelhaft $x = 0$; für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eben so $x = 0$. Allein $arc(tg = x\sqrt{\beta})$ verläuft nur dann stetig von 0 zu 0 (indem $x\sqrt{\beta}$ anfänglich steigt und dann fällt), wenn x nicht ∞ wird. In letzterem Falle müsste $arc(tg = x\sqrt{\beta})$ als von 0 bis π verlaufend angesehen werden (vergl. §. 43, vorläufige Bemerkung). Eine Theilung des bestimmten Integrals wird den Schwierigkeiten jedoch immer ein Ende machen. (Vergl. den Zusatz am Schlusse des Bandes.)

Zweite Auflösung.

V. Man kann obige Formeln auch in einer Weise darstellen, dass nur reelle Grössen zu bestimmen sind. Setzt man

$$\Pi[\varphi, r(\cos s + i\sin s), e] = P + Qi, \text{ also } \Pi[\varphi, r(\cos s - i\sin s), e] = P - Qi,$$

so ist die (f):

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi, e) + (A+B)P + (A-B)iQ + C\Pi(\varphi, \gamma, e) = \int_0^x \frac{\partial z}{1+\beta z^2}.$$

Nun ist aber identisch

$$(A-B)i = \frac{A r\sin s - B r\sin s}{r\sin s}i = -\frac{B r(\cos s + i\sin s) + A r(\cos s - i\sin s)}{r\sin s}$$
$$+ (A+B)\cot g\, s,$$

so dass wenn

$$A+B=f,\ B\,r(\cos s+i\sin s)+A\,r(\cos s-i\sin s)=g,$$

man hat:

$$f+C=\frac{\alpha-1}{\alpha},\ g+f\gamma+2Cr\cos s=-\frac{2\alpha+\alpha^2+2r\cos s+\gamma}{\alpha},$$

$$g\gamma+Cr^2=\frac{(1+2\alpha)\alpha e^2-(r^2+2r\gamma\cos s)}{\alpha}, \qquad (g)$$

und also f, g, C reell ausfallen. Dann ist

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi,e)+fP-\frac{g}{r\sin s}Q+f\,cotg\,s\,Q+C\Pi(\varphi,\gamma,e)=\int_0^x\frac{\partial z}{1+\beta z^2}.$$

Man hat demnach zur Bestimmung von P und Q:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\alpha}F(\varphi,e)+fP-\frac{g-fr\cos s}{r\sin s}Q+C\Pi(\varphi,\gamma,e)=\int_0^x\frac{\partial z}{1+\beta z^2},\\ \frac{1}{\alpha'}F(\varphi,e)+f'P-\frac{g'-f'r\cos s}{r\sin s}Q+C'\Pi(\varphi,\gamma',e)=\int_0^{x'}\frac{\partial z}{1+\beta' z^2},\end{array}\right\}\qquad (h)$$

wo α, α', β, β', γ, γ' die Werthe wie in III haben; f, f', g, g', C, C' aber durch die Gleichungen (g) und

$$f'+C'=\frac{\alpha'-1}{\alpha'},\ g'+f'\gamma'+2C'r\cos s=-\frac{(2+\alpha')\alpha'+2r\cos s+\gamma'}{\alpha'},$$

$$g'\gamma'+C'r^2=\frac{(1+2\alpha')\alpha'e^2-(r^2+2r\gamma'\cos s)}{\alpha'}$$

bestimmt sind.

§. 158.

Die Aditionstheoreme für die elliptischen Integrale.

I. Wir haben in §. 101, III gesehen, dass der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-e^2y^2)}{(1-x^2)(1-e^2x^2)}},\ e^2<1, \qquad (a)$$

genügt wird durch

$$x^2+y^2+2xy\sqrt{(1-k^2)(1-e^2k^2)}-k^2e^2x^2y^2=k^2, \qquad (b)$$

wo k die willkürliche Konstante und vorausgesetzt ist, dass für $x=0:y=+k$, und für $y=0:x=+k$ sey. Die Gleichung (a) liefert nach §. 91 aber sofort:

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}+\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}=C$$

d. h.

$$\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}}+\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}=C,$$

wo C die willkürliche Konstante. Da für $x=0:y=+k$, für $y=0:x=+k$, so muss $C=\int_0^k\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}$, seyn, so dass also

$$\int_0^y\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}+\int_0^x\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}=\int_0^k\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}, \qquad (c)$$

wo x, y, k durch (b) zusammen hängen. Setzt man $z = \sin\mu$, bestimmt ferner φ, ψ aus $\sin\varphi = x$, $\sin\psi = y$, wo, da x und y positiv und unter 1 sind, φ und ψ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen müssen, so ist

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}} + \int_0^\psi \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}} = \int_0^\omega \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}}, \quad (c')$$

wo $k = \sin\omega$, und es sich fragen wird wie ω liegt. Für $\varphi = \psi = 0$ ist die erste Seite Null, also muss $\omega = 0$ seyn; für $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$ ist die erste Seite

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}},$$

also muss dann $\omega = \pi$ seyn, da (§. 42, VII)

$$\int_0^\pi \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-e^2\sin^2\mu}}.$$

Demnach geht ω von 0 bis π.

In §. 101, III haben wir schon gezeigt, dass

$$x - k^2e^2xy^2 + y\sqrt{(1-k^2)(1-e^2k^2)} = k\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)},$$
$$x - k^2e^2yx^2 + x\sqrt{(1-k^2)(1-e^2k^2)} = k\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit x, die zweite mit y, so ergibt sich durch Subtraktion:

$$x^2 - y^2 = k\left[x\sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)} - y\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}\right],$$

so dass wenn $\sin\varphi = x$, $\sin\psi = y$, $\sin\omega = k$, und φ, ψ unter $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\omega = \frac{\sin^2\varphi - \sin^2\psi}{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} - \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Multiplizirt man hier Zähler und Nenner mit

$$\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} + \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi},$$

und beachtet, dass

$$\sin^2\varphi\cos^2\psi(1-e^2\sin^2\psi) - \sin^2\psi\cos^2\varphi(1-e^2\sin^2\varphi) = \sin^2\varphi(1-\sin^2\psi)(1-e^2\sin^2\psi)$$
$$- \sin^2\psi(1-\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\varphi) = (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)(1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\psi),$$

so ergibt sich:

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} + \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Daraus folgt

$$\cos^2\omega = 1 - \sin^2\omega = \left(\frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\psi)}}{1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\right)^2.$$

Da für $\varphi = \psi = 0$ die eingeklammerte Grösse $= 1$, für $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$ aber $-\frac{\sqrt{(1-e^2)(1-e^2)}}{1-e^2} = -1$ ist, und $\cos\omega$ dieselben Werthe hat, so ist

$$\cos\omega = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\psi)}}{1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}. \qquad \text{(d)}$$

Bestimmt man hieraus den zwischen 0 und π liegenden Winkel ω, so besteht für φ, ψ, ω die Gleichung (c′), d. h.

$$F(\varphi, e) + F(\psi, e) = F(\omega, e). \qquad \text{(e)}$$

Diess ist das Additionstheorem für die elliptischen Integrale der ersten Art.

II. Die Gleichung (c′) heisst auch

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0.$$

Aus dem in der Note zu §. 101, III gegebenen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ folgt leicht:

$$y + x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{k\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}$$

und

$$\frac{\sqrt{1-e^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - e^2k\left(y + x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - e^2\frac{y^2-x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)(1-e^2x^2)}}\Big[\sqrt{1-e^2y^2}\sqrt{1-e^2x^2}\sqrt{1-x^2}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+ \sqrt{1-y^2}(1-e^2x^2) - e^2(y^2-x^2)\sqrt{1-y^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-e^2x^2)}}\left[\sqrt{1-e^2y^2}\sqrt{1-e^2x^2}\sqrt{1-x^2}\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{1-y^2}(1-e^2y^2)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2y^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-e^2x^2)}}\left[\sqrt{(1-e^2x^2)}\sqrt{1-x^2}\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{(1-y^2)(1-e^2y^2)}\right].$$

Da nun der bereits angeführte Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ letztere Grösse zu Null macht, so macht er auch

$$\frac{\sqrt{1-e^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - e^2k\left(y + x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{\sqrt{1-e^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - e^2k\frac{d}{dx}(xy) = 0.$$

Dieser Differentialgleichung wird also durch die Gleichung (a) in §. 101, III ebenfalls genügt.

Setzt man $y = \sin\psi$, $x = \sin\varphi$, so gibt sie integrirt:

$$E(\psi, e) + E(\varphi, e) - e^2k\sin\varphi\sin\psi = C,$$

wo nun weil zugleich $\varphi = 0$, $\psi = \omega$, seyn wird: $C = E(\omega, e)$, so dass

$$E(\varphi, e) + E(\psi, e) - e^2 \sin\omega \sin\varphi \sin\psi = E(\omega, e), \qquad (f)$$

worin das Additionstheorem für die zweite Art besteht. *

§. 159.

Beziehungen zwischen den elliptischen Integralen.

I. Zwischen den elliptischen Integralen der drei Arten bestehen Beziehungen, die wir schliesslich, ehe wir zu Anwendungen übergehen, noch ableiten wollen.

Zunächst aber wollen wir bemerken, dass man ganz in derselben Weise wie in §. 156 folgende Reduktionsformel beweisen kann:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin^2\varphi)^{n-1}} = (2n-2)[a+a^2(1+e^2)+a^3e^2]\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-(2n-3)[1+2a(1+e^2)+3a^2e^2]\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+2(n-2)(3ae^2+1+e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-(2n-5)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad (a)$$

Setzt man hier $n=2$, $\frac{1}{a}$ für a und dividirt beiderseitig durch a, so erhält man:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1+a\sin^2\varphi} = 2\frac{a^2+a(1+e^2)+e^2}{a^2}\int\frac{\partial\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{a^2+2a(1+e^2)+3e^2}{a^2}\int\frac{\partial\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + \frac{e^2}{a^2}\int\frac{(1+a\sin^2\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad (a')$$

---

* Für $\omega = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ist

$$E(\omega, e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}-\alpha, e\right)$$
$$= 2E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}-\alpha, e\right).$$

Eben so

$$F(\omega, e) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-\alpha, e\right).$$

Aus dieser Formel folgt nun, da die erste Seite Null ist für $\varphi=0$, dass man die Integrale als bestimmte innerhalb der Gränzen Null und φ ansehen kann, wodurch etwa für $a=-e^2 \sin^2\alpha$:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}=2\frac{\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\partial\varphi,$$

d. h.

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}=\frac{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{e^2\sin^4\alpha}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^4\alpha}[F(\varphi,e)-\sin^2\alpha F(\varphi,e)+\sin^2\alpha E(\varphi,e)], \quad (\S.\ 154,\ II)$$

woraus

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{e^2\sin^4\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$
$$+\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-\frac{1}{2}\frac{F(\varphi,e)}{1-e^2\sin^2\alpha}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{tg^2\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha}E(\varphi,e).$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=-\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi\frac{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\partial\varphi$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$
$$+\frac{1-e^2\sin^2\alpha+e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)$$
$$-\frac{F(\varphi,e)+tg^2\alpha E(\varphi,e)}{2e^2\sin^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}.$$

Eben so ist

$$\int_0^\varphi\frac{e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-F(\varphi,e)+\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e).$$

II. Daraus ergibt sich

$$2\,e^2 \cos^2\alpha \sqrt{1-e^2\sin^2\alpha} \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\frac{1-e^2\sin^2\alpha+e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$=\frac{e^2\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}+\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,F(\varphi,e)-\frac{E(\varphi,e)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

d. h., wie leicht ersichtlich:

$$-\left(\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}+\frac{e^2\cos^2\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right)[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$+\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\operatorname{cotg}\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right]$$

$$+\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,F(\varphi,e)-\frac{E(\varphi,e)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}.$$

Die erste Seite ist aber =

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\left\{\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)\right\}\right],$$

so dass, wenn man noch α integrirt:

$$\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$=\operatorname{cotg}\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\left[\int\frac{\partial\alpha}{(1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}-\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right]$$

$$+F(\varphi,e)\int\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,\partial\alpha-E(\varphi,e)\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}+C,$$

wo C von α unabhängig ist. Nun ist aber die erste Seite Null für $\alpha=0$, indem

$$\frac{1}{\sin\alpha}[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]=e^2\sin\alpha\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

ist, so dass wenn man die Integrale als bestimmte zwischen den Gränzen 0 und α nimmt:

$$\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]=\operatorname{cotg}\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,[\Pi(\alpha,-e^2\sin^2\varphi,e)$$
$$-F(\alpha,e)]+F(\varphi,e)\,E(\alpha,e)-E(\varphi,e)\,F(\alpha,e). \qquad \text{(b)}$$

Diese interessante Formel lehrt die Grössen $\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)$, $\Pi(\alpha,-e^2\sin^2\varphi,e)$ durch einander auszudrücken, und kann namentlich bei Berechnung der Integrale dritter Art von grossem Nutzen seyn.

Da selbst, wenn α und φ bis $\frac{\pi}{2}$ gehen, keines der in (b) vorkommenden bestimmten Integrale unzulässig wird (dadurch, dass die Grösse unter dem Integral-

zeichen unendlich würde), so kann man diese Formel für α und φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ anwenden.

III. Aus der Formel (a′) folgt für $a = -(\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha) = -k$:

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{[1-k\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-k\sin^2\varphi)}$$

$$+\frac{(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+e^4\sin^2\alpha-e^2}{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\Pi(\varphi,-k,e)$$

$$+\frac{e^2}{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left[F(\varphi,e)-\frac{k}{e^2}F(\varphi,e)+\frac{k}{e^2}E(\varphi,e)\right].$$

Da aber

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{k}\int\frac{\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

so ergibt sich:

$$\frac{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{k}}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{\sqrt{k}}$$

$$-\frac{\sqrt{k}\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-k\sin^2\varphi}-\frac{(1-e^2)(e^2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)}{k\sqrt{k}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]$$

$$+F(\varphi,e)\sqrt{k},$$

d. h.

$$\frac{(1-e^2)(\cos^4\alpha-e^2\sin^4\alpha)}{(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]$$

$$-\frac{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{[\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}}}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}\left[\frac{1}{[1+(1-e^2)tg^2\varphi\sin^2\alpha]\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}-\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}\right]$$

$$+\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}-F(\varphi,e)\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha},$$

oder

$$(1-e^2)\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]\right\} = \text{wie so eben},$$

so dass, wenn man nach α (zwischen 0 und α) integrirt (also alle Grössen von $\alpha = 0$ an endlich voraussetzt):

$$\frac{(1-e^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)] = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}[\Pi(\alpha,(1-e^2)tg^2\varphi,\sqrt{1-e^2})$$

$$-\cos^2\varphi F(\alpha,\sqrt{1-e^2})]+[F(\varphi,e)-E(\varphi,e)]F(\alpha,\sqrt{1-e^2})-F(\varphi,e)E(\alpha,\sqrt{1-e^2}) \quad (b')$$

wo $k = \cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha = 1-(1-e^2)\sin^2\alpha$ ist (vergl. §. 152).

Da für $\alpha = 0 : k = 1$, und dann $\Pi(\varphi, -k, e) =$

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$= -\frac{e^2}{1-e^2}\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-e^2)\cos\varphi}$$

(§. 154), diese Grösse aber für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ unendlich wird, so lässt sich die Formel (b′) für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nicht kurzweg anwenden. Die elliptischen Integrale der beiden ersten Arten in (b′) bieten ohnehin keine Ausnahme dar; die der dritten Art sind

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{1-(\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \alpha}{[1+(1-e^2)\,tg^2\varphi\,\sin^2\alpha]\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}.$$

Da $1+(1-e^2)\,tg^2\varphi\,\sin^2\alpha$ nie Null wird, $1-(\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha)\sin^2\varphi$ nur Null wird, wenn $\alpha = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist auch bloss der Fall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in (b′) ausgeschlossen.

IV. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gibt die Formel (b):

$$\cot g\,\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -e^2\sin^2\alpha, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E(\alpha, e) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e), \qquad \text{(c)}$$

welche Gleichung dann für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ eine identische wird. Diese Gleichung drückt $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -e^2\sin^2\alpha, e\right)$ durch elliptische Integrale der zwei ersten Arten aus (§. 152, I, 1).

V. Die Formel (b′) ist nur für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und zugleich $\alpha = 0$ beanstandet. Da sie aber voraussetzt, man gehe von $\alpha = 0$ aus, so können wir sie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nicht brauchen. Setzen wir aber nur nicht $\alpha = 0$, so gelten die vorhergehenden Formeln immer für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so dass also

$$\frac{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{k}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$= -\frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{\sqrt{k}} - \frac{(1-e^2)\,(e^2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)}{k^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] + \sqrt{k}\,F\left(\frac{\pi}{2}, e\right).$$

$$\frac{(1-e^2)(-e^2 \sin^4\alpha + \cos^4\alpha)}{k^{\frac{3}{2}}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$

$$-\frac{2(1-e^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{k^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{\sqrt{k}} - \sqrt{k}\,F\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

$$(1-e^2)\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha},$$

also

$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$

$$=\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}$$

$$-F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha + C,$$

wo C von α unabhängig ist.* Setzt man hier $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ist $k = e^2$, also sicher die erste Seite Null, so dass

$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] = \left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right.$$

$$\left.-E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha,$$

d. h. da

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2\sin^2\alpha}} + \int_0^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2\sin^2\alpha}}$$

$$= -F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-e^2}\right) + F(\alpha, \sqrt{1-e^2}),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha = -E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-e^2}\right) + E(\alpha, \sqrt{1-e^2}),$$

es ist, wenn man diese Werthe oben einsetzt:

---

* Nur darf nicht $\alpha = 0$ seyn.

$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2},\ -k, e\right)-F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$

$$=E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[F\left(\frac{\pi}{2},\ \sqrt{1-e^2}\right)-F(\alpha,\ \sqrt{1-e^2})\right]$$

$$+F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2},\ \sqrt{1-e^2}\right)-E(\alpha, \sqrt{1-e^2})+F(\alpha, \sqrt{1-e^2})\right.$$

$$\left.-F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-e^2}\right)\right]. \qquad (c')$$

VI. Für $e_1=\sqrt{1-e^2}$ ist

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)+F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)-F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\,\partial\psi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2\sin^2\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\,\partial\psi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e_1^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\,\partial\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2\sin^2\psi-e_1^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\,\partial\varphi\,\partial\psi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e_1^2\cos^2\varphi+e^2\cos^2\psi}{\sqrt{[e^2\cos^2\psi+e_1^2\cos^2\varphi+e^2e_1^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]}}\,\partial\varphi\,\partial\psi.$$

Diese Grösse ist eine Funktion von e, die wir mit f(e) bezeichnen wollen, so dass

$$f(e)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}.$$

Differenzirt man hier nach e gemäss §. 85 und beachtet, dass (§. 154)

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi=-e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{e}F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)+\frac{1}{e}E\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{e}{e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right]\partial\varphi=-\frac{1}{e}F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)+\frac{1}{e(1-e^2)}E\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

so ergibt sich $\left(\text{wegen } \frac{\partial e_1}{\partial e} = -\frac{e}{e_1}\right)$:

$$f'(e) = \frac{1}{e} F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] - \frac{e}{e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[\frac{1}{1-e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] + \frac{1}{e} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[\frac{1}{1-e^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$
$$- \frac{e}{e_1^2} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] + \frac{e}{e_1^2} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[\frac{1}{1-e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] - \frac{1}{e} F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[\frac{1}{1-e^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right],$$

d. h. wie man leicht findet $f'(e) = 0$, so dass $f(e)$ von e unabhängig ist. Für $e = 0$ ist aber $e_1 = 1$ also

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, \partial\varphi\, \partial\psi}{\cos\varphi} = \frac{\pi}{2}, \text{ so dass } f(e) = \frac{\pi}{2},$$

d. h., wenn man in (c′) einsetzt:

$$\left.\begin{aligned}
&E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) = \frac{\pi}{2},\\
&(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] = \frac{\pi}{2} - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F(\alpha, e_1)\\
&\qquad + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[F(\alpha, e_1) - E(\alpha, e_1)\right],
\end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

wo $e_1 = \sqrt{1-e^2}$, $k = \cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha$ ist. Diese Theoreme hat, wie die meisten hieher gehörigen, Legendre gefunden. (Siehe auch §. 160, III.)

VII. Sey das Integral

$$\int_0^a \partial v \int_a^c \frac{(u^2 - v^2)\,\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)(a^2-v^2)(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}$$

vorgelegt, wo $c > a > 0$.

Zunächst ist

$$\int_a^c \frac{(u^2-v^2)\,\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)(c^2-u^2)}} = \int_a^c \frac{u^2\,\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)(c^2-u^2)}} - v^2\int_a^c \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)(c^2-u^2)}}.$$

Man setze $c^2 - u^2 = (c^2 - a^2) z^2$, so ist wenn $\frac{c^2 - a^2}{c^2} = e^2$, dieses Integral gleich

$$\frac{1}{c}\int_0^1 \frac{c^2 - (c^2-a^2)z^2}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-e^2z^2}}\,\partial z - \frac{v^2}{c}\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}$$
$$= \frac{c^2 - v^2}{c} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - c\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$
$$= cE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - \frac{v^2}{c} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

so dass das verlangte Integral =

$$c\,E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int_0^a \frac{\partial v}{\sqrt{(a^2-v^2)(c^2-v^2)}} - \frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{c}\int \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{(a^2-v^2)(c^2-v^2)}}.$$

Setzt man $v = a\,x$, $\frac{a^2}{c^2} = e_1^2$, so ist diess

$$E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-e_1^2 x^2)}} - a^2 \frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{c^2}\int_0^1 \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-e_1^2 x^2)}}$$

$$= E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right].$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (d) ist also

$$\int_c^a \partial v \int_a^c \frac{(u^2-v^2)\,\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)(c^2-u^2)(a^2-v^2)(c^2-v^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

§. 160.

Anwendungen. *

I. Aus §. 57, VII ergibt sich, dass die Länge eines elliptischen Bogens dessen Anfangsabszisse 0, während die Abszisse des Endpunkts x ist, durch das Integral

$$a\int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

bestimmt ist, wo

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},\quad \sin\varphi = \frac{x}{a}.$$

Dieselbe ist also $= a\,E(\varphi, e)$.

Für die Hyperbel ergibt sich eben so als Länge eines Bogens vom Scheitel an bis zur Abszisse x:

$$\frac{a}{e}\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,\ \text{wo } e^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2},\ \sin\varphi = \frac{a}{x}.$$

Aber

$$\int \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \int \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{\partial\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-e^2\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = e^2\int \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$$

$$-e^2\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\ (\S.\,154,\ \text{III}) = \int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \int \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$-e^2\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

also

* Vergl. auch „Anhang" unter 𝔈.

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = (1-e^2)\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e)\right] - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + E(\varphi, e)$$
$$+ \frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

mithin der Hyperbelbogen:

$$\frac{a(1-e^2)}{e}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e)\right] - \frac{a}{e}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E(\varphi, e)\right] + \frac{a\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{e\sin\varphi}.$$

Für den Lemniscatenbogen ergab §. 48, III als Bogen BM, für den $BAM = \varphi$:

$$s = a\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}.$$

Dieses Integral hat nun, da $2 > 1$, nicht die verlangte Normalform, lässt sich aber leicht auf dieselbe bringen. Man setze zu dem Ende

$$\sin\varphi = x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

so ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}};$$

verglichen mit §. 155, I sind die vier Wurzeln von $(1-x^2)(1-2x^2) = 0$: $1, -1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und es liegt x hier immer zwischen $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (φ zwischen -45^0 und $+45^0$). Also ist in §. 155, I, 3:

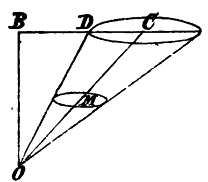
$$a = -1,\ b = -\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ c = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ d = 1,\ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-x}{x+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha = 1,\ e = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ E = +2,$$
$$z = x\sqrt{2} = \sqrt{2}\sin\varphi,$$
$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\ e^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Man setze hier $z = \sin\alpha$, so ist dieses Integral $= \sqrt{\frac{1}{2}}\int \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}$ und gehört direkt zu den elliptischen Integralen. Man schliesst daraus, dass wenn (§. 48, III): $\cos 2\omega = \frac{r^2}{a^2}$, $\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\omega$, der dortige Bogen $MB = \frac{a}{\sqrt{2}}F(\alpha, \sqrt{\frac{1}{2}})$ sey.

Aehnliche Beispiele lassen sich in Menge angeben. Ich habe solche in Grunerts Archiv, IX, S. 438, X, S. 90, XI, S. 88 u. s. w. angegeben.

II. Man soll die Oberfläche des schiefen Kreiskegels bestimmen.

Fig. 63.



Es stelle OC einen schiefen Kreiskegel vor (Fig. 63) dessen Halbmesser $CD = r$, dessen Höhe $OB = h$, wenn OB senkrecht steht auf der Grundfläche. Ferner sey $CB = a$, und man nehme die Spitze O zum Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten, OB zur Axe der x, eine Parallele mit BC, durch O, zur Axe der y, und sey M ein Punkt der Kegelfläche, dessen Koordinaten x, y, z sind. Durch M lege man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche des Kegels, so ist die Entfernung desselben von der Spitze $= x$, also wenn ϱ sein Halbmesser

$$\frac{\varrho}{r}=\frac{x}{h},\quad \varrho=\frac{rx}{h}.$$

Ferner liegt der Mittelpunkt dieses Kreises in der Ebene OCB, d. h. in der Ebene der yx, so dass seine Koordinaten sind x, $x\frac{a}{h}$, 0. Daraus folgt nun dass, da M und der Mittelpunkt die Entfernung ϱ haben:

$$z^2+\left(y-\frac{ax}{h}\right)^2=\varrho^2,$$

$$hz=\pm\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2},$$

in welcher Gleichung beide Zeichen zulässig sind. Daraus folgt

$$h\frac{\partial z}{\partial x}=\pm\frac{r^2x+a(hy-ax)}{\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2}},\quad h\frac{\partial z}{\partial y}=\mp\frac{h(hy-ax)}{\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]+[r^2x+a(hy-ax)]^2+h^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}$$

$$=\frac{h^2r^2x^2+[r^2x+a(hy-ax)]^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}=\frac{h^2r^2x^2+r^4x^2+2ar^2x(hy-ax)+a^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}$$

$$=\frac{(h^2+r^2)r^2x^2+2ar^2x(hy-ax)+a^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}.$$

Setzt man $h^2+r^2=\varrho^2$, $\frac{hy-ax}{rx}=M$, so ist diess $=$

$$\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{h^2(1-M^2)},$$

so dass (§. 80) dass doppelte Integral

$$\frac{1}{h}\iint\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{1-M^2}}\,\partial x\,\partial y$$

zu bestimmen ist. Die Ebene der xy theilt die ganze Kegelfläche in zwei Hälften; für jede sind die äussersten Gränzen von x: 0 und h, während einem beliebigen x für y die Gränzen $(a-r)\frac{x}{h}$, $(a+r)\frac{x}{h}$ zugehören. Demnach ist die Fläche

$$\frac{2}{h}\int_0^h\partial x\int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}}\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{1-M^2}}\,\partial y.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, führen wir für x und y zwei neue Veränderliche u und v ein, die mit den ersten durch die Gleichungen $x=u$, $y=uv$ zusammenhängen. Alsdann ist in §. 79, I die dortige Gleichung (d): $y-xv=0$, während die (d′) sind: $(a-r)\frac{x}{h}-x\alpha'=0$, $(a+r)\frac{x}{h}-x\beta'=0$. Daraus folgt $\alpha'=\frac{a-r}{h}$, $\beta'=\frac{a+r}{h}$, beide von x unabhängig. Die dortigen Gleichungen (f) sind, da $\varphi(u,v)=u$, $a=0$, $b=h:0=a'$, $h=b'$, so dass also nach der dortigen Formel (A), in der $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}=u$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}=v$, die Fläche $=$

$$\frac{2}{h}\int_0^h \partial u \int_{\frac{a-r}{h}u}^{\frac{a+r}{h}u} \sqrt{\frac{\varrho^2+2arM'+a^2M'^2}{1-M'^2}}\,\partial v,\quad M'=\frac{huv-au}{ru}=\frac{hv-a}{r},$$

so dass, wenn man die Integration nach u vollzieht (wovon M′ unabhängig ist), man für den Inhalt der Kegelfläche erhält:

$$h\int_{\frac{a-r}{h}}^{\frac{a+r}{h}} \sqrt{\frac{\varrho^2+2arM'+a^2M'^2}{1-M'^2}}\,\partial v.$$

Setzt man endlich

$$M'=\frac{hv-a}{r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=-\frac{r\sin\varphi}{h},$$

so sind die Gränzen von $\varphi:\pi$ und 0, somit die Kegelfläche gleich

$$r\int_0^\pi \sqrt{\varrho^2+2ar\cos\varphi+a^2\cos^2\varphi}\,\partial\varphi,\quad \varrho^2=r^2+h^2,$$

und wenn man noch $\cos\varphi=x$ setzt:

$$r\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{\varrho^2+2arx+a^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\partial x,$$

welches Integral nun zu den elliptischen gehört und nach §. 155, II, 2 behandelt werden muss. Da die Wurzeln der Gleichung $a^2x^2+2arx+\varrho^2=0$ sind $-\frac{r}{a}\pm\frac{h}{a}i$, so ist dort $a=-1$, $b=+1$, $m=-\frac{r}{a}$, $n=\frac{h}{a}$, also

$$\frac{1-x}{x+1}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(a+r)^2+h^2}{(a-r)^2+h^2}},\quad x=\frac{1-\alpha+z(1+\alpha)}{1+\alpha+z(1-\alpha)},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{4\alpha}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},$$

$$1-x^2=\frac{4\alpha(1-z^2)}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},\quad \varrho^2+2arx+a^2x^2=a^2\left[\left(x+\frac{r}{a}\right)^2+\frac{h^2}{a^2}\right]$$

$$=\frac{a^2[\beta^2+\gamma^2z^2]}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},\text{ wenn } \beta^2=[1-\alpha+\frac{r}{a}(1+\alpha)]^2+\frac{h^2}{a^2}(1+\alpha)^2,$$

$$\gamma^2=[1+\alpha+\frac{r}{a}(1-\alpha)]^2+\frac{h^2}{a^2}(1-\alpha)^2,$$

also endlich

$$r\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{\varrho^2+2arx+a^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\partial x=r\int_{-1}^{+1}\frac{a\sqrt{\beta^2+\gamma^2z^2}}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{1-z^2}}\,\frac{4\alpha\,\partial z}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2}.$$

und wenn man wieder $z=\cos\varphi$, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=m$, $\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}=e^2$ setzt:

$$=\frac{2a\sqrt{\alpha}\,r\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{(1+\alpha)^2}\int_0^\pi\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi.$$

Aber es ist

$$\beta^2+\gamma^2=\frac{4[(a+r^2)+h^2]}{a^2},\ a\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha}=\frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{[(a-r)^2+h^2]^{\frac{1}{4}}},\quad \frac{a\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)^2}$$

$$=\frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}[(a-r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{\left[\sqrt{(a+r)^2+h^2}+\sqrt{(a-r)^2+h^2}\right]^2}=n,$$

so dass also die Kegelfläche $=$

$$2nr\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\partial\varphi=2nr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\partial\varphi+2nr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1+m\cos\varphi)^2}\partial\varphi.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\partial\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2\sin^2\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{e^2}{m^2}-\frac{2e^2}{m^2}\frac{1}{1-m\cos\varphi}\right.$$

$$\left.+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\frac{1}{(1-m\cos\varphi)^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$-\frac{2e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Eben so

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1+m\cos\varphi)^2}\partial\varphi=\frac{e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{2e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+m\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

so dass die Summe $=$

$$\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m^2\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Nach §. 151 ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m^2\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{1-m^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right);$$

ferner, wenn man in der Formel (d) des §. 156 $a=\frac{1}{m}$, $n=2$ setzt:

$$\frac{\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\frac{1}{m}+\cos\varphi}=e^2\int\frac{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)^2\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\frac{2e^2}{m}\int\frac{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\frac{1}{m}\int\frac{\partial\varphi}{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}};$$

integrirt man hier zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\frac{1}{m^2}+\cos^2\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-m\sqrt{1-e^2},$$

und eben so

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\frac{1}{m^2}+\cos^2\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+m\sqrt{1-e^2},$$

woraus nun, indem man früher Gesagtes beachtet:

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$=-\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+2e^2F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-2F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+2E\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$+\frac{2\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)}{1-m^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right),$$

so dass also die Kegelfläche:

$$2nr\left[\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4e^2}{m^2(1-m^2)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right)-\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{1-m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{2}{1-m^2}E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{2\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)}{(1-m^2)^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right)\right]$$

$$=\frac{4nr}{1-m^2}E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4nr}{1-m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{4nr}{(1-m^2)^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right),$$

in welcher Formel

$$n=\frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}[(a-r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{[\sqrt{(a+r)^2+h^2}+\sqrt{(a-r)^2+h^2}]^2},\quad\alpha=\sqrt{\frac{(a+r)^2+h^2}{(a-r)^2+h^2}},\quad m=\frac{\alpha-1}{\alpha+1},$$

$$e^2=\frac{[a(1+\alpha)+r(1-\alpha)]^2+h^2(1-\alpha)^2}{4[(a+r)^2+h^2]}.$$

Für den besondern Fall, dass $a=0$ ist $\alpha=1$, $m=0$, $e=0$, $n=\frac{1}{2}\sqrt{r^2+h^2}$, $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)=F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)=\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{m^2}{1-m^2}, e\right)=\frac{\pi}{2}$, so dass obige Formel gibt $2\sqrt{r^2+h^2}\, r\, \frac{\pi}{2}=r\sqrt{r^2+h^2}\,\pi$, die bekannte Formel für den senkrechten Kegel.

Setzt man $(a-r)^2+h^2=\varrho^2$, $(a+r)^2+h^2=\varrho'^2$, so ist

$$e^2=\frac{[a(\varrho+\varrho')+r(\varrho-\varrho')]^2+h^2(\varrho-\varrho')^2}{4\varrho^2\varrho'^2}$$

$$=\frac{(a^2+r^2+h^2)(\varrho^2+\varrho'^2)+2\varrho\varrho'(a^2-r^2-h^2)+2ar(\varrho^2-\varrho'^2)}{4\varrho^2\varrho'^2}.$$

Aber $a^2+r^2+h^2=\frac{1}{2}(\varrho^2+\varrho'^2)$, $4ar=\varrho'^2-\varrho^2$, so dass

$$e^2=\frac{\frac{1}{2}(\varrho^2+\varrho'^2)^2+2\varrho\varrho'(a^2-r^2-h^2)-\frac{1}{2}(\varrho'^2-\varrho^2)^2}{4\varrho^2\varrho'^2}$$

$$=\frac{2\varrho^2\varrho'^2+2\varrho\varrho'(a^2-r^2-h^2)}{4\varrho^2\varrho'^2}=\frac{1}{2}-\frac{r^2+h^2-a^2}{2\varrho\varrho'}.$$

Ferner

$$n=\frac{2\varrho'^{\frac{3}{2}}\varrho^{\frac{3}{2}}}{(\varrho+\varrho')^2},\quad m=\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho'+\varrho},\quad 1-m^2=\frac{4\varrho\varrho'}{(\varrho+\varrho')^2},\quad \frac{4nr}{1-m^2}=2r\varrho^{\frac{1}{2}}\varrho'^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{4nr}{(1-m^2)^2}=\frac{(\varrho'+\varrho)^2 r}{2\varrho^{\frac{1}{2}}\varrho'^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{m^2}{1-m^2}=\frac{(\varrho'-\varrho)^2}{4\varrho\varrho'},$$

so dass also die Fläche auch =

$$2r\sqrt{\varrho\varrho'}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)-F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)+\frac{(\varrho'+\varrho)^2}{4\varrho\varrho'}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{(\varrho'-\varrho)^2}{4\varrho\varrho'}, e\right)\right],$$

wo $e=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{r^2+h^2-a^2}{2\varrho\varrho'}}$. Diese Formel gibt Legendre: Traité des Fonctions elliptiques I, pag. 330.

Zusatz.

III. Das in obiger Formel vorkommende Integral der dritten Art lässt sich durch die der zweiten Art ausdrücken.

Aus (h) in §. 152 folgt, wenn man $k=\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$ setzt

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, e^2 tg^2\alpha, e\right)=-\frac{(1-e^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{k}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right)$$

$$+\frac{\cos^2\alpha\, F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{k}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}\,\frac{\pi}{2};$$

dann gibt (d) in §. 159:

$$\frac{(1-e^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right)=\frac{(1-e^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$-E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1)+F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1)-F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E(\alpha, e_1),\quad e_1^2=1-e^2.$$

Dadurch ergibt sich nun:

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, e^2 tg^2\alpha, e\right) = cos^2\alpha F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$+\frac{sin\alpha\, cos\alpha}{\sqrt{k}}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E(\alpha, e_1)\right], \quad \text{(a)}$$

womit, nebst den Formeln (c) und (d) des §. 159, wohl gezeigt ist, dass die elliptischen Integrale der dritten Art für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sich durch die der zwei ersten Arten ausdrücken lassen.

Die Formel des §. 152, II gibt für $a = e^2 tg^2\alpha$, $k' = (1 + e^2 tg^2\alpha) \times (1 + cotg^2\alpha)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, e^2 tg^2\alpha, e\right) + \Pi\left(\frac{\pi}{2}, cotg^2\alpha, e\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + \int_0^\infty \frac{\partial z}{1 + k'z^2}$$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + \frac{1}{\sqrt{k'}}\frac{\pi}{2},$$

wo nun

$$k' = \frac{sin^2\alpha + e^2 cos^2\alpha}{sin^2\alpha\, cos^2\alpha}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\sqrt{k}}{sin\alpha\, cos\alpha},$$

so dass

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, cotg^2\alpha, e\right) = -\Pi\left(\frac{\pi}{2}, e^2 tg^2\alpha, e\right) + \frac{sin\alpha\, cos\alpha}{\sqrt{k}}\frac{\pi}{2} + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

und mithin

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, cotg^2\alpha, e\right) = sin^2\alpha F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$+\frac{sin\alpha\, cos\alpha}{\sqrt{k}}\left[\frac{\pi}{2} - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E(\alpha, e_1)\right]. \quad \text{(b)}$$

Um diese Formel oben anzuwenden ist $cotg^2\alpha = \frac{m^2}{1 - m^2}$, $m = cos\alpha$, $1 - m^2 = sin^2\alpha$, und mithin

$$\frac{1}{1 - m^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, cotg^2\alpha, e\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$+\frac{cotg\alpha}{\sqrt{k}}\left[\frac{\pi}{2} - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)F(\alpha, e_1) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)E(\alpha, e_1)\right],$$

wo $\frac{1}{1 - m^2} = \frac{(\varrho' + \varrho)^2}{4\varrho\varrho'}$. Setzt man nun diesen Werth in die für die Kegelfläche erhaltene Formel ein, so ergibt sich ein Ausdruck, der bloss elliptische Integrale der beiden ersten Arten enthält.

Zurückführungen bestimmter Integrale auf elliptische finden sich noch in §. 168, IV; 169, I; 171, II; 174, V; „Anhang“ unter 𝔈, 𝔊, 𝔐.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Die Eulerschen Integrale oder die Gammafunktionen, so wie einige andere Funktionen.

§. 161.

Ausdruck von *sin* x durch eine Faktorenfolge, als Hilfssatz.

Aus der Gleichung (§. 5)

$$\sin 2n\alpha = 2n\cos^{2n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\cos^{2n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ldots,$$

d. h.

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2n\cos^{2n-2}\alpha - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\cos^{2n-4}\alpha\sin^2\alpha + \ldots\ldots,$$

welche in der letzten Gestalt nur noch gerade Potenzen von $\cos\alpha$ enthält, folgt leicht, dass wenn man $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ setzt man erhalten werde:

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = A\sin^{2n-2}\alpha + B\sin^{2n-4}\alpha + \ldots\ldots + M,$$

wo A, B, ..., M bestimmte Zahlen sind. Setzt man $\sin^2\alpha = z$, so ist die zweite Seite dieser Gleichung gleich $Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \ldots + M$, also eine ganze Funktion des $n-1^{ten}$ Grades von z. Eine solche wird nur für $n-1$ verschiedene Werthe von z zu Null und sind $z_1, \ldots, z_{n-1}$ dieselben, so lässt sie sich durch $A(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})$ darstellen. *

Nun aber ist $\frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ Null, wenn $2n\alpha = \pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi$,** d. h. wenn $z = \sin^2\frac{\pi}{2n}, \sin^2\frac{2\pi}{2n}, \ldots, \sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$, so dass

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = A\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)\ldots\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right),$$

wo A von α unabhängig ist. Setzt man also $\alpha = 0$, wodurch die erste Seite zu 2n wird (§. 22), so ist

---

* Ist $Az^{n-1} + \ldots + M$ Null für $z = \mu$, so lässt sich diese Grösse durch $z - \mu$ dividiren, wie sich diess durch wirkliche Division sofort ergibt. Desshalb kann $Az^{n-1} + \ldots + M$ gleich gesetzt werden der Grösse $(z-\mu)(Az^{n-2} + \ldots K')$. Ist also $Az^{n-1} + \ldots + M$ noch weiter für $z = \nu$ Null, so muss auch $(z-\mu)(Az^{n-2} + \ldots + K')$ für $z = \nu$ Null seyn, d. h. da $z - \mu$ nicht in dieser Lage ist, so ist $Az^{n-2} + \ldots + K'$ Null für $z = \nu$, lässt sich mithin durch $z - \nu$ dividiren. Daraus ergibt sich nun leicht, dass $Az^{n-1} + \ldots + M = (z-\mu)(z-\nu)(Az^{n-3} + \ldots + G'')$. Für jeden Werth von z, für den $Az^{n-1} + \ldots + M$ Null ist, erhält man so einen Faktor des ersten Grades der Form $z - \mu$. Da aber $Az^{n-1} + \ldots + M$ nur des $n-1^{ten}$ Grades ist, so kann die Zahl jener einfachen Faktore nur höchstens $n-1$ seyn. Demnach gibt es höchstens $n-1$ verschiedene Werthe, für die $Az^{n-1} + \ldots + M$ Null ist. Zugleich ist hiemit auch gezeigt, dass alsdann das fragliche Polynom sich durch ein Produkt darstellen lässt.

** Für $2n\alpha = (n+1)\pi, \ldots$ erhält man in z dieselben Werthe wieder.

$$2n = A\left(-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(-\sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\cdot\left(-\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right),$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{\sin 2n\alpha}{2n\sin\alpha\cos\alpha} = \left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right).$$

Setzt man hier $\alpha = \frac{x}{2n}$, so ergibt sich

$$\sin x = 2n\sin\frac{x}{2n}\cos\frac{x}{2n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right). \tag{a}$$

Wir wollen nun auf der zweiten Seite n unbegränzt wachsen lassen, wodurch auch die Zahl der Faktoren unbegränzt wächst, so bleibt der Werth dieser zweiten Seite immer gleich *sin* x, indem die erste Seite von n frei ist. Aber es ist (§. 54)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1..5} - \ldots,$$

also

$$2n\sin\frac{x}{2n} = x - \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{1}{(2n)^2} + \frac{x^5}{1..5}\,\frac{1}{(2n)^4} - \ldots\ldots,$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\sin\frac{r\pi}{2n}} = \frac{\frac{x}{2n} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{2n}\right)^3 + \ldots\ldots}{\frac{r\pi}{2n} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{r\pi}{2n}\right)^3 + \ldots\ldots} = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{1}{(2n)^2} + \ldots}{r\pi - \frac{(r\pi)^3}{1.2.3}\,\frac{1}{(2n)^2} + \ldots},$$

also

$$Gr\,2n\sin\frac{x}{2n} = x,\quad Gr\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\sin\frac{r\pi}{2n}} = \frac{x}{r\pi},\quad Gr\cos\frac{x}{2n} = 1$$

so dass

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\cdots, \tag{b}$$

mithin auch, wenn man $x\pi$ für x setzt:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi} = x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\cdots \tag{b'}$$

Man kann aus (b) eine bekannte Formel für π ziehen. Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so gibt sie:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots\cdots,\quad \frac{\pi}{2} = \frac{4}{4-1}\cdot\frac{16}{16-1}\cdot\frac{36}{36-1}\cdots\cdots$$

$$= \frac{2}{2-1}\cdot\frac{2}{2+1}\cdot\frac{4}{4-1}\cdot\frac{4}{4+1}\cdot\frac{6}{6-1}\cdot\frac{6}{6+1}\cdots = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots,$$

eine Formel, die Wallis fand.

§. 162.

Erklärung und Grundeigenschaften.

I. Wir wollen das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x$$

durch $\Gamma(a)$ bezeichnen, und dasselbe das Eulersche Integral oder auch die Gammafunktion nennen, so dass also

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x = \Gamma(a). \qquad (a)$$

Setzt man in (a): $x = -l(z)$, also $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{z}$, $e^{-x} = z$, so sind die Gränzen von z: 1 und 0, und mithin

$$\int_0^1 [-l(z)]^{a-1} \partial z = \Gamma(a), \quad \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{a-1} \partial z = \Gamma(a). \qquad (b)$$

II. Vor Allem wollen wir nun eine wichtige Eigenschaft der Grösse $\Gamma(a)$ nachweisen. Es ist nämlich (§. 27):

$$\int x^a e^{-x} \partial x = -x^a e^{-x} + a \int x^{a-1} e^{-x} \partial x;$$

ist aber $a > 0$ so ist $x^a e^{-x}$ Null für $x = 0$ und $x = \infty$ (§. 22), also ist

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} \partial x = a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x,$$

d. h.

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a > 0, \qquad (c)$$

welche Gleichung nun eine Fundamentaleigenschaft der Gamma-Funktion ausdrückt. Aus ihr schliesst man, dass auch $\Gamma(a)$, wenn a zwischen 0 und 1 liegt, einen bestimmten Werth hat, da dann $\Gamma(a+1)$ in dieser Lage ist. Für $a = 1$ ist übrigens

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \partial x = 1,$$

also

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2.1, \ldots, \Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 1, \qquad (d)$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist. Eben so

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) = \ldots$$
$$= (a+n-1)(a+n-2)\ldots a\,\Gamma(a), \qquad (e)$$

wenn n eben so beschaffen ist.

Für ein negatives a ist $\Gamma(a)$ unzulässig. Denn für $a = 0$ kann schon nach (c) der Werth von $\Gamma(0)$ nicht mehr zugelassen werden, indem er ∞ seyn müsste. Daraus folgt dann dass für $a = -1$ er eben so unzulässig ist, da die (c) geben müsste:

$$\Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1), \quad \Gamma(-1) = -\Gamma(0),$$

u. s. w.

III. Für $a=\frac{1}{2}$ ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\partial x;$$

setzt man hier $x=z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z}=2z$, so sind die Gränzen von z wieder 0 und ∞, also (§. 86)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-z^2}\partial z=\sqrt{\pi}. \qquad \text{(f)}$$

Hieraus folgt nach (e):

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1}{2^n}\sqrt{\pi}. \qquad \text{(f')}$$

Beweis der Gleichung $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$.

IV. Setzt man in (a): $x=mz$, wo $m>0$, so ist

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\partial x=\int_0^{\infty}m^a e^{-mz}z^{a-1}\partial z=m^a\int_0^{\infty}z^{a-1}e^{-mz}\partial z,$$

so dass

$$\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-mx}\partial x=\frac{\Gamma(a)}{m^a},\ m>0. \qquad \text{(g)}$$

Hieraus folgt, wenn $m=1+z$ (wo also $z>-1$) und $a+b$ für a gesetzt wird:

$$\int_0^{\infty}x^{a+b-1}e^{-(1+z)x}\partial x=\frac{\Gamma(a+b)}{(1+z)^{a+b}},$$

mithin, da bloss $z>-1$ zu seyn braucht:

$$\int_0^{\infty}\partial z\int_0^{\infty}z^{a-1}x^{a+b-1}e^{-(1+z)x}\partial x=\Gamma(a+b)\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\partial z}{(1+z)^{a+b}}.$$

Aber die erste Seite ist auch

$$\int_0^{\infty}x^{a+b-1}e^{-x}\partial x\int_0^{\infty}z^{a-1}e^{-zx}\partial z=\int_0^{\infty}x^{a+b-1}e^{-x}\partial x\,\frac{\Gamma(a)}{x^a}\ \text{[nach (g)]}$$

$$=\Gamma(a)\int_0^{\infty}x^{b-1}e^{-x}\partial x=\Gamma(a)\Gamma(b),$$

so dass

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^{a+b}}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \qquad \text{(h)}$$

Setzt man hier $a+b=1$, d. h. $b=1-a$, so ist

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\partial x}{1+x}=\Gamma(a)\Gamma(1-a). \qquad \text{(h')}$$

V. Die Grösse zweiter Seite dieser Gleichung lässt sich noch in anderer Weise ausdrücken. Gemäss §. 22 wird die Grösse $\frac{x^{\alpha}-1}{\alpha}$ für ein unendlich abnehmendes α zu $l(x)$, so dass also auch, wenn *Gr* sich auf ein unendlich zunehmendes n bezieht:

$$Gr\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = l(x),\ Gr\frac{1-x^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = -l(x) = l\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Gr\frac{(1-x^{\frac{1}{n}})^{a-1}}{\frac{1}{n^{a-1}}} = \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{a-1},$$

und mithin gesetzt werden darf

$$\frac{(1-x^{\frac{1}{n}})^{a-1}}{\frac{1}{n^{a-1}}} = \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{a-1} + k,$$

wenn k eine Grösse ist, die mit unendlich wachsendem n sich der Null unbegränzt nähert. Daraus folgt:

$$n^{a-1}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^{a-1}\partial x = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{a-1}\partial x + \int_0^1 k\,\partial x = \Gamma(a) + k',$$

wenn k' ein Mittelwerth ist zwischen den Werthen, die k erlangt wenn x von 0 bis 1 geht [§. 39, Formel (4)]. Da aber k mit unbegränzt wachsendem n zu Null wird, was auch x sey, so wird also auch k' in derselben Lage seyn. In dem Integrale erster Seite wollen wir $x = z^n$ setzen, wo wir $n > 0$ ja voraussetzen, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = n z^{n-1}$, $x^{\frac{1}{n}} = z$, also

$$n^{a-1}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^{a-1}\partial x = n^a\int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{n-1}\partial z;$$

setzt man aber in der Formel (h): $x = \frac{1}{1-z} - 1$, so sind die Gränzen von $z: 0, 1$; $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{(1-z)^2}$, $1+x = \frac{1}{1-z}$, $x = \frac{z}{1-z}$, so dass dann

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}}{(1-z)^{a-1}}\,\frac{(1-z)^{a+b}}{(1-z)^2}\partial z = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ \text{d. h.}\ \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\partial z = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \qquad (i)$$

aus welcher Formel * nun unmittelbar folgt, dass

$$n^a\int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{n-1}\partial z = \frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)},$$

so dass also

$$\Gamma(a) + k' = \frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)},$$

und mithin

$$Gr\left[\frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}\right] = \Gamma(a). \qquad (k)$$

---

* Die Verallgemeinerung dieser Formel findet sich in „Anhang" unter §. IV, als Gleichung (g).

VI. Setzt man hier n als ganze Zahl voraus, so ist nach (e) also

$$Gr\left[\frac{1.2.3\ldots(n-1).n^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\right] = \Gamma(a),$$

und wenn man $1-a$ für a setzt, also $a<1$ annimmt:

$$Gr\left[\frac{1.2\ldots(n-1)\,n^{1-a}}{(1-a)\,(2-a)\ldots(n-a)}\right] = \Gamma(1-a),$$

mithin auch:

$$Gr\left(\frac{1.2\ldots(n-1)\,n^a}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\;\frac{1.2\ldots(n-1)\,n^{1-a}}{(1-a)\,(2-a)\ldots(n-a)}\right) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

oder

$$Gr\left(\frac{1^2.2^2\ldots.(n-1)^2 n}{a(1^2-a^2)(2^2-a^2)\ldots[(n-1)^2-a^2](n-a)}\right) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)$$

$$= Gr\frac{1}{a\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{a^2}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

nach §. 161. Also endlich

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\partial x = \frac{\pi}{\sin a\pi},\; a \gtrless {0 \atop 1}, \qquad (l)$$

aus welcher Gleichung für $a=\frac{1}{2}$ nochmals die (f) folgt. *

Zusatz zur Integration linearer Differentialgleichungen.

VII. Legt man sich die Differentialgleichung (§. 110)

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x)\,y = 0 \qquad (\alpha)$$

zur Integration vor, so ist in §. 110: $\varphi = a_1 u + a_0$, $\psi = u^2 + b_1 u + b_0$ und sey nun $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{a}{u-\alpha} + \frac{b}{u-\beta}$, wo also $u^2 + b_1 u + b_0 = (u-\alpha)\,(u-\beta)$ angenommen, und α, β reell vorausgesetzt werden. Alsdann ist $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u = l[(u-\alpha)^a (u-\beta)^b]$ und die dortige Gleichung (p'); $e^{ux}(u-\alpha)^a (u-\beta)^b = 0$. Dieser Gleichung wird bei positivem a und b genügt durch $u=\alpha$ und $u=\beta$; ferner bei positivem x durch $u=-\infty$, während bei negativem x durch $u=+\infty$ genügt wird. Man hat also auch

$$\int_\alpha^\infty e^{ux}(u-\alpha)^{a-1}(u-\beta)^{b-1}\,\partial u,\ \text{für } x<0, \qquad (\beta)$$

$$\int_\alpha^{-\infty} e^{ux}(u-\alpha)^{a-1}(u-\beta)^{b-1}\,\partial u,\ \text{für } x>0, \qquad (\beta')$$

als Werth, welcher der Differentialgleichung genügt.

Sey nun $\alpha>\beta$, also $\alpha-\beta>0$ so ist nach (g):

---

* Vergl. hieher auch „Anhang" unter B, wo ein allgemeiner Satz über die Gammafunktionen gegeben ist.

$$\frac{\Gamma(a)}{[(\alpha-\beta)x]^a} = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-(\alpha-\beta)xu}\,\partial u, \text{ wenn } (\alpha-\beta)x > 0, \text{ d. h. } x > 0,$$

$$\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a} = \frac{(\alpha-\beta)^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{(1-u)(\alpha-\beta)x}\,\partial u.$$

Daraus, wenn b eine positive ganze Zahl:

$$\frac{\partial^{b-1}}{\partial x^{b-1}}\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a}\right) = \frac{(\alpha-\beta)^{a+b-1}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{(1-u)(\alpha-\beta)x} (1-u)^{b-1}\,\partial u$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^{a+b-1} e^{(\alpha-\beta)x}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} (1-u)^{b-1} e^{-(\alpha-\beta)xu}\,\partial u.$$

Setzt man hier $(\alpha-\beta)\,u = v + \alpha$, so wird die zweite Seite zu

$$\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{\Gamma(a)} \int_{-\alpha}^\infty (v+\alpha)^{a-1} (-v-\beta)^{b-1} e^{-(v+\alpha)x}\,\partial v = \frac{(-1)^{b-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(a)} \int_{-\alpha}^\infty (v+\alpha)^{a-1} (v+\beta)^{b-1} e^{-vx}\,\partial v$$

$$= \frac{(-1)^a e^{-\beta x}}{\Gamma(a)} \int_\alpha^{-\infty} (v-\alpha)^{a-1} (v-\beta)^{b-1} e^{vx}\,\partial v. \qquad (\gamma)$$

Für $x < 0$ ist

$$\frac{\Gamma(a)}{[(\beta-\alpha)x]^a} = \int_0^\infty u^{a-1} e^{(\alpha-\beta)xu}\,\partial u, \quad \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a} = \frac{(\beta-\alpha)^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{(1+u)(\alpha-\beta)x}\,\partial u,$$

$$\frac{\partial^{b-1}}{\partial x^{b-1}}\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a}\right) = \frac{(\beta-\alpha)^a (\alpha-\beta)^{b-1} e^{(\alpha-\beta)x}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} (1+u)^{b-1} e^{(\alpha-\beta)xu}\,\partial u.$$

Man setze $(\alpha-\beta)\,u = v - \alpha$, so ist die zweite Seite

$$\frac{(-1)^a e^{(\alpha-\beta)x}}{\Gamma(a)} \int_\alpha^\infty (v-\alpha)^{a-1} (v-\beta)^{b-1} e^{(v-\alpha)x}\,\partial u$$

$$= \frac{(-1)^a e^{-\beta x}}{\Gamma(a} \int_\alpha^\infty (v-\alpha)^{a-1} (v-\beta)^{b-1} e^{vx}\,\partial v. \qquad (\gamma')$$

Vergleicht man die Formeln (γ) und (γ') mit (β) und (β'), so ergibt sich dass der Gleichung (α) genügt wird durch

$$e^{\beta x} \frac{\partial^{b-1}}{\partial x^{b-1}}\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a}\right),$$

vorausgesetzt es sey $u^2 + b_1 u + b_2 = (u-\alpha)(u-\beta)$, α und β reell, und dann $\frac{a_1 u + a_0}{u^2 + b_1 u + b_2} = \frac{a}{u-\alpha} + \frac{b}{u-\beta}$, worin a und b positiv, letzteres eine ganze Zahl sey. Dass $\alpha > \beta$ sey, kann man unbeachtet lassen, da sich leicht ergibt dass in jedem Falle das Resultat dasselbe ist. *

---

* Für $\beta > \alpha$ bildet man wie (γ') und γ [wobei $(\alpha-\beta)\,u = \pm(v-\alpha)$]:

$$\frac{\partial^{b-1}}{\partial x^{b-1}} \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a} = \frac{(\beta-\alpha)^a (\alpha-\beta)^{b-1}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{(1+u)(\alpha-\beta)x} (1+u)^{b-1}\,\partial u$$

$$= \frac{(-1)^a e^{-\beta x}}{\Gamma(a)} \int_\alpha^{-\infty} (v-\alpha)^{a-1} (v-\beta)^{b-1} e^{vx}\,\partial v, \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial^{b-1}}{\partial x^{b-1}} \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{x^a} = \frac{(\alpha-\beta)^{(a+b-1}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{(1-u)(\alpha-\beta)x} (1-u)^{b-1}\,\partial u$$

$$= \frac{(-1)^a e^{-\beta x}}{\Gamma(a)} \int_\alpha^\infty (v-\alpha)^{a-1} (v-\beta)^{b-1} e^{vx}\,\partial v, \quad x < 0.$$

Ist a eine positive ganze Zahl, so genügt natürlich eben so:

$$e^{\alpha x}\frac{\partial^{a-1}}{\partial x^{a-1}}\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{x^b}.$$

VIII. Für §. 111, I ist also, da dort $\alpha=b$, $\beta=-b$, ein Integral

$$e^{-bx}\frac{\partial^{\frac{1}{2}a-1}}{\partial x^{\frac{1}{2}a-1}}\frac{e^{2bx}}{x^{\frac{1}{2}a}},$$

wenn $\frac{1}{2}a$ eine ganze Zahl; ein anderes aber auch

$$e^{+bx}\frac{\partial^{\frac{1}{2}a-1}}{\partial x^{\frac{1}{2}a-1}}\frac{e^{-2bx}}{x^{\frac{1}{2}a}}.$$

Setzt man $\frac{1}{2}a-1=n$, so ist also das vollständige Integral von

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2(n+1)\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0:$$

$$C\,e^{-bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{e^{2bx}}{x^{n+1}}+C_2\,e^{+bx}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{e^{-2bx}}{x^{n+1}},$$

wenn n eine positive ganze Zahl.

Setzt man bi statt b, so hat man

$$C_1\,e^{-bxi}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{2bxi}}{x^{n+1}}\right)+C_2\,e^{+bxi}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{-2bxi}}{x^{n+1}}\right)$$

$$=C_1(\cos bx-i\sin bx)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\cos 2bx+i\sin 2bx}{x^{n+1}}$$

$$+C_2(\cos bx+i\sin bx)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\cos 2bx-i\sin 2bx}{x^{n+1}}$$

$$=E_1\left[\cos bx\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\cos 2bx}{x^{n+1}}+\sin bx\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\sin 2bx}{x^{n+1}}\right]$$

$$+E_2\left[\cos bx\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\sin 2bx}{x^{n+1}}-\sin bx\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\cos 2bx}{x^{n+1}}\right],$$

wo $E_1=C_1+C_2$, $E_2=(C_1-C_2)i$. Demnach folgt aus

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2(n+1)\frac{\partial y}{\partial x}+b^2xy=0$$

nunmehr

$$y=(C_1\cos bx-C_2\sin bx)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\cos 2bx}{x^{n+1}}+(C_1\sin bx+C_2\cos bx)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\sin 2bx}{x^{n+1}}.$$

IX. Wir fügen hier folgendes zu §. 113 gehörende Beispiel zu:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(a^2-\frac{6}{x^2}\right)y=0;\ x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a^2x^2-6)\,y=0.$$

Dort ist

$m=1,\ a_1=b_1=b_0=0,\ a_0=-6,\ c_0=a^2;\ n(n-1)-6=0,\ n=3;\ u=x,\ y=x^3z.$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial x}+a^2xz=0.$$

Also

$$z=(C_1\cos ax-C_2\sin ax)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\cos 2ax}{x^3}+(C_1\sin ax+C_2\cos ax)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\sin 2ax}{x^3}$$

$$= C_1 \cos a x \left(\frac{12}{x^5} - \frac{4 a^2}{x^3}\right) + \frac{12 a C_1}{x^4} \sin a x + C_2' \sin a x \left(\frac{12}{x^5} - \frac{4 a^2}{x^3}\right) - \frac{12 a C_2}{x^4} \cos a x.$$

Demnach, wenn man $4 C_1 a^2 = E_1$, $4 C_2 a^2 = E_2$ setzt, genügt der vorgelegten Gleichung:

$$y = E_1 \left[\left(\frac{3}{a^2 x^2} - 1\right) \cos a x + \frac{3}{a x} \sin a x\right] + E_2 \left[\left(\frac{3}{a^2 x^2} - 1\right) \sin a x - \frac{3}{a x} \cos a x\right].$$

§. 163.

Zurückführung bestimmter Integrale auf die Gammafunktion.

I. Da nach (g) für ein positives x:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty z^{a-1} e^{-xz} \partial z = \frac{1}{x^a},$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^a} \partial x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \cos \alpha x \, \partial x \int_0^\infty z^{a-1} e^{-xz} \partial z = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty z^{a-1} \partial z \int_0^\infty e^{-xz} \cos \alpha x \, \partial x$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty z^{a-1} \partial z \; \frac{z}{\alpha^2 + z^2} \; (\text{§. } 43) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{z^a \, \partial z}{\alpha^2 + z^2}.$$

Ist nun $\alpha > 0$ und man setzt hier $z = \alpha \sqrt{u}$, so sind die Gränzen von u wieder 0 und ∞, $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\alpha}{2\sqrt{u}}$, mithin (§. 162, VI)

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^a} \partial x = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{\alpha^{a+1}}{2 \alpha^2} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{a}{2}} \partial u}{(1+u) u^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha^{a-1}}{2 \Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{a-1}{2}} \partial u}{1+u} = \frac{\alpha^{a-1}}{2 \Gamma(a)} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{a+1}{2} \pi\right)},$$

$$\frac{a+1}{2} \gtrless {0 \atop 1},$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^a} \partial x &= \frac{\alpha^{a-1} \pi}{2 \Gamma(a) \cos \frac{a\pi}{2}}, \quad \alpha > 0, \; a \gtrless {0 \atop 1} \\ \text{und eben so} \qquad & \\ \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x^a} \partial x &= \frac{\alpha^{a-1} \pi}{2 \Gamma(a) \sin \frac{a\pi}{2}}, \quad \alpha > 0, \; a \gtrless {0 \atop 2} \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

Setzt man hier $a = 1 - m$, so ist, da

$$\Gamma(m) \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}, \; \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\Gamma(m) \sin m\pi} = \frac{\pi}{2 \Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2}}:$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty x^{m-1} \cos \alpha x \, \partial x &= \frac{\Gamma(m) \cos \frac{1}{2} m\pi}{\alpha^m}, \\ \int_0^\infty x^{m-1} \sin \alpha x \, \partial x &= \frac{\Gamma(m) \sin \frac{1}{2} m\pi}{\alpha^m}. * \end{aligned}\right\} \alpha > 0, \; m \gtrless {0 \atop 1} \qquad (n)$$

---

* Diese beiden Formeln kommen auf die eine $\int_0^\infty x^{m-1} e^{\alpha x i} \partial x = \frac{\Gamma(m)}{\alpha^m} e^{\frac{m\pi}{2} i}$ zurück, welche dann die Formel (n') für $m = \frac{1}{2}$ sofort liefert.

Setzt man in diesen Formeln $m=\frac{1}{2}$, $\alpha=r^2$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos(r^2x)}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{4}\pi}{r}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(r^2x)}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{4}\pi}{r}.$$

Multiplizirt man die zweite dieser Gleichungen mit i und addirt sie zur ersten, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2xi}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{r},$$

woraus auch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty \frac{e^{r^2xi}}{\sqrt{x}}\partial x. \qquad (n')$$

II. Man setze in der Formel (n') $x=z^2$, so sind die Gränzen von z auch 0 und ∞, und es ist

$$\frac{1}{r} = \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{r^2z^2i}\partial z, \text{ also } \int_0^\infty e^{r^2z^2i}\partial z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{r},$$

und (§. 42, VII):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{rz^2i}\partial z = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{r}}.$$

Setzt man endlich hier noch $z=x+\frac{a}{r}$, wo a beliebig, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(rx^2+2ax+\frac{a^2}{r}\right)i}\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(rx^2+2ax)i}\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, e^{\frac{\pi}{4}i-\frac{a^2}{r}i}. \qquad (n'')$$

Es versteht sich von selbst, dass diese Formel zwei andere umfasst, indem aus ihr unmittelbar folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(rx^2+2ax)\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{r}\right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(rx^2+2ax)\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{r}\right).$$

III. Sey

$$y = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \sin ax\,\partial x, \quad z = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \cos ax\,\partial x,$$

so ergibt sich wie in §. 136, IV für $n>0$:

$$\begin{aligned}(1+a^2)\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + 2(n+1)a\frac{\partial y}{\partial a} + n(n+1)y = 0,\\ (1+a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + 2(n+1)a\frac{\partial z}{\partial a} + n(n+1)z = 0,\end{aligned} \quad z = \frac{1+a^2}{n}\frac{\partial y}{\partial a} + ay.$$

Aus (n) wird geschlossen, dass $y = \frac{C}{(1+ai)^n} + \frac{C'}{(1-ai)^n}$ der ersten Gleichung genügen könne, was wie in §. 136, IV folgt. Thatsächlich ergibt sich diess denn auch leicht.

Aus y folgt $z = \frac{-Ci}{(1+ai)^n} + \frac{C'i}{(1-ai)^n}$, wo C und C' von a unabhängig sind. Da für

$$a=0:\ y=0,\ z=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\partial x=\Gamma(n),$$

so ist

$$0=C+C',\ \Gamma(n)=-Ci+C'i;\ C=-\frac{\Gamma(n)}{2i},\ C'=\frac{\Gamma(n)}{2i},$$

mithin

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\sin ax\,\partial x=\frac{\Gamma(n)}{2i}\left(\frac{1}{(1-ai)^n}-\frac{1}{(1+ai)^n}\right)=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\alpha,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\cos ax\,\partial x=\frac{\Gamma(n)}{2}\left(\frac{1}{(1+ai)^n}+\frac{1}{(1-ai)^n}\right)=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\alpha,$$

wenn

$$r=\sqrt{1+a^2},\ \cos\alpha=\frac{1}{r},\ \sin\alpha=\frac{a}{r},\text{*}$$

und wo $n>0$ seyn muss (§. 85, II).

Setzt man $x=cz$, $c>0$, $ac=b$, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-cx}\sin bx\,\partial x=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\alpha,\ \int_0^\infty x^{n-1}e^{-cx}\cos bx\,\partial x=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\alpha,\qquad (p)$$

wo

$$n>0,\ c>0,\ r=\sqrt{b^2+c^2},\ \cos\alpha=\frac{c}{r},\ \sin\alpha=\frac{b}{r}.$$

Weitere Anwendungen finden sich noch in §. 167, 169, und „Anhang" unter S.

§. 164.

Berechnung der Grösse Γ(a).

I. Aus der Formel (e) des §. 162 geht hervor, dass wenn man den Werth der Funktion $\Gamma(a)$ kennt von $a=0$ bis $a=1$, man denselben auch kennt für alle positiven Werthe von a; während aus der Formel (l) folgt, dass man $\Gamma(a)$ nur von $a=0$ bis $a=\frac{1}{2}$ zu berechnen braucht, um auch die Werthe dieser Funktion von $a=\frac{1}{2}$ bis $a=1$ zu kennen. Demnach genügt es, in $\Gamma(a)$ die unabhängige Grösse $a<\frac{1}{2}$ zu sètzen. (Vergl. §. 165, VI.)

Nun war (§. 162, VI):

$$\Gamma(a)=Gr\frac{1.2.3\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},\ \Gamma(1+a)=Gr\frac{1.2\ldots n.n^a}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

mithin

* Also $1\pm ai=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)$,

$$\frac{1}{(1-ai)^n}=\frac{1}{r^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)}=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{r^n},$$

$$\frac{1}{(1+ai)^n}=\frac{1}{r^n}\,\frac{1}{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}=\frac{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}{r^n},$$

weil $(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)=1$.

$$l\Gamma(1+a) = Gr\left[a\,l(n) - l(1+a) - l\left(\frac{a+2}{2}\right) - \ldots - l\left(\frac{a+n}{n}\right)\right]$$
$$= Gr\left[a\,l(n) - l(1+a) - l\left(1+\frac{a}{2}\right) - \ldots - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],$$

wo *Gr* sich auf ein unendlich wachsendes n bezieht, und nur $1+a>0$ seyn muss.

Setzt man $a<1$, so ist (§. 55, VI):

$$l\left(1+\frac{a}{r}\right) = \frac{a}{r} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{r^3} - \ldots \pm \frac{1}{m}\frac{a^m}{r^m} \mp \frac{1}{m+1}\frac{a^{m+1}}{(r+\Theta a)^{m+1}}, \quad \Theta < 1.$$

Demnach ist

$$l\Gamma(1+a) = Gr\left\{a\,l(n) - \left[\frac{a}{1} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{1^3} - \ldots \pm \frac{1}{m}\frac{a^m}{1^m} \mp \frac{1}{m+1}\frac{a^{m+1}}{(1+\Theta a)^{m+1}}\right]\right.$$
$$- \left[\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{2^3} - \ldots \pm \frac{1}{m}\frac{a^m}{2^m} \mp \frac{1}{m+1}\frac{a^{m+1}}{(2+\Theta a)^{m+1}}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left.- \left[\frac{a}{n} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^3} - \ldots \pm \frac{1}{m}\frac{a^m}{n^m} \mp \frac{1}{m+1}\frac{a^{m+1}}{(n+\Theta a)^{m+1}}\right]\right\},$$

wo alle Θ (ohne gerade gleich zu seyn) unter 1 sind. Demnach ist

$$l\Gamma(1+a) = a\,Gr\left[l(n) - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}a^2\,Gr\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$- \frac{1}{3}a^3\,Gr\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)$$
$$\vdots$$
$$\mp \frac{1}{m}a^m\,Gr\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}\right)$$
$$\pm \frac{1}{m+1}a^{m+1}\,Gr\left(\frac{1}{(1+\Theta a)^{m+1}}+\frac{1}{(2+\Theta a)^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{(n+\Theta a)^{m+1}}\right).$$

Bezeichnet man die Grösse $Gr\left(1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots+\frac{1}{n^r}\right)$ durch S_r, so ist wenn

$$l\Gamma(1+a) = a\,Gr\left[l(n) - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}a^2 S_2 - \frac{1}{3}a^3 S_3 + \ldots \mp \frac{1}{m}a^m S_m \qquad (q)$$

gesetzt wird, der Fehler gleich der letzten Zeile obigen Ausdrucks. Dieselbe ist aber sicher kleiner als

$$\frac{1}{m+1}a^{m+1}\,Gr\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{n^{m+1}}\right) = \frac{1}{m+1}a^{m+1}S_{m+1},$$

so dass der Fehler kleiner als diese Grösse, und von entgegengesetztem Zeichen mit dem letzten Gliede in (q) ist.

II. Wir haben nun zu zeigen, dass sich die Grössen in (q) berechnen lassen. Was zunächst $l(n)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, so ist, wie aus §. 55 sofort folgt, für $a<1$: $a>l(1+a)$, $\frac{1}{r}>l\left(1+\frac{1}{r}\right)$, so dass

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>1+l\left(1+\frac{1}{2}\right)+l\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$>1+l\left(\frac{3}{2}\right)+l\left(\frac{4}{3}\right)+\ldots+l\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ d. h.}$$

$$>1+l\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right),$$

oder

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>1+l\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-l(n)>1+l\left(\frac{n+1}{2n}\right) \text{ oder } >1+l\left(1+\frac{1}{n}\right)-l(2).$$

Setzt man $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-l(n)=f(n)$, so ist

$$f(n+1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}-l(n+1)$$

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}-l\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+l\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right] \text{ (§. 54)}$$

so dass $f(n+1)<f(n)$, also $f(n)$ abnimmt mit wachsendem n. Demnach ist $f(n)$ am grössten für $n=1$, wo es 1 ist, und da $f(n)>1-l(2)+l\left(1+\frac{1}{n}\right)$, so liegt $f(n)$ immer zwischen 1 und $1-l(2)+l\left(1+\frac{1}{n}\right)$, also

$$Gr\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-l(n)\right] \text{ zwischen 1 und } 1-l(2)=0{\cdot}3068528.$$

Wir setzen diesen Gränzwerth $=k$.

III. Die Reihe $1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots$ ist immer konvergent (§. 57) wenn $r>1$. Da ihre sämmtlichen Glieder positiv sind, so kann sie sich, wenn sie endlich ist, nur einem einzigen bestimmten Werthe nähern (§. 60, IV), so dass wir bloss zu zeigen haben, dass diese Grösse endlich sey.

Nun ist

$$1=1$$

$$2\frac{1}{2^r}>\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r},$$

$$4\frac{1}{4^r}>\frac{1}{4^r}+\frac{1}{5^r}+\frac{1}{6^r}+\frac{1}{7^r},$$

$$8\frac{1}{8^r}>\frac{1}{8^r}+\frac{1}{9^r}+\ldots\ldots+\frac{1}{15^r},$$

$$\vdots$$

so dass

$$1+\frac{2}{2^r}+\frac{4}{4^r}+\frac{8}{8^r}+\ldots>1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\ldots,$$

mithin die Summe der vorgelegten Reihe immer kleiner als

$$1+\frac{1}{2^{r-1}}+\frac{1}{4^{r-1}}+\frac{1}{8^{r-1}}+\ldots,\ \text{d. h.} <1+\frac{1}{2^{r-1}}+\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^3+\ldots\ .$$

Ist nun $\frac{1}{2^{r-1}}<1$, d. h. $r>1$, so ist die letzte Reihe, als eine geometrische, endlich (§. 6, II), also auch die vorgelegte. (Vergl. Anhang 𝔄, III.) Demnach sind die Grössen $S_2, \ldots S_m$ in (q) sämmtlich endlich.

Man findet

$S_2=1{\cdot}64493407$, $S_3=1{\cdot}20205690$, $S_4=1{\cdot}08232323$, $S_5=1{\cdot}03692775$,
$S_6=1{\cdot}01734306$, $S_7=1{\cdot}00834928$, $S_8=1{\cdot}00407736$, $S_9=1{\cdot}00200839$,
$S_{10}=1{\cdot}00099457$, $S_{11}=1{\cdot}00049419$, $S_{12}=1{\cdot}00024609$, $S_{13}=1{\cdot}00012271$.

IV. Nunmehr hat man

$$l\Gamma(1+a)=-ak+\frac{1}{2}S_2a^2-\frac{1}{3}S_3a^3+\ldots\mp\frac{1}{m}S_ma^m,$$

wo der Fehler $<\pm\frac{1}{m+1}S_{m+1}a^{m+1}$. Da $l(1+a)=a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\ldots$, so ist auch

$$l\Gamma(1+a)=a(1-k)-l(1+a)+\frac{1}{2}(S_2-1)a^2-\frac{1}{3}(S_3-1)a^3+\ldots$$
$$\mp\frac{1}{m}(S_m-1)a^m, \qquad \text{(r)}$$

wo der Fehler $<\pm\frac{1}{m+1}(S_{m+1}-1)a^{m+1}$.

Man kann jedoch noch eine zweite Formel daneben stellen, die vielleicht etwas bequemer ist.

Man hat, wenn nur a zwischen -1 und $+1$:

$$l\Gamma(1+a)=(1-k)a-l(1+a)+\frac{1}{2}(S_2-1)a^2-\frac{1}{3}(S_3-1)a^3+\ldots,$$

$$l\Gamma(1-a)=-(1-k)a-l(1-a)+\frac{1}{2}(S_2-1)a^2+\frac{1}{3}(S_3-1)a^3+\ldots,$$

wo man die Reihen ins Unendliche gehen lassen darf, da sie konvergent sind. Daraus folgt

$$l\Gamma(1+a)+l\Gamma(1-a)=-l(1-a^2)+(S_2-1)a^2+\frac{1}{2}(S_4-1)a^4+\ldots,$$

d. h. da $\Gamma(1+a)=a\Gamma(a)$, $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$, es ist $\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{a\pi}{\sin a\pi}$, also

$$l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)=-l(1-a^2)+(S_2-1)a^2+\frac{1}{2}(S_4-1)a^4+\ldots,$$

und mithin

$$l\Gamma(1+a)=(1-k)a-l(1+a)+\frac{1}{2}l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)+\frac{1}{2}l(1-a^2)-\frac{1}{3}(S_3-1)a^3-\frac{1}{5}(S_5-1)a^5$$
$$-\ldots=(1-k)a+\frac{1}{2}l\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\frac{1}{2}l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)-\frac{1}{3}(S_3-1)a^3-\frac{1}{5}(S_5-1)a^5-\ldots.$$

Die Formel (r) gibt für $a = 1$, also $\Gamma(1+a) = 1$:

$$0 = 1 - k - l(2) + \frac{1}{2}(S_2 - 1) - \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \ldots,$$

$$k = 1 - l(2) + \frac{1}{2}(S_2 - 1) - \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \ldots,$$

welche Formel zur Berechnung von k dienen kann. Man findet $k = 0{\cdot}57721566$. Die obigen Formeln setzen a zwischen -1 und $+1$ voraus. Da aber $\Gamma(1+a) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(1+a)}{a}$, so ist, wenn man a von 0 bis $\frac{1}{2}$ gehen lässt, damit auch $\Gamma(x)$ von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ gegeben. Tafeln hat Legendre berechnet; sie sind dem 2[ten] Bande seines: „Traité des fonctions elliptiques et des Intégrales Eulériennes" beigegeben.

V. Wir bemerken hier gelegentlich, unter Bezugnahme auf die Reihe (r), dass wenn eine unendliche Reihe abnehmend ist und wechselnde Vorzeichen hat, der Fehler den man begeht, wenn man die Reihe irgend wo schliesst, immer geringer ist als das folgende Glied.

Denn sey

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \ldots \quad (s)$$

die Reihe und man schliesse mit dem Gliede $\pm u_n$, so ist der Rest gleich

$$\mp u_{n+1} \pm (u_{n+2} - u_{n+3}) \pm (u_{n+4} - u_{n+5}) \pm \ldots$$
$$= \mp [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots].$$

Die eingeklammerte Grösse ist, da $u_{n+2} - u_{n+3}$, $u_{n+4} - u_{n+5}$, ... positiv sind, kleiner als u_{n+1}; sie ist aber positiv, da sie $= (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots$ und diese Differenzen ebenfalls alle positiv sind. Demnach ist der Rest zwischen 0 und u_{n+1} enthalten, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Ist also $Gr\, u_{n+1} = 0$ (mit wachsendem n), so ist die unendliche Reihe (s) konvergent. So ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

konvergent, während die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

nicht konvergent ist, welch letztere Behauptung sich leicht erweisen lässt. Wäre nämlich die letzte Reihe konvergent, so müsste wenn S ihre Summe und

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + R_n : Gr\, R_n = 0$$

seyn. Aber

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}, \text{ d. h. } > \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

so dass $Gr\, R_n > \frac{1}{2}$ und nicht 0. (Vergl. „Anhang" unter 𝔄, I, III.)

§. 165.

Gränzwerth von $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)$.

I. Man setze in der Gleichung (35) des §. 65: $F(x) = l(x)$, $a > 0$, $h = 1$ also $b = a + n$, so sind die dortigen Bedingungen erfüllt und mithin

$$\int_a^{a+n} l(x)\,\partial x = l(a) + l(a+1) + l(a+2) + .. + l(a+n-1) + \frac{1}{2}[l(a+n) - l(a)]$$
$$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{360}\left(\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{\Theta}{360}\left(\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3}\right),$$

wo Θ zwischen — 1 und + 1. Will man diese Form nicht, so hätte sich eben so aus §. 65, II ableiten lassen:

$$\int_a^{a+n} l(x)\,\partial x = l(a) + l(a+1) + \ldots + l(a+n-1) + \frac{1}{2}[l(a+n) - l(a)]$$
$$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a}\right) + \frac{\Theta}{192}\left(\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3}\right),$$

wo Θ zwischen 0 und 1, unter welcher Form wir die Gleichung anwenden wollen.

Da (§. 27, I)

$$\int l(x)\,\partial x = x\,l(x) - x, \quad \int_a^{a+n} l(x)\,\partial x = (a+n)\,l(a+n) - a\,l(a) - n,$$

so folgt daraus:

$$l(a) + l(a+1) \ldots + l(a+n-1) = (a+n)\,l(a+n) - n - \frac{1}{2}\,l(a+n)$$
$$+ \frac{1}{12(a+n)} - \frac{\Theta}{192(a+n)^3} + \left(\frac{1}{2}\,l(a) - a\,l(a) - \frac{1}{12a} + \frac{\Theta}{192a^3}\right),$$

wo die letzte Grösse von n nicht abhängt, so dass wir sie etwa mit $l(C)$ bezeichnen können, wo C nur von a abhängt. Dadurch hat man

$$l(a) + l(a+1) + \ldots + l(a+n-1) = \left(a + n - \frac{1}{2}\right) l(a+n) - n$$
$$+ \frac{1}{12(a+n)} - \frac{\Theta}{192(a+n)^3} + l(C),$$

also wenn man zu den Zahlen übergeht:

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) = C\,e^{-n}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{12(a+n)}}\,e^{\frac{-\Theta}{192(a+n)^3}}, \qquad (a)$$

wo Θ zwischen 0 und 1 liegt.

II. Aus (a) folgt

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)\,n^a}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} = \frac{1.2\ldots(n-1)\,n^a\,e^n}{(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{C}\,e^{-\frac{1}{12(a+n)}}\,e^{\frac{\Theta}{192(a+n)^3}}$$

also, wenn man §. 162, VI beachtet, ferner bemerkt, dass $(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}} = n^{a+n-\frac{1}{2}}$ $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \left(1+\frac{a}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}}$, und $Gr\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ (§. 8), $Gr\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}} = 1$:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{C}\,e^{-a}\,Gr\,\frac{1.2\ldots(n-1)\,n^a\,e^n}{n^{a+n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{C}\,e^{-a}\,Gr\,\frac{1.2\ldots(n-1)\,e^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man also

---

* Man kann freilich sagen, dass Θ von den Gränzen des Integrals abhängen werde; diese Grösse gehört aber zu dem Restgliede (§. 52, II) und tritt nur dann in die Rechnung, wenn man die Reihe schliessen will. Die Angaben bleiben also in voller Kraft.

$$Gr\frac{1.2\ldots(n-1)\,e^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}=E, \qquad (b)$$

so ist

$$C=\frac{E\,e^{-a}}{\Gamma(a)},$$

und also

$$a(a+1)(a+2)\ldots.(a+n-1)=\frac{E}{\Gamma(a)}e^{-(n+a)}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12(a+n)}}e^{-\frac{\Theta}{192(a+n)^3}}, \qquad (a')$$

wo E unabhängig von a und n ist.

III. Um nun E zu bestimmen beachten wir, dass für $a=\frac{1}{2}$ aus (a′) folgt (§. 162, III):

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}=\frac{E}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2n+1}{2}}(n+\tfrac{1}{2})^n e^{\frac{1}{6(2n+1)}}e^{-\frac{\Theta}{24(2n+1)^3}},$$

woraus

$$Gr\frac{3.5\ldots(2n-1)\,e^{n+\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})^n 2^n}=\frac{E}{\sqrt{\pi}},\quad E=\sqrt{\pi}\,Gr\frac{3.5\ldots(2n-1)\,e^n e^{\frac{1}{2}}}{2^n n^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}$$

$$=\sqrt{\pi}\,Gr\frac{3.5\ldots(2n-1)\,e^n}{2^n n^n}. \qquad (c)$$

Aber die (b) ist auch:

$$Gr\frac{2.4.6\ldots 2n\,e^n}{2^n n^{n-\frac{1}{2}}n}=E,\quad \text{d. h. } Gr\frac{2.4.6\ldots 2n\,e^n}{2^n n^{n+\frac{1}{2}}}=E,$$

und wenn man 2n statt n in ihr setzt:

$$Gr\frac{1.2.3\ldots.2n\,e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}=E=Gr\frac{1.2.3\ldots.2n\,e^{2n}}{2^{2n}2^{\frac{1}{2}}n^{2n}n^{\frac{1}{2}}},$$

so dass durch Division:

$$1=\frac{Gr\dfrac{1.2.3\ldots 2n\,e^{2n}}{2^{2n}2^{\frac{1}{2}}n^{2n}n^{\frac{1}{2}}}}{Gr\dfrac{2.4\ldots.2n\,e^n}{2^n n^{n+\frac{1}{2}}}}=Gr\frac{3.5\ldots(2n-1)\,e^n}{2^n 2^{\frac{1}{2}}n^n},$$

$$\sqrt{2}=Gr\frac{3.5\ldots(2n-1)\,e^n}{2^n n^n}=\frac{E}{\sqrt{\pi}}, \text{ nach (c).}$$

Demnach

$$E=\sqrt{2\pi},\quad Gr\frac{1.2\ldots(n-1)\,e^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}, \qquad (d)$$

und endlich

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}e^{-(a+n)}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12(a+n)}}e^{-\frac{\Theta}{192(a+n)^3}}. \qquad (A)$$

IV. Daraus folgt also, dass

$$Gr\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{e^{-(a+n)}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)},$$

oder da

$$(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}=n^{a+n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}}:$$

$$Gr\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)e^n}{n^{a+n-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}. \qquad (e)$$

Für $a=1$ erhält man daraus die (d); für $a=\frac{1}{2}$ die vor (d) stehende Gleichung.

Man schliesst hieraus auch, dass für sehr grosse n nahezu:

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}n^{a+n-\frac{1}{2}}e^{-n},$$

$$1.2.3\ldots\ldots n=\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}=\sqrt{2n\pi}\,e^{-n}n^n,$$

$$1.3.5\ldots\ldots(2n-1)=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n}$$

sey, von welchen Formeln in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Gebrauch gemacht wird. (Vergl. etwa meine „Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen" S. 77 ff.)

V. Will man etwas genauere Formeln haben, so folgt aus (A), wenn man $\frac{1}{192(a+n)^3}$ vernachlässigt, für $a=1, \frac{1}{2}$:

$$1.2.3\ldots n=\sqrt{2\pi}\,e^{-(n+1)}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12(n+1)}},$$

$$1.3.5\ldots(2n-1)=\sqrt{2}(2n+1)^n e^{-\frac{2n+1}{2}}e^{\frac{1}{6(2n+1)}}.$$

Setzt man hier $n-1$ für n:

$$1.2.3\ldots(n-1)=\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12n}},\quad 1.2.3\ldots n=\sqrt{2n\pi}\,e^{-n}n^n e^{\frac{1}{12n}};$$

$$1.3.5\ldots(2n-3)=\sqrt{2}(2n-1)^{n-1}e^{-\frac{2n-1}{2}}e^{\frac{1}{6(2n-1)}},$$

$$1.3.5\ldots(2n-1)=\sqrt{2}(2n-1)^n e^{-\frac{2n-1}{2}}e^{\frac{1}{6(2n-1)}}.$$

Berechnung von $\Gamma(1+\alpha)$ bei grossem α.

VI. Wegen der Gleichung (c) in §. 162 liefert die (A) auch ($a>0$):

$$(1+a)(2+a)\ldots(n-1+a)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+a)}e^{-(a+n)}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12(a+n)}}e^{-\frac{\Theta}{192(a+n)^3}},$$

woraus

$$l(1+a)+\ldots+l(n-1+a)=\tfrac{1}{2}l(2\pi)-l\Gamma(1+a)-(a+n)+(a+n-\tfrac{1}{2})l(a+n)$$
$$+\frac{1}{12(a+n)}-\frac{\Theta}{192(a+n)^3},$$

und

$$l\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) - l(1+a) - l(2+a) - \ldots - l(n-1+a) + (a+n-\tfrac{1}{2})l(a+n) - (a+n) + \frac{1}{12(a+n)} - \frac{\Theta}{192(a+n)^3}.$$

Setzt man hier n a für a, so ergibt sich

$$l\Gamma(1+na) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) - l(1+na) - l(2+na) - \ldots - l(n-1+na) + (na+n-\tfrac{1}{2})l(na+n) - (na+n) + \frac{1}{12(na+n)} - \frac{\Theta}{192(na+n)^3}.$$

Da aber (§. 162, II):

$$\Gamma(1+na+n) = \Gamma(1+an).(na+n)(na+n-1)\ldots(na+1),$$
$$l\Gamma(1+na+n) = l\Gamma(1+an) + l(na+n) + l(na+n-1)\ldots + l(na+1),$$

so folgt aus vorstehender Gleichung:

$$l\Gamma(1+na+n) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + l(na+n) + (na+n-\tfrac{1}{2})l(na+n) - (na+n) + \frac{1}{12(na+n)} - \frac{\Theta}{192(na+n)^3},$$

und wenn nun $na+n=\alpha$:

$$l\Gamma(1+\alpha) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + l(\alpha) + (\alpha-\tfrac{1}{2})l(\alpha) - \alpha + \frac{1}{12\alpha} - \frac{\Theta}{192\alpha^3},$$

d. h.

$$\Gamma(1+\alpha) = \sqrt{2\alpha\pi}\,\alpha^\alpha\, e^{-\alpha}\, e^{\frac{1}{12\alpha}}\, e^{-\frac{\Theta}{192\alpha^3}}, \qquad \text{(f)}$$

wo Θ zwischen 0 und 1. Ist α sehr gross, so dass man $e^{-\frac{1}{192\alpha^3}}$ unbedenklich $=1$ setzen kann, so hat man einfach

$$l\Gamma(1+\alpha) = \tfrac{1}{2}l(2\alpha\pi) + \alpha\, l(\alpha) - \alpha + \frac{1}{12\alpha}, \text{*}$$

woraus $\Gamma(1+\alpha)$ berechnet werden kann. Kennt man aber $\Gamma(a)$ für grosse a, so kennt man diese Grösse auch für kleine a (§. 162, II).

§. 166.

Integrallogarithmus, Integralsinus, Integralcosinus.

So wie in §. 162 die Eulerschen Integrale (Gammafunktionen) als eine besondere Gattung Funktionen in die Analysis eingeführt wurden, hat man noch einige andere ähnliche eingeführt, über welche wir zum Schlusse dieses Abschnitts noch Weniges zufügen wollen.

---

* Dazu gehört, dass etwa $\frac{1}{192\alpha^3} < 0{\cdot}000\,000\,001$, wenn man 7 Dezimalen genau haben will. Dann ist $\alpha^3 > \frac{1}{0{\cdot}000\,000\,192}$, d. h. $\alpha > \sqrt[3]{\frac{1\,000\,000\,000}{192}}$, $\alpha > 174$ zu setzen. Lässt man also α von 174 bis 175 gehen, so kann man alle Werthe von $\Gamma(a)$ als berechnet ansehen (§. 162, II; 164, I). Nimmt man noch grössere Werhe von α, so erhält man die Resultate noch genauer. [Die Formel folgt auch aus (A) für $a+n=\alpha$.]

I. Das Integral

$$\int_0^x \frac{\partial z}{l(z)}$$

heisst der **Integrallogarithmus** und wird durch $li(x)$ bezeichnet. Da für $z=1$: $l(z)=0$, so darf x nicht über 1 hinausgehen. Setzt man hier $z=e^{-u}$, so erhält man

$$li(e^{-u}) = -\int_\infty^u \frac{e^{-u}\,\partial u}{-u} = -\int_u^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z,\ u>0.$$

Demgemäss

$$li(e^{-u}) - li(e^{-n}) = -\int_u^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z + \int_n^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z = \int_n^u \frac{e^{-z}}{z}\partial z,$$

wo wir etwa unter n eine positive ganze Zahl verstehen wollen. Entwickelt man $\frac{e^{-z}}{z}$ in eine unendliche Reihe, so folgt hieraus (§. 57, §. 54, III)

$$li(e^{-u}) - li(e^{-n}) = l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots - [l(n) - n + \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{n^3}{1.2.3} + \ldots]$$

$$= l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots - [l(n) - \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z].$$

Lässt man hier n immer mehr wachsen, so nähert sich $li(e^{-n})$ unbegränzt der Grösse $li(0)=0$, so dass

$$li(e^{-u}) = l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots + Gr\left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z - l(n)\right],$$

wo *Gr* sich auf das unendliche Wachsen von n bezieht. Nun ist aber identisch

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\partial z - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\partial z;$$

ferner ist (§. 55, VIII) $e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{1.2}e^{-\Theta z}$, also immer $e^{-z} > 1-z$, so dass wenn $z<1$ auch $e^{-nz} > (1-z)^n$, ob n gerade oder ungerade ist; das Integral $\int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\partial z$ ist also sicher >0. Da weiter für $a>b$; $a^{n+1} - b^{n+1} < (n+1)a^n(a-b)$,* so ist wenn man $a=e^{-z}$, $b=1-z$, und $n-1$ für n setzt: $e^{-nz} - (1-z)^n < n\,e^{-(n-1)z}[e^{-z} - (1-z)]$, $\frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z} < n\,e^{-nz}\frac{e^z}{z}[e^{-z} - (1-z)]$, d. h. da $e^{-z} - (1-z) = \frac{z^2}{1.2}e^{-\Theta z}$ kleiner als $\frac{z^2}{2}$, es ist $\frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}$

---

* Es ist identisch $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$. Ist nun $a>b$, so ist die zweite Seite $< a^n + a^{n-1}a + a^{n-2}a^2 + \ldots + a^n$, d. h. $<(n+1)a^n$, so dass alsdann

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n,\quad a^{n+1} - b^{n+1} < (n+1)a^n(a-b),$$

wobei wir, um keinerlei Schwierigkeit zu begegnen, a und b positiv annehmen wollen, was für unsere Anwendung, in der immer $z<1$, genügt.

$< \frac{n z e^z e^{-nz}}{2}$ mithin $\int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} \partial z < \frac{n}{2} \int_0^1 z e^{z-nz} \partial z$, d. h. $< -n \frac{e^{-(n-1)}}{2} \left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} \right] + \frac{n}{2} \frac{1}{(n-1)^2}$, und da letztere Grösse mit wachsendem n verschwindet, so ist $Gr \int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} \partial z = 0$. Ferner ist für $1 - z = u$:

$$\int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z} \partial z = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} \partial u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

so dass endlich

$$Gr \left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} \partial z - l(n) \right] = Gr \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - l(n) \right] = 0{\cdot}57721566$$

(= k in §. 164),

und also

$$l i (e^{-u}) = l(u) - u + \frac{1}{2} \frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{1.2.3} - \frac{1}{4} \frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots + k.$$

Setzt man noch $e^{-u} = x$, so ist für $x \gtrless {0 \atop 1}$:

$$l i (x) = k + l[-l(x)] + l(x) + \frac{1}{2} \frac{l(x)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \frac{l(x)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Auf den Integrallogarithmus lassen sich manche andere Integrale zurückführen. So ist für $a(1+x) = z$ und $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x} \partial x = e^a \int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z} \partial z = -e^a l i (e^{-a}).$$

II. Das bestimmte Integral

$$\int_0^x \frac{\sin z}{z} \partial z$$

heisst der Integralsinus und wird durch $Si(x)$ bezeichnet. Entwickelt man $\sin z$ in eine unendliche Reihe, so ist hiernach

$$Si(x) = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{1\ldots5} - \ldots$$

Eben so heisst das Integral

$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z} \partial z$$

der Integralcosinus und wird durch $Ci(x)$ bezeichnet. Hiebei muss natürlich $x > 0$ seyn. Will man für diese Grösse eine unendliche Reihe haben, so beachte man, dass

$$\int_x^n \frac{\cos z}{z} \partial z = l(n) - \frac{1}{2} \frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{4} \frac{n^4}{1..4} - \ldots - \left[l(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{1..4} - \ldots \right],$$

so dass

$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z} \partial z = Gr \left[l(n) - \frac{1}{2} \frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{4} \frac{n^4}{1..4} - \ldots \right] - \left[l(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{1..4} - \ldots \right].$$

Nun ist aber

$$-\frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2}+\frac{1}{4}\frac{n^4}{1..4}-..=-\int_0^n\frac{1-\cos z}{z}\partial z=-\int_0^n\frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z-\int_0^n\frac{1-e^{-z}}{z}\partial z=$$

$$-\int_0^n\frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z-\int_0^1\frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z,$$

also

$$Gr\left[l(n)-\frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2}+\ldots\right]=Gr\left[l(n)-\int_0^1(1-e^{-nz})\frac{\partial z}{z}\right]-Gr\int_0^n\frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z=$$

$$=-0{\cdot}57721566-\int_0^\infty\frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z.$$

Betrachten wir aber das Integral $\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z$ und setzen dasselbe $=u$, so ist (§. 85):

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\int_0^\infty e^{-az}\sin\alpha z\,\partial z=\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},\quad u=\int\frac{\alpha\,\partial\alpha}{\alpha^2+a^2}=\frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2)+C,$$

so dass

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z=\frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2)+C.$$

Ganz eben so ist

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\int_0^\infty e^{-az}\cos\alpha z\,\partial z=\frac{a}{a^2+\alpha^2},\quad u=\int\frac{a\,\partial a}{a^2+\alpha^2}=\frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2)+C'.$$

wo C von α, C′ von a unabhängig ist. Da aber $C=C'$ seyn muss, so sind also C und C′ von a und α unabhängig. Setzt man demnach $a=0$, so ist

$$\frac{1}{2}l(\alpha^2)+C=\int_0^\infty\frac{e^{-z}-\cos\alpha z}{z}\partial z,$$

und für $\alpha=0$:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}}{z}\partial z=\frac{1}{2}l(a^2)+C,$$

wo C von a unabhängig ist. Demnach für $a=1$, wo $\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}}{z}\partial z=0$, auch $\frac{1}{2}l(1)+C=0$, $C=0$. Also ist allgemein $C=0$ und

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z=\frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2),$$

für $\alpha=1$:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}\cos z}{z}\partial z=\frac{1}{2}l(a^2+1),$$

und da für $a=0$ die Grösse erster Seite noch endlich ist, überdiess $\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-az}\cos z}{z}\partial z$ eine stetige Funktion von a ist, (indem $\frac{\partial u}{\partial a}$ endlich ist), so ist für $a=0$:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z=0,$$

so dass

$$Gr\left[l(n)-\frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2}+\ldots\right]=-k\,(=-0{\cdot}5772156..),$$

also

$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z} \partial z = Ci(x) = -k - l(x) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{1..4} + \frac{1}{6}\frac{x^6}{1..6} - \dots$$

Es ist aus §. 35 klar, dass die Integrale $\int_a^b \frac{\sin x}{x^m} \partial x$, $\int_a^b \frac{\cos x}{x^m} \partial x$ auf die eben angegebenen Integrale zurückkommen.

Setzt man in $\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1+x} \partial x$, wo $a > 0 : x = \frac{z}{a} - 1$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1+x} \partial x = \int_a^\infty \frac{\sin(z-a)}{\frac{z}{a}} \frac{\partial z}{a} = \cos a \int_a^\infty \frac{\sin z}{z} \partial z - \sin a \int_a^\infty \frac{\cos z}{z} \partial z$$

$$= \cos a \left[\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \partial z - \int_0^a \frac{\sin z}{z} \partial z\right] - \sin a \int_a^\infty \frac{\cos z}{z} \partial z$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - Si(a)\right] \cos a - Ci(a) \sin a.$$

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Reduktion vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden.

§. 167.

Das Integral $\int\int .. f(x+y+..) x^{a-1} y^{b-1} .. \partial x \partial y \dots$

I. Es wird die Aufgabe gestellt, das vielfache bestimmte Integral

$$\int\int\int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} .. f(x+y+z+..) \partial x \partial y \partial z .. \qquad (a)$$

zu ermitteln, in welchem die Gränzen von x, y, z, .. so gewählt sind, dass x, y, z, .. alle positiven Werthe erhalten, für welche

$$x+y+z+\dots \leqq k, \qquad (b)$$

wo k eine positive Grösse ist.

II. Um zum Ziele zu gelangen, betrachten wir zuerst nur den Fall zweier Veränderlichen, d. h. suchen das Integral

$$\int\int x^{a-1} y^{b-1} f(x+y) \partial x \partial y,\quad x+y \leqq k \qquad (c)$$

zu bestimmen. Es ist klar, dass man den Gränzbestimmungen entsprechen wird, wenn man y von 0 bis k − x, und zugleich x von 0 bis k gehen lässt, so dass man also das Integral

$$\int_0^k x^{a-1} \partial x \int_0^{k-x} y^{b-1} f(x+y) \partial y \qquad (d)$$

zu ermitteln hat.

Nach §. 78, IV ist dieses Integral gleich

$$\int_0^k x^{a-1}(k-x)^b\,\partial x \int_0^1 y^{b-1} f[x+(k-x)y]\,\partial y = \int_0^1 y^{b-1}\,\partial y \int_0^k x^{a-1}(k-x)^b f[x+(k-x)y]\,\partial x.$$

In dem Integrale $\int_0^k x^{a-1}(k-x)^b f[x+(k-x)y]\,\partial x$ führen wir eine Veränderliche u ein, so dass $u[x+(k-x)y]=x$; alsdann sind die Gränzen von u: 0 und 1; ferner $x=\frac{k y u}{1+u y-u}$, so dass zu jedem Werthe von u ein einziger Werth von x und zu jedem von x ein einziger von u gehört. Dann ist $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{k y}{(1+u y-u)^2}$, und $k-x=\frac{k(1-u)}{1+u y-u}$, so dass

$$\int_0^k x^{a-1}(k-x)^b f[x+(k-x)y]\,\partial x = k^{a+b}\int_0^1 \frac{y^a\, u^{a-1}(1-u)^b}{(1+u y-u)^{a+b+1}} f\left[\frac{k y}{1+u y-u}\right]\partial u,$$

und das vorgelegte Integral:

$$k^{a+b}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^b\,\partial u \int_0^1 \frac{y^{a+b-1}}{(1+u y-u)^{a+b+1}} f\left(\frac{k y}{1+u y-u}\right)\partial y.$$

Führt man für y die Veränderliche v ein, so dass $\frac{k y}{1+u y-u}=v$, also $y=\frac{v(1-u)}{k-u v}$, $1+u y-u=\frac{k(1-u)}{k-u v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{k(1-u)}{(k-u v)^2}$, so ist das Integral:

$$k^{a+b}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^b\,\partial u \frac{1}{k^{a+b}}\int_0^k \frac{v^{a+b-1}}{1-u} f(v)\,\partial v = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,\partial u \int_0^k v^{a+b-1} f(v)\,\partial v$$
$$= \int_0^k v^{a+b-1} f(v)\,\partial v \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,\partial u \text{ (vergl. §. 168, II, 2)},$$

so dass nach (i) in §. 162, V das Integral (d) gleich

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^k u^{a+b-1} f(u)\,\partial u,\ a>0,\ b>0. \qquad (d')$$

III. Geht man nun zu dem Falle dreier Veränderlichen über, so dass dann $x+y+z \overline{\overline{<}} k$ seyn soll, so wird wieder x von 0 bis k gehen, während $y+z \overline{\overline{<}} k-x$ ist. Setzt man also $k-x=k'$, so ist $y+z \overline{\overline{<}} k'$, d. h. y geht von 0 bis k', z von 0 bis $k'-y$, mithin ist

$$\iiint x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \int_0^k x^{a-1}\,\partial x \int_0^{k'} y^{b-1}\,\partial y \int_0^{k'-y} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial z.$$

Nach (d') ist aber:

$$\int_0^{k'} y^{b-1}\,\partial y \int_0^{k'-y} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial z = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^{k'} u^{b+c-1} f(x+u)\,\partial u,$$

so dass

$$\iiint x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^k x^{a-1}\,\partial x \int_0^{k-x} u^{b+c-1} f(x+u)\,\partial u,$$

woraus nun unter Anwendung derselben Formel:

$$\iiint x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^k u^{a+b+c-1} f(u)\,\partial u,$$

und mithin allgemein

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^k u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\,\partial x, \qquad \text{(A)}$$

wo x, y, z, ... alle positiven Werthe haben, für welche $x+y+z+\ldots \overline{\overline{<}}\, k$, und a, b, c, ... positiv sind.

Für $f(x+y+z+\ldots)=1$, folgt hieraus

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)}\;\frac{k^{a+b+c+\ldots}}{a+b+c+\ldots}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots k^{a+b+c+\ldots}}{\Gamma(1+a+b+c+\ldots)}, \qquad \text{(A')}$$

worin $a>0,\ b>0,\ c>0,\ \ldots$

IV. Setzt man in der Formel (A) $x=\left(\frac{x'}{m}\right)^\alpha$, $y=\left(\frac{y'}{n}\right)^\beta$, $z=\left(\frac{z'}{r}\right)^\gamma$, ..., wo m, n, r, ..., α, β, γ, ... bestimmte positive Konstanten sind, und formt das bestimmte Integral um, was hier geradezu nach §. 42, IV geschehen kann, indem jede der frühern Veränderlichen durch eine einzige neue ersetzt ist, so erhält man statt des Integrals in (A):

$$\iiint \ldots \left(\frac{x'}{m}\right)^{a\alpha-\alpha} \left(\frac{y'}{n}\right)^{b\beta-\beta} \left(\frac{z'}{r}\right)^{c\gamma-\gamma} \ldots f\left[\left(\frac{x'}{m}\right)^\alpha + \left(\frac{y'}{n}\right)^\beta + \left(\frac{z'}{r}\right)^\gamma + \ldots\right]$$

$$\alpha\left(\frac{x'}{m}\right)^{\alpha-1} \beta\left(\frac{y'}{n}\right)^{\beta-1} \gamma\left(\frac{z'}{r}\right)^{\gamma-1} \ldots \frac{\partial x'}{m}\,\frac{\partial y'}{n}\,\frac{\partial z'}{r} \ldots,$$

so dass also, wenn man die Accente weglässt:

$$\iiint \ldots \left(\frac{x}{m}\right)^{a\alpha-1} \left(\frac{y}{n}\right)^{b\beta-1} \left(\frac{z}{r}\right)^{c\gamma-1} \ldots \times$$

$$f\left[\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{n}\right)^\beta + \left(\frac{z}{r}\right)^\gamma + \ldots\right] \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{mnr\ldots}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots =$$

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^k u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\,\partial u,$$

oder endlich, wenn man $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, ... an die Stelle von a, b, c, ... setzt:

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f\left[\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{n}\right)^\beta + \left(\frac{z}{s}\right)^\gamma + \ldots\right] \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

$$= \frac{m^a n^b r^c \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots}\;\frac{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots\right)} \int_0^k u^{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\cdots-1} f(u)\,\partial u,$$

$$\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{n}\right)^\beta+\left(\frac{z}{r}\right)^\gamma+\ldots \overline{\overline{<}} k,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0, \ldots{}^* \quad (B)$$

V. Setzt man in dieser Formel $k=\infty$, so sind die Gränzen von x, y, z, ... Null und ∞, und es ist

$$\iiint_0^\infty \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f\left[\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{n}\right)^\beta+\left(\frac{z}{r}\right)^\gamma+\ldots\right] \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

$$=\frac{m^a n^b c^r \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots\right)} \int_0^\infty u^{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots-1} f(u)\, \partial u,$$

wo also a, b, c, ..., α, β, γ, ..., m, n, r, .. positive Konstanten sind.

Setzt man $m^\alpha=\frac{1}{a_1}$, $n^\beta=\frac{1}{a_2}$, $r^\gamma=\frac{1}{a_3}$, .. wo also a_1, a_2, a_3, ... positiv sind, so ergibt sich:

$$\iiint_0^{+\infty} \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f[a_1 x^\alpha + b_1 y^\beta + c_1 z^\gamma + \ldots]\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots a_1^{\frac{a}{\alpha}} b_1^{\frac{b}{\beta}} c_1^{\frac{c}{\gamma}}\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots\right)} \int_0^\infty u^{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots-1} f(u)\, \partial u,$$

wo alle Konstanten positiv sind.

VI. Spezialisirt man in den wichtigen Formeln (A) und (B) die Funktion $f(u)$, so kann man leicht eine Menge weiterer Formeln daraus ableiten.

So folgt aus (B) für $f(u)=\frac{1}{\sqrt{1-u}}$, $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=2$, $m=n=r=\ldots=1$, $a=b=c=\ldots=1$:

$$\iiint \ldots \frac{\partial x\, \partial y\, \partial z \ldots}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{1-u}}\, \partial u,\quad x^2+y^2+z^2+\ldots \overline{\overline{<}} 1,$$

wenn n die Anzahl der Veränderlichen ist.

Das hier noch vorkommende Integral wird für $u=v^2$ geben

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{n}{2}-1}\, \partial u}{\sqrt{1-u}}=2\int_0^1 \frac{v^{n-1}\, \partial v}{\sqrt{1-v^2}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\varphi\, \partial\varphi$$

und kann unmittelbar bestimmt werden (§. 43, II).

---

* Die Konstanten müssen so beschaffen seyn, dass $\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha$, $\left(\frac{y}{n}\right)^\beta$, .. positiv sind; überdiess soll immer $\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{n}\right)^\beta+\ldots \overline{\overline{<}} k$ seyn, auch wenn $x=y=\ldots=0$; ferner muss $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, ... positiv seyn (§. 162, II). Dazu gehört, dass alle eintretenden Konstanten positiv seyen.

Es lassen sich weiter sehr leicht geometrische Anwendungen derselben Sätze machen. So wird (§. 80) das Integral $\int\int \partial x \partial y$, ausgedehnt auf alle posiven x und y, für welche $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2} \overline{\overline{<}} 1$, den vierten Theil der Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2} = 1$ ausdrücken. Nach (B) ist aber, wenn $a=b=1$, $f(u)=1$, $\alpha=\beta=2$, $k=1$:

$$\int\int \partial x \partial y = \frac{m n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\Gamma(1)} \int_0^1 \partial u = \frac{mn}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{mn\pi}{4},$$

was wirklich die betreffende Fläche ausdrückt (§. 46, II). Eben so ist

$$\int\int\int \partial x \partial y \partial z, \quad \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 \overline{\overline{<}} 1,$$

der 8. Theil des von dem Ellipsoid $\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$ umschlossenen Körpers. Nach derselben Formel ist er also:

$$\frac{m n r \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{8\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \partial u = \frac{m n r \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{m n r \pi \sqrt{\pi}}{12\sqrt{\pi}} 2 = \frac{m n r \pi}{6} \text{ (§. 84, I).}$$

§. 168.

Bestimmung der Gränzen des dreifachen Integrals $\int\int\int V \partial x \partial y \partial z$.

I. Seyen in dem dreifachen bestimmten Integral

$$\int\int\int V \partial x \partial y \partial z, \qquad \text{(a)}$$

worin V eine bekannte Funktion von x, y, z ist, die Gränzen der Veränderlichen so gewählt, dass **alle** Werthe von x, y, z vorkommen, für die

$$\varphi(x, y, z) \overline{\overline{<}} 0, \qquad \text{(b)}$$

wo $\varphi(x,y,z)=0$ die Gleichung einer **geschlossenen** Oberfläche (z. B. eines Ellipsoids) sey. Man soll seinen Werth ermitteln.

Man sagt in diesem Falle, das Integral (a) sey auf alle Werthe auszudehnen, für die (b) bestehe.

Wir wollen nun vor Allem fragen, welches die Gränzwerthe von x, y, z seyen, und uns die Aufgabe geometrisch eingekleidet denken. Alsdann sind als die Gränzwerthe von z offenbar die Werthe von z aus der Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad \text{(c)}$$

zu wählen. Gibt es deren zwei, z_1, z_2, die als Funktionen von x, y erscheinen, so sind auch z_1, z_2 die Gränzen von z. Bei mehr als zwei Werthen hätte man das Integral (a) in mehrere einzelne zu zerlegen.

Was die Gränzen von y betrifft, so sind sie als Funktionen von x aus der Gleichung der Projektion des äussersten Umfangs der Fläche (c) auf die Ebene der x y zu entnehmen (vergl. §. 83). Im Allgemeinen ist diese Projektion die Grundfläche desjenigen Zylinders, der auf der Ebene der x y senkrecht steht und die gegebene Fläche (c) umhüllt. Seine Gleichung ergibt sich durch Elimination von z aus

$$\varphi = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{d}$$

Diese beiden Gleichungen sind nämlich die der Kurve, in denen der Zylinder die gegebene Fläche berührt, woraus die Richtigkeit der Behauptung sich sofort ergibt. *

Ist

$$f(x, y) = 0 \tag{e}$$

die aus Elimination von z zwischen (d) hervorgehende Gleichung, so muss y als Funktion von x aus (e) folgen. Sind y_1, y_2 die beiden Werthe, welche sich ergeben, so sind diess die Gränzwerthe von y. Bei mehr als zwei Werthen müssen Betrachtungen, die dem einzelnen Falle entsprechen, angewendet werden.

Was endlich die Gränzen von x anbelangt, so sind es die Werthe der Abszissen x für diejenigen Punkte der Fläche (c), in denen die Tangentialebene senkrecht auf der x-Axe steht. Sie ergeben sich durch Auflösung der Gleichung, welche man erhält, wenn man y, z eliminirt aus

$$\varphi = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{f}$$

Das bestimmte Integral (a) ist dann entweder unmittelbar zu berechnen, oder weiter umzuformen.

Zusatz zu §. 79.

II. Wir wollen hier einige wichtige Sätze erweisen, die zu §. 79 gehören, uns aber namentlich bei den folgenden Untersuchungen nothwendig seyn werden.

Das doppelt bestimmte Integral

---

* Sucht man in der Fläche (c) diejenigen Punkte, in denen die berührende Ebene senkrecht steht auf der Ebene der x y, so hat man die Berührungskurve gefunden. Die Gleichung der Tangentialebene ist aber $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z-z) = 0$, und wenn sie senkrecht auf der x y-Ebene stehen soll, so muss $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ seyn. Punkte also, für die beide Gleichungen (d) erfüllt sind, liegen in der fraglichen Berührungskurve, und auch nur diese liegen darin.



$$\int_0^a \partial x \int_0^{\varphi(x)} F(x,y)\,\partial y \qquad (g)$$

ist (§. 78, IV) gleich

$$\int_0^a \partial x' \int_0^1 \varphi(x')\,F[x', y'\varphi(x')]\,\partial y', \qquad (g')$$

wenn man $x = x'$, $y = y'\varphi(x')$ setzt.

Gesetzt nun, es sey $x = f(u,v)$, $y = f_1(u,v)$, so muss, damit x', y' durch u, v ausgedrückt seyen, $x' = f(u,v)$, $y'\varphi(x') = f_1(u,v)$ seyn, so dass also:

$$x = x',\ y = y'\varphi(x');\ x = f(u,v),\ y = f_1(u,v);\ x' = f(u,v),\ y'\varphi(x') = f_1(u,v). \qquad (h)$$

Die in den Formeln (A) oder (B) des §. 79, I, II zu P als Faktor hinzutretende Grösse ist im Grunde gleich $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$. Wollte man also (g) nach §. 79 umformen, so hätte man die eben genannte Grösse aus (h) zu bilden; wollte man dagegen die Grösse (g′) umformen, so wäre $\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}$ zu berechnen. Aus den (h) aber folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u}\varphi(x') + y'\frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v}\varphi(x') + y'\frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v},$$

woraus

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}\varphi(x') + y'\frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}\varphi(x') - y'\frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}$$
$$= \varphi(x')\left[\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}\right].$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun die folgende Vorschrift: Das Integral (g) lässt sich geradezu nach §. 79, I umformen, so dass man also die dortige Grösse $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ aus den (zweiten) Gleichungen (h) bildet; die Gränzen von u und v aber müssen nach den Vorschriften des §. 79, I und II aus den Gleichungen $x = f(u,v)$, $y\varphi(x) = f_1(u,v)$ ermittelt werden. *

---

* Nach dem Vorstehenden ist diess so zu verstehen: Setzt man in $\int\int F(x,y)\,\partial x\,\partial y$ für x und y die neuen Veränderlichen u, v, die mit jenen durch $x = f(u,v)$, $y = f_1(u,v)$ zusammenhängen, so erhält man, wenn man nach §. 79 verfährt, das Integral

$$\int\int F[f(u,v), f_1(u,v)]\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)\partial u\,\partial v;$$

setzt man aber zuerst $x = x'$, $y = y'\varphi(x')$ so wird das Integral zu

$$\int_0^a \partial x' \int_0^1 \varphi(x')\,F[x', y'\varphi(x')]\,\partial y',$$

1) Soll z. B. das Integral

$$\int_0^a \partial x \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \partial y$$

ermittelt werden, und man will $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ setzen, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\varphi, \frac{\partial x}{\partial v} = -r\sin\varphi, \frac{\partial y}{\partial u} = \sin\varphi, \frac{\partial y}{\partial v} = r\cos\varphi, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = r.$$

Ferner (wenn x von 0 bis a, y von 0 bis 1 geht)

$$x = r\cos\varphi, \ b y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = r\sin\varphi: \ \frac{b y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{x} = tg\,\varphi;$$

also (§. 79, II) für

$$x = 0: \varphi = \frac{\pi}{2}, x = a: \varphi = 0. \text{ Aus } b y\sqrt{1-\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2}} = r\sin\varphi$$

folgt für

$$y = 0: r = 0, \ y = 1: b^2\left(1-\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2}\right) = r^2\sin^2\varphi, \ r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}},$$

so dass endlich

$$\int_0^a \partial x \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \partial y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}} r\,\partial r$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}} = \frac{1}{2}a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi},$$

---

und wenn man u, v mittelst der Gleichungen $x' = f(u,v)$, $y'\varphi(x') = f_1(u,v)$ einführt, so erhält man

$$\iint F[f(u,v), f_1(u,v)]\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)\partial u\,\partial v,$$

genau wie vorhin, indem, wenn $x' = \psi(u,v)$, $y' = \psi_1(u,v)$ jetzt

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi_1}{\partial u} = \frac{1}{\varphi(x')}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)$$

ist. Man kann also

$$\iint F(x,y)\,\partial x\,\partial y$$

geradezu nach §. 79 umformen; die Gränzbestimmungen aber sind dann besser aus $x' = f(u,v)$, $y'\varphi(x') = f_1(u,v)$ zu führen (x' von 0 bis a, y' von 0 bis 1).

Dass man diesen Weg nicht betreten muss, ist bereits in §. 79, IV bemerkt worden; eben so wurde in §. 79, III bemerkt, dass unter gewissen Bedingungen α und β auch Funktionen von x seyn können, und doch das dortige Verfahren ohne Weiteres anwendbar bleibe. — Wir haben somit in dem hier Mitgetheilten nur eine Vorschrift zu sehen, die in allen Fällen anwendbar ist, ohne dass andere Wege desshalb nicht betreten werden dürften, oder im einzelnen Falle nicht mit Vortheil betreten werden könnten.

$$\int \frac{\partial \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{b^2} \int \frac{\partial \varphi}{\cos^2 \varphi \left(1 + \frac{a^2}{b^2} tg^2 \varphi\right)}$$

$$(tg\, \varphi = z) = \frac{1}{b^2} \int \frac{\partial z}{1 + \frac{a^2}{b^2} z^2} = \frac{1}{a\,b} arc\left(tg = \frac{a}{b} tg\, \varphi\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{a\,b} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^a \partial x \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \partial y = a\,b \frac{\pi}{4},$$

wie bekannt, da diess Integral den Quadranten der Ellipse ausdrückt.

2) In §. 167, II wäre etwa $x = u\,v$, $y = u - u\,v$, also $-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = u$. Dann sind die Gränzen zu ermitteln aus $x = u\,v$, $y(k-x) = u - u\,v$ und zwar nach §. 79, II, wo die Gränzen nach x sind 0 und k, nach y aber 0 und 1. Dann ist

$$y(k-x) = \frac{x}{v}(1-v), \quad v\,y(k-x) = x(1-v), \quad v = \frac{x}{y(k-x)+x}.$$

Für $x = 0$ ist $v = 0$, für $x = k$ aber $v = 1$, so dass 0 und 1 die Gränzen von v sind. Dann

$$y = \frac{u(1-v)}{k - u\,v}, \quad u = \frac{k\,y}{1 - v + y\,v}.$$

Für $y = 0$ ist $u = 0$, für $y = 1$ aber $u = k$, so dass 0 und k die Gränzen von u sind. Demnach

$$\int_0^k x^{a-1} \partial x \int_0^{k-x} y^{b-1} f(x+y) \partial y = \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1} \partial v \int_0^k u^{a+b-1} f(u) \partial u.$$

III. Das dreifach bestimmte Integral

$$\int_0^a \partial x \int_0^{\varphi(x)} \partial y \int_0^{\psi(x,y)} F(x,y,z) \partial z \qquad \text{(i)}$$

ist gleich

$$\int_0^a \partial x' \int_0^1 \partial y' \int_0^1 \varphi(x') \psi[x', y' \varphi(x')]\, F\left\{x', y' \varphi(x'), z' \psi[x', y' \varphi(x')]\right\} \partial z', \qquad \text{(k)}$$

wie sich nach §. 78, IV leicht ergibt, indem man zuerst $z = z' \psi(x, y)$, dann $y = y' \varphi(x)$, und endlich $x' = x$ setzt.

Formt man nun (i) nach §. 79, V um, so hat man die dortige Grösse M zu bilden, die gleich ist

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\right) + \frac{\partial x}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Wollte man (k) umformen, indem man für x', y', z' ebenfalls u, v, w einführt, so hätte man

$$\frac{\partial x'}{\partial u}\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial v}\right) + \frac{\partial x'}{\partial v}\left(\frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial w}\right) + \frac{\partial x'}{\partial w}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v} - \frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u}\right)$$

zu bilden. Dabei müsste dann

$$x = x', \; y = y' \varphi(x'), \; z = z' \psi[x', y' \varphi(x')] \qquad (l)$$

seyn.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial u}\psi + z'\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u}\right)\right],$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z'}{\partial v}\psi + z'\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v}\right)\right],$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x'}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial y'}{\partial w}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z'}{\partial w}\psi + z'\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial y'}{\partial w}\varphi + y'\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial w}\right)\right],$$

wo φ für $\varphi(x')$, ψ für $\psi[x', y'\varphi(x')] = \psi(x, y)$ gesetzt ist. Hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} = \varphi\psi\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial v}\right) + \varphi z'\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial w} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial w}\right)$$
$$+ \psi y'\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{\partial x'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = \varphi\psi\left(\frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial w}\right) + \varphi z'\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial x'}{\partial u} - \frac{\partial x'}{\partial w}\frac{\partial y'}{\partial u}\right)$$
$$+ \psi y'\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial x'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial w}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = \varphi\psi\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v} - \frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u}\right) + \varphi z'\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}\right)$$
$$+ \psi y'\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u}\right),$$

woraus

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\right) + \frac{\partial x}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$= \varphi.\psi\left[\frac{\partial x'}{\partial u}\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial v}\right) + \frac{\partial x'}{\partial v}\left(\frac{\partial y'}{\partial w}\frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial w}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial x'}{\partial w}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v} - \frac{\partial y'}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u}\right)\right].$$

Verglichen mit (i) und (k) ergibt sich hieraus der Satz:

Formt man (i) nach §. 79, V um indem

$$x = f(u, v, w), \quad y = f_1(u, v, w), \quad z = f_2(u, v, w),$$

so wird man die Gränzwerthe von x, y, z aus den Gleichungen

$$x = f(u, v, w), \quad y\varphi(x) = f_1(u, v, w), \quad z\psi[x, y\varphi(x)] = f_2(u, v, w)$$

nach den Regeln des §. 79 ziehen, wobei als **konstante** Gränzen von x anzusehen sind 0 und a, von y und z aber 0 und 1.

(Die Verallgemeinerung dieser Sätze findet sich im „Anhang" unter 𝔄, XV.)

IV. Sey etwa das Integral

$$\int\int\int \frac{\partial x \partial y \partial z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (m)$$

vorgelegt, worin x, y, z auf **alle** Werthe auszudehnen sind, für welche $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \overline{\gtrless} 1$, so ist aus I: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, wodurch die Gränzen von z gegeben sind; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=0$, also $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ als Gränzen von y; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=0$, $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}=1$, $x=\pm a$ als Gränzen von x, so dass (m) gleich ist

$$\int_{-a}^{+a}\partial x \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\partial y \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{\partial z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=8\int_0^a \partial x \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\partial y \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{\partial z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Wir setzen nun $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\cos\psi\sin\varphi$, $z=r\sin\psi$, wodurch $M=\pm r^2\cos\psi$ wird (§. 83, II), und eben so $x^2+y^2+z^2=r^2$. Die Gränzen von r, φ, ψ ergeben sich aus:

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\ by\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=r\cos\psi\sin\varphi,$$

$$cz\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=r\sin\psi=cz\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-y^2}.$$

Daraus folgt (§. 79, VI, 5, wo $u=r$, $v=\psi$, $w=\varphi$, $M=-r^2\cos\psi$):

$$\frac{x}{by\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\cotg\varphi;\ \text{für } x=0:\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \text{für } x=a:\ \varphi=0.$$

$$\frac{by}{cz\sqrt{1-y^2}}=\sin\varphi\cotg\psi;\ \text{für } y=0:\ \psi=\frac{\pi}{2},\ \text{für } y=1:\ \psi=0.$$

$$c z \sqrt{1-\frac{r^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi}{a^2}} \sqrt{\left(1-\frac{\frac{r^2}{b^2}\cos^2\psi \sin^2\varphi}{1-\frac{r^2}{a^2}\cos^2\varphi \cos^2\psi}\right)}$$

$$= r \sin\psi = c z \sqrt{1-\frac{r^2\cos^2\varphi \cos^2\psi}{a^2}-\frac{r^2}{b^2}\cos^2\psi \sin^2\varphi},$$

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 z^2}{a^2 b^2 \sin^2\psi + b^2 c^2 z^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + a^2 c^2 z^2 \cos^2\psi \sin^2\varphi};$$

für $z=0$: $r=0$, für $z=1$: $r^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 \sin^2\psi + b^2 c^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + a^2 c^2 \cos^2\psi \sin^2\varphi}$.

Demnach ist (m) gleich

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\psi \int_0^{\varrho} \frac{r^2\cos\psi}{r}\partial r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, \varrho^2\, \partial\psi,$$

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 \sin^2\psi + b^2 c^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + a^2 c^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi},$$

so dass endlich auszuwerthen ist (vergl. §. 84, I)

$$4 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, \partial\varphi\, \partial\psi}{a^2 b^2 \sin^2\psi + a^2 c^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + b^2 c^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi}.$$

Um nun dieses Integral selbst zu ermitteln, wollen wir zuerst die Integration nach φ durchführen. Wir setzen zu dem Ende $b^2 c^2 \cos^2\psi + a^2 b^2 \sin^2\psi = \alpha^2$, $a^2 c^2 \cos^2\psi + a^2 b^2 \sin^2\psi = \beta^2$, und haben das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2 \sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-\cos^2\varphi}$$

zu bestimmen. Setzt man hier $\cos\varphi = x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, so hat man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\psi} = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^1 \frac{\partial x}{\left(\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{\frac{\sqrt{\beta^2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-1}}\, \frac{1}{\beta^2-\alpha^2} (\text{§. 43, VII}) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta},$$

so dass jetzt die Grösse (m) gleich

$$2 a^2 b^2 c^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, \partial\psi}{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2\psi + a^2 b^2 \sin^2\psi}\sqrt{a^2 c^2 \cos^2\psi + a^2 b^2 \sin^2\psi}}$$

$$= 2 a b c^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, \partial\psi}{\sqrt{c^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi}}.$$

Dieses Integral lässt sich leicht auf elliptische Integrale reduziren. Zu dem Ende setze man

$$\sin\psi=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\,tg\,\omega,\ \cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\omega}=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$c^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi=c^2\left(1-\frac{c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega\right)+\frac{a^2c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega$$

$$=\frac{c^2[(a^2-c^2)\cos^2\omega-c^2\sin^2\omega]+a^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{a^2c^2-c^4}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{c^2}{\cos^2\omega};$$

$$c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi=c^2\left(1-\frac{c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega\right)+\frac{b^2c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega$$

$$=\frac{c^2[a^2\cos^2\omega-c^2]+b^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{c^2a^2-c^4-c^2a^2\sin^2\omega+b^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}$$

$$=\left(c^2-c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\omega\right)\frac{1}{\cos^2\omega};$$

$$\sqrt{a^2\sin^2\psi+c^2\cos^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}=\frac{c^2}{\cos^2\omega}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\omega},$$

und da für $\psi=\frac{\pi}{2}:tg\,\omega=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}$, so wird wenn s durch die Gleichung $tg\,s=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}$, $\cos s=\frac{c}{a}$ bestimmt ist, und man zugleich $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ setzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{\sqrt{c^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}}=\frac{1}{c\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^s\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}$$

$$=\frac{1}{c\sqrt{a^2-c^2}}F(s,e);$$

mithin ist endlich die Grösse (m) gleich

$$\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}F(s,e),\ e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\ \cos s=\frac{c}{a},\ a>b>c.$$

§. 169.

Das Integral $\iiint..F(x,y,z,..)f[\varphi(x,y,z,..)]\,\partial x\,\partial y\,\partial z..$

Angenommen das n fache bestimmte Integral

$$\iiint...F(x,y,z,...)f[\varphi(x,y,z,...)]\,\partial x\,\partial y\,\partial z...,\qquad (a)$$

in welchem x, y, z, . . . alle positiven Werthe annehmen sollen, für welche

$$\psi(x,y,z,...)\overline{\overline{<}}\,0\qquad (a')$$

ist, sey zu bestimmen. Dabei setzen wir voraus, es nehme $\varphi(x,y,z,....)$ den bestimmten Werth φ_0 an, wenn x, y, z, . . . sämmtlich Null sind; eben so sey φ_1 der bestimmte Werth von $\varphi(x,y,z,...)$, wenn $\psi(x,y,z,...)=0$

(natürlich die Stetigkeit aller vorkommenden Funktionen vorausgesetzt). Angenommen ferner, $\Psi(\varrho)$ sey der Werth von

$$\int\int\int ... F(x, y, z, ...) \partial z \partial y \partial z ..., \tag{b}$$

wenn x, y, z, ... alle positiven Werthe annehmen, für die

$$\varphi(x, y, z, ...) \overline{\overline{<}} \varrho, \tag{b'}$$

so ist der Werth des Integrals (a) gleich

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varrho) \frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho} \partial \varrho \tag{c}$$

unter folgenden Voraussetzungen: 1) es darf die Bedingung (b′) nicht im Widerspruch stehen mit (a′), wenn ϱ zwischen φ_0 und φ_1 liegt; 2) muss man, wenn ϱ sich stetig ändert von φ_0 bis φ_1, mittelst der Bedingung (b′) alle Systeme von Werthen von x, y, z, ... erhalten, die man mittelst (a′) erhält. Diese letztere Bedingung ist so zu verstehen: Legt man in der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, ...) = \varrho \tag{c'}$$

der Grösse ϱ alle Werthe von φ_0 an bei, indem man (durch unendlich kleine Unterschiede) stetig fortschreitet bis φ_1, so müssen die Werthsysteme von x, y, z, ..., die diesen Gleichungen genügen (x, y, z, ... positiv) genau dieselben seyn, welche die Bedingung (a′) liefert.

Gesetzt es seyen ϱ, $\varrho + \Delta\varrho$ zwei verschiedene Werthe von ϱ, so wird für dieselben das Integral (b) auch verschiedene Werthe haben, die wir durch $\Psi(\varrho)$ und $\Psi(\varrho + \Delta\varrho) = \Psi(\varrho) + \Delta\Psi(\varrho)$ anzudeuten haben. Lässt man in

$$F(x, y, z, ...) \Delta x \Delta y \Delta z ... \tag{d}$$

die Grössen x, y, z, ... durch die (unendlich kleinen) Unterschiede Δx, Δy, Δz, ... stetig von 0 an fortschreiten, so stellt $\Psi(\varrho)$ die Summe der Werthe (d) vor, wenn x, y, z, ... bis zu den Werthen gehen, die (c′) genügen (§. 78), während $\Psi(\varrho) + \Delta\Psi(\varrho)$ die Summe der Werthe (d) vorstellt, wenn x, y, z, ... von 0 bis zu den Werthen fortgehen, die

$$\varphi(x, y, z, ...) = \varrho + \Delta\varrho$$

genügen. Daraus folgt, dass $\Delta\Psi(\varrho)$ die Summe der Elemente des bestimmten Integrals (b) ist, wenn man für x, y, z, ... diejenigen Werthe wählt, welche aus (c′) folgen, indem ϱ stetig von ϱ bis $\varrho + \Delta\varrho$ fortgeht. Je kleiner $\Delta\varrho$ ist, desto weniger sind die Werthe von $\varphi(x, y, z, ...)$, für alle diese Werthe von x, y, z, ... von einander verschieden, so dass man sagen kann, $f[\varphi(x, y, z, ...)]$ bleibe für alle diese Werthe nahezu gleich $f(\varrho)$, und diess desto genauer, je kleiner $\Delta\varrho$ ist. Also ist $f[\varphi(x, y, z, ...)] = f(\varrho) + k$, wo k eine Grösse ist die mit $\Delta\varrho$ verschwindet. Legt man sonach in

$$F(x, y, z, ...) f[\varphi(x, y, z, ...)] \Delta x \Delta y \Delta z, ... \tag{e}$$

den x, y, z, ... dieselben Werthe bei, wie so eben in (d), so wird die Summe

derselben aus zwei Theilen bestehen, wovon der erste $= \varDelta\Psi(\varrho) f(\varrho)$ ist, während der andere die Summe der Elemente (d), jedes multiplizirt mit einem Faktor k ist, der um so kleiner ist, je kleiner $\varDelta\varrho$ ist. Diese Summe ist also, einem vielgebrauchten Schlusse nach (vergl. etwa §. 39, III), gleich $k' \varDelta\Psi(\varrho)$, wo k' mit $\varDelta\varrho$ verschwindet. Aber es ist (§. 15, I) $\varDelta\Psi(\varrho) = \frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho}\varDelta\varrho + \alpha\varDelta\varrho$, wo α mit $\varDelta\varrho$ verschwindet, so dass die Summe der Elemente (e) ist

$$\frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho} f(\varrho)\varDelta\varrho + \alpha f(\varrho)\varDelta\varrho + k'\frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho}\varDelta\varrho + \alpha k'\varDelta\varrho. \qquad (f)$$

Legt man nun in der Gleichung (c′) der Grösse ϱ nach einander die Werthe $\varphi_0, \varphi_0 + \varDelta\varrho, \ldots\ldots, \varphi_1 - \varDelta\varrho$ bei, und nimmt die diesen Abtheilungen entsprechenden Summen (f), so wird die Summe all' dieser Summen um so genauer dem Integrale (a) gleich seyn, je kleiner $\varDelta\varrho$ ist.* Daraus folgt, gemäss den ersten Grundsätzen über die Lehre von den bestimmten Integralen, und wenn man beachtet, dass die Summen der drei letzten Grössen in (f) zu

$$\alpha_1\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varrho)\,\partial\varrho,\ k_1\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\,\partial\varrho,\ \beta\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\partial\varrho$$

werden, wo α_1, k_1, β mit $\varDelta\varrho$ verschwinden, also diese Grössen Null sind, dass das bestimmte Integral (a) der Grösse (c) gleich sey. — Man wird leicht übersehen, dass dieser Schluss nur unter den oben gemachten Voraussetzungen gerechtfertigt ist, die denn natürlich wesentlich zu berücksichtigen sind. Die nachfolgenden Beispiele werden zur weiteren Erläuterung beitragen. (Vergl. §. 75, VI.)

Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids.

I. Sey $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids (§. 84, I), so folgt aus derselben:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z};\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}$$

$$= \frac{\frac{z^2}{c^2}+\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}}{\frac{z^2}{c^2}} = \frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

---

* Diese Behauptung ist nur richtig, wenn, indem in (c′) ϱ von φ_0 bis φ_1 geht, die Werthsysteme der x, y, z, . . ., die den so erhaltenen Gleichungen genügen, genau dieselben sind, welche in dem Integrale (a) vorkommen, d. h. die aus (a′) folgen. Diess ist aber unsere zweite Voraussetzung. — Dass die (b′) der (a′) nicht widersprechen darf, liegt im Grunde in dieser zweiten Voraussetzung mit inbegriffen.

Daraus folgt dass der achte Theil der Oberfläche desselben (§. 80) gleich ist

$$\int\int\sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,\partial x\,\partial y,$$

wenn das Integral auf alle diejenigen positiven Werthe ausgedehnt wird, für welche $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overline{\overline{<}}1$. Wir wollen annehmen, es sey $a>b>c$, so sind $1-\frac{c^2}{a^2}$, $1-\frac{c^2}{b^2}$ positiv und kleiner als 1, so dass wenn $1-\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2$, $1-\frac{c^2}{b^2}=\beta^2$, man hat $\alpha<1$, $\beta<1$; ferner wollen wir in dem vorstehenden Integral ax, by für x und y setzen, wodurch es (§§. 79 u. 42) zu

$$ab\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y,\quad x^2+y^2-1\overline{\overline{<}}0,$$

wird, so dass es sich um die Bestimmung dieses letztern handeln wird. Vergleichen wir dasselbe mit (a), so ist

$$\varphi(x,y)=\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2},\ F(x,y)=1,\ f(u)=\sqrt{u},\ \psi(x,y)=x^2+y^2-1,\ \varphi_0=1,\ \varphi_1=\infty.$$

Ferner ist (c'):

$$\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}=\varrho,\ 1=\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2,$$

und wenn hier ϱ geht von 1 bis ∞, so wird man für jeden Werth von ϱ gewisse Werthe von x und y erhalten können, die nothwendig so beschaffen sind, dass $x^2+y^2<1$, indem ja $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}$, $\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}$ grösser als 1 sind; auch werden alle diese Systeme von einander verschieden seyn, und keines für das $x^2+y^2<1$ wird davon ausgeschlossen seyn, so dass also die Bedingungen (a') und (b') sich nicht nur nicht widersprechen, sondern dieselben Werthe liefern, wenn ϱ von 1 bis ∞ stetig wächst. Demnach ist wenn

$$\int\int\partial x\,\partial y=\Psi(\varrho),\text{ wo }\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}\overline{\overline{<}}\varrho:$$

$$\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y=\int_1^\infty\sqrt{\varrho}\,\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\,\partial\varrho.$$

Die Bedingung $\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2-y^2}{1-x^2-y^2}\overline{\overline{<}}\varrho$ ist auch $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2\overline{\overline{<}}1$, so dass wenn man in der Formel (B) des §. 167 setzt:

$$\alpha=\beta=2,\ m=\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\alpha^2}},\ n=\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\beta^2}},\ f(u)=1,\ a=b=1,\ k=1,$$

man hat

$$\Psi(\varrho)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\varrho-1)(\varrho-1)}{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)}\int_0^1\partial u=\frac{\pi}{4}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}},$$

$$\int \sqrt{\varrho}\,\frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho}\,\partial \varrho = \Psi(\varrho)\sqrt{\varrho} - \frac{1}{2}\int \frac{\Psi(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\,\partial \varrho\ (\S.\ 27) = \frac{\pi}{4}\frac{(\varrho-1)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}} - \frac{\pi}{8}\int \frac{(\varrho-1)\,\partial\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}.$$

Setzt man $\varrho = u^2$, so ist diese Grösse =

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{(u^2-1)u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} - \int \frac{(u^2-1)\,\partial u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}\right]$$

und wenn $u = \frac{\alpha}{\sin\varphi}$:

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}\,\sin\varphi\cos\varphi} + \int\frac{(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}\,\sin^2\varphi}\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left. + \alpha^2\int\frac{\partial\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}} - \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left. + \beta^2\int\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}} - \frac{\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} - \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right]\ [\S.\ 154,\ (k')]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{(\alpha^2-1+\beta^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}} + \beta^2\int\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}} - \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Da $\beta^2 < \alpha^2$, so sey $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = e^2$, und es ist, da die Gränzen von u ebenfalls 1 und ∞, also von φ: ω und 0 sind wenn $\sin\omega = \alpha$, die fragliche Fläche:

$$ab\int_1^\infty \sqrt{\varrho}\,\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\,\partial\varrho = \frac{ab\pi}{4}\left[-\frac{(\alpha^2-1+\beta^2\cos^2\omega)\sin\omega}{\cos\omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\omega}} + \frac{\beta^2}{\alpha}\int_\omega^0\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{\alpha}\int_\omega^0\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right],$$

d. h. da $\sin\omega = \alpha$, $\cos\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$, sie ist (§. 154):

$$\frac{ab\pi}{4}\left[\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} - \alpha F(\omega, e) + \alpha E(\omega, e) + \frac{1}{\alpha}F(\omega, e)\right],$$

d. h. endlich gleich:

$$\frac{\pi c^2}{4} + \frac{\pi b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)E(\omega, e) + c^2 F(\omega, e)\right],\ \sin\omega = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}},\ \cos\omega = \frac{c}{a},$$

$$e = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Nimmt man diese Grösse achtfach, so erhält man die ganze Oberfläche des Ellipsoids.

II. Man kann das eben Gefundene auch durch unmittelbare geometrische Ableitung erhalten. Es ist nämlich immerhin

$$ab\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y,$$

wo das Integral auf alle positiven Werthe von x, y auszudehnen ist, für die $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \overline{\overline{<}} 1$, der achte Theil der fraglichen Fläche, so dass es sich also um Ermittlung von

$$\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y,\quad x^2+y^2 \overline{\overline{<}}\, 1 \qquad (g)$$

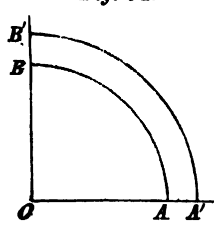
handelt.

Setzt man

$$\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y}{1-x^2-y^2}=\varrho,\quad \frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2=1, \qquad (h)$$

so ist $\varrho \overline{\overline{>}}\, 1$, während die (h) für jedes ϱ eine Ellipse vorstellt. Wir wollen uns nun die zwei Werthe ϱ und $\varrho+\Delta\varrho$ denken (wo $\Delta\varrho$ unendlich klein sey) beide >1, so stellt für diese Werthe die (h) zwei Ellipsen vor, welche denselben Mittelpunkt haben, und die sich nicht schneiden. * Dabei geht ϱ von 1 bis ∞, und alle Ellipsen, die man aus (h) erhält, sind in dem Kreise $x^2+y^2=1$ enthalten.

Fig. 64.



Das Integral $\int\int\partial x\,\partial y$, ausgedehnt auf alle positiven Werthe von x, y, für die $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2 \overline{\overline{<}}\, 1$, stellt den vierten Theil der Ellipsenfläche (h) vor; dasselbe ist also (§. 46) $=\frac{\pi}{4}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}$, so dass wenn AB (Fig. 64) den zu ϱ gehörigen elliptischen Quadranten vorstellt, OAB $=\frac{\pi}{4}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}$ ist.

Ist nun A'B' die Ellipse, welche aus (h) folgt, wenn man $\varrho+\Delta\varrho$ für ϱ setzt, so wird die Fläche

$$OA'B'=\frac{\pi}{4}\frac{\varrho+\Delta\varrho-1}{\sqrt{(\varrho+\Delta\varrho-\alpha^2)(\varrho+\Delta\varrho-\beta^2)}}=\frac{\pi}{4}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}+\frac{\pi}{4}\Delta\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}},$$

d. h.

$$ABA'B'=\frac{\pi}{4}\Delta\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}$$

seyn. Diese Grösse ist aber (§. 15, I)

$$=\frac{\pi}{4}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\Delta\varrho,$$

wenn $\Delta\varrho$ unendlich klein.

Für alle Punkte die in dem unendlich schmalen Streifen ABB'A' liegen, ist ϱ als konstant anzusehen, d. h. behält $\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}$ einen unveränderlichen Werth, so dass der Theil des Integrals (g), der sich hierauf bezieht, gleich ist

$$\sqrt{\varrho}\int\int\partial x\,\partial y=\frac{\pi}{4}\sqrt{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\Delta\varrho.$$

---

* Sollten sie sich schneiden, so müsste zugleich

$$\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2=1,\quad \frac{\varrho+\Delta\varrho-\alpha^2}{\varrho+\Delta\varrho-1}x^2+\frac{\varrho+\Delta\varrho-\beta^2}{\varrho+\Delta\varrho-1}y^2=1$$

möglich seyn, woraus

$$x^2=\frac{1-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2},\quad y^2=-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2},$$

d. h. es fiele y^2 negativ aus.

Lässt man hier ϱ von 1 bis ∞ gehen, und summirt dann alle die so erhaltenen Werthe, so hat man offenbar den Werth von (g), ausgedehnt auf alle Punkte, die innerhalb des Kreises $x^2+y^2=1$ liegen (der für $\varrho=\infty$ erscheint), wie verlangt wurde. Aus §. 40 ergibt sich also, dass

$$\iint\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y=\frac{\pi}{4}\int_1^\infty V\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\,\frac{\varrho-1}{V(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}\,\partial\varrho.$$

Von da an geht nun die weitere Rechnung wie oben vor sich. (Vergl. §. 170.)

Das Integral $\iint..x^{p-1}y^{q-1}..\sqrt[m]{\left(\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-..}{1-x^\alpha-y^\beta-..}\right)}\,\partial x\,\partial y\ldots,\ x^\alpha+y^\beta+..\overline{\overline{<}}1.$

III. Legt man das Integral

$$\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\sqrt[m]{\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots}}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots$$

zur Bestimmung vor, ausgedehnt auf alle positiven Werthe für die

$$x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots\overline{\overline{<}}1,$$

wo a, b, c, ... positiv und kleiner als 1; α, β, γ, ... positiv sind, so hat man

$$F(x,y,z,\ldots)=x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots,\ \varphi(x,y,z,\ldots)=\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots},$$

$$f(u)=u^{\frac{1}{m}},\ \psi(x,y,z,\ldots)=x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots-1,$$

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=\infty;\ \frac{1-ax^\alpha-y^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots}\overline{\overline{<}}\varrho\ \text{oder}\ \frac{\varrho-a}{\varrho-1}x^\alpha+\frac{\varrho-b}{\varrho-1}y^\beta$$

$$+\frac{\varrho-c}{\varrho-1}z^\gamma+\ldots\overline{\overline{<}}1,$$

$$\Psi(\varrho)=\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

ausgedehnt auf alle positiven Werthe von x, y, z, .. für welche die eben gegebene Bedingung erfüllt ist. Diess gibt nach (B) in §. 167:

$$\Psi(\varrho)=\frac{\left(\frac{\varrho-1}{\varrho-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\left(\frac{\varrho-1}{\varrho-\beta}\right)^{\frac{q}{\beta}}\left(\frac{\varrho-1}{\varrho-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}}..\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots\right)}$$

$$\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots-1}\,\partial u,$$

d. h. wenn $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+..=k$:

$$\Psi(\varrho)=\frac{(\varrho-1)^k \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{(\varrho-a)^{\frac{p}{\alpha}} (\varrho-b)^{\frac{q}{\beta}} (\varrho-c)^{\frac{r}{\gamma}} \ldots \alpha\beta\gamma \ldots \Gamma(1+k)},$$

so dass also das vorgelegte Integral =

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{(\varrho-a)^{\frac{p}{\alpha}}(\varrho-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots}\right] \varrho^{\frac{1}{m}} \partial\varrho.$$

IV. Für $a=b=c=0$ ist

$$\iiint \frac{\ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots}{\sqrt[m]{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)}} \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}\right] \varrho^{\frac{1}{m}} \partial\varrho,$$

oder da

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}=\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^k=\frac{k\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1}}{\varrho^2},\quad \frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}\varrho^{\frac{1}{m}}$$

$$=k(\varrho-1)^{k-1}\varrho^{\frac{1}{m}-k-1},$$

so wird wenn $\varrho=\frac{1}{u}$,

$$\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\varrho-1}{\varrho}\right)^k \varrho^{\frac{1}{m}}\partial\varrho=-k\int_1^0\left(\frac{1}{u}-1\right)^{k-1} u^{k+1-\frac{1}{m}}\frac{\partial u}{u^2}$$

$$=k\int_0^1 (1-u)^{k-1} u^{-\frac{1}{m}}\partial u=\frac{k\,\Gamma(k)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{m}\right)}\ (\S.\ 162,\ V),$$

also

$$\iiint\ldots\frac{x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots}{\sqrt[m]{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)}}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots-\frac{1}{m}\right)}.$$

Ist das Integral ein einfaches, so zieht man etwa daraus:

$$\int_0^1 \frac{x^p\,\partial x}{\sqrt{1-x^{2n}}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2n}\right)}{2n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{2n}\right)},\,*$$

---

* Folgt auch aus (i) in §. 162. Setzt man dort $z=x^{2n}$, $b=\frac{1}{2}$, so hat man

$$\int_0^1 \frac{x^{2na-1}}{(1-x^{2n})^{\frac{1}{2}}}\partial x=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a)}{2n\,\Gamma(\frac{1}{2}+a)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p+n}\partial x}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{p+n+1}{2n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n+p+1}{2n}\right)},$$

woraus

$$\int_0^1 \frac{x^p\partial x}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+n}\partial x}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{p+1}{2n}\right)}{4n^2\Gamma\left(1+\frac{p+1}{2n}\right)} = \frac{\pi}{4n^2}\frac{2n}{p+1} = \frac{\pi}{2n(p+1)}.$$

Das Integral $\iint x^{p-1} y^{q-1} \ldots \sqrt[m]{\frac{1-(x^\alpha+y^\beta+\ldots)}{1+x^\alpha+y^\beta+\ldots}}\, \partial x\, \partial y \ldots$

V. Wir wollen uns endlich noch das bestimmte Integral vorlegen:

$$\iiint \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \sqrt[m]{\frac{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots}}\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots.$$

ausgedehnt auf alle positiven Werthe von x, y, z, …, für die

$$x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \overline{\overline{<}} 1,$$

wo wir $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als positive Grössen annehmen.

Hier ist $F(x, y, z, \ldots) = x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots$, $\varphi(x, y, z, \ldots) = x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots$, $f(u) = \sqrt[m]{\frac{1-u}{1+u}}$, demnach $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, und die Bedingungen $x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \overline{\overline{<}} 1$, $x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \overline{\overline{<}} \varrho$ sind identisch, geben also dieselben Systeme von Werthen für x, y, … Jetzt ist

$$\Psi(\varrho) = \iiint \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots, \quad x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \overline{\overline{<}} \varrho,$$

$$\left(\frac{x}{\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{\varrho^{\frac{1}{\beta}}}\right)^\beta + \ldots \overline{\overline{<}} 1,$$

d. h. (§. 167, IV):

$$\Psi(\varrho) = \frac{\varrho^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots}\, \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)} \int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots-1}\, \partial u,$$

d. h. wenn $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots = k$:

$$\Psi(\varphi) = \frac{\varrho^k \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)},$$

---

so dass wenn $2na-1 = p$, $a = \frac{p+1}{2n}$:

$$\int_0^1 \frac{x^p\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{p+1}{2n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{2n}\right)}.$$

$$\iiint \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \sqrt[m]{\frac{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots}}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)} \int_0^1 \varrho^{k-1} \sqrt[m]{\frac{1-\varrho}{1+\varrho}}\,\partial\varrho.$$

Für $m=2$ kommt das letzte Integral auf die Formel (i) in §. 162 zurück. Es ist dasselbe dann

$$\int_0^1 \frac{\varrho^{k-1}(1-\varrho)}{\sqrt{1-\varrho^2}}\partial\varrho = \int_0^1 \frac{\varrho^{k-1}\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} - \int_0^1 \frac{\varrho^k\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}},$$

und wenn $\varrho = \sqrt{u}$:

$$\int_0^1 \frac{\varrho^{k-1}(1-\varrho)}{\sqrt{1-\varrho^2}}\partial\varrho = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\partial u - \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\partial u$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\right].$$

§. 170.

Reduktion doppelter Integrale durch geometrische Betrachtungen.

I. Es sey das Doppelintegral

$$\int_0^\alpha \partial x \int_0^{\varphi(x)} f(ax+by)\,\partial y \quad (\alpha, a, b \text{ positiv}) \qquad \text{(a)}$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion von x, α aber konstant ist. Setzen wir $f(ax+by)=z$, so stellt

$$\int_0^\alpha \partial x \int_0^{\varphi(x)} z\,\partial y$$

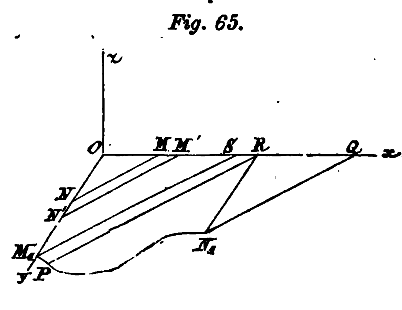


Fig. 65.

einen Körperinhalt vor (§. 83) der folgendermassen begränzt ist: Ist $M_1 N_1$ in der Ebene der xy eine Kurve, deren Gleichung $y=\varphi(x)$, ferner $OR=\alpha$, RN_1 parallel mit der Axe der y, über $OM_1 RN_1$ eine Fläche errichtet deren Gleichung $z=f(ax+by)$, so stellt (a) den Inhalt des über $OM_1 RN_1$ liegenden, von jener Fläche oben begränzten Körpers vor. Was nun aber diesen Inhalt

anbelangt, so kann er auch noch in anderer Weise gefunden werden. Setzt man nämlich

$$ax + by = \omega, \quad z = f(\omega), \tag{b}$$

so ist offenbar z konstant wenn ω es ist, während die erste Gleichung (b) für ein konstantes ω eine Ebene darstellt, die senkrecht auf der Ebene der xy steht, und die Axen der x und y in Punkten trifft, für die $x = \frac{\omega}{a}$, $y = \frac{\omega}{b}$. Stelle MN die Durchschnittslinie dieser Ebene und der Ebene der xy vor, so ist also $OM = \frac{\omega}{a}$, $ON = \frac{\omega}{b}$. Lassen wir ω um $\Delta\omega$ zunehmen, so erhalten wir eine zweite Gerade und Ebene M'N', die mit MN parallel ist; zwischen beiden Ebenen liegt ein Stück des betrachteten Körpers, das wir nun berechnen wollen.

Die Fläche des Dreiecks MON ist $\frac{\omega^2}{2ab}$, die von $OM'N' = \frac{(\omega+\Delta\omega)^2}{2ab}$, also die von MNN'M': $\frac{(\omega+\Delta\omega)^2-\omega^2}{2ab} = \frac{2\omega\Delta\omega+\Delta\omega^2}{2ab}$. Was nun aber z anbelangt, so ist dasselbe $= f(\omega)$, so dass wenn $\Delta\omega$ sehr klein ist, z nahezu denselben Werth haben wird für alle Punkte der über MNM'N' liegenden Oberfläche. Setzt man also $z = f(\omega) + k$, so ist k eine Grösse die mit $\Delta\omega$ verschwindet, und wenn man k sofort weglässt, so hat man nur das weggelassen, was schliesslich doch wegfallen würde (§. 75, VI). Setzen wir also $z = f(\omega)$ voraus, so ist der Inhalt des fraglichen Körperstücks

$$\frac{\omega f(\omega)}{ab}\Delta\omega + \frac{f(\omega)}{2ab}\Delta\omega^2.$$

Lässt man nun ω alle Werthe annehmen, die diese Grösse annehmen kann, indem man durch die (unendlich kleinen) Unterschiede $\Delta\omega$ fortgeht. so erhält man eine Reihe solcher Körperstücke, deren Summe dem Inhalte des ganzen Körpers gleich seyn wird. (D. h. letzterer ist der Gränzwerth, dem sich die Summe der Grössen von der Form $\frac{\omega[f(\omega)+k]}{ab}\Delta\omega + \frac{[f(\omega)+k]}{2ab}\Delta\omega^2$ nähert.) Da aber hiebei die Grössen $\frac{f(\omega)}{2ab}\Delta\omega^2$ eine Summe $= \Delta\omega\int\frac{f(\omega)}{2ab}\partial\omega$ geben, also wegen des unendlich kleinen $\Delta\omega$ diese Summe Null ist, so ist der fragliche Körperinhalt nothwendig $= \frac{1}{ab}\int\omega f(\omega)\partial\omega$, wo man nun noch die Gränzen des bestimmten Integrals zu ermitteln hat. Der unterste Werth von ω ist Null, da dann die fragliche Parallele durch den Anfangspunkt geht. Sodann kann man die Parallelen ziehen bis M_1S, und die obigen Formeln gelten ungestört. Was diese letzte Parallele anbelangt, so ist für sie OM_1 die Ordinate desjenigen Punktes, in dem die Kurve M_1N_1 die Ordinatenaxe trifft, sie ist also $= \varphi(0)$, und demnach der entsprechende Werth von ω: $b\varphi(0)$, so dass also der über OSM_1 stehende Körpertheil $= \frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)}\omega f(\omega)\partial\omega$.

Nun hat man noch die Körpertheile zu berechnen, die zwischen den Parallelen SM_1, PR, so wie zwischen PR und $N_1 Q$ liegen. Was die ersteren anbelangt, so sind es Stücke, die ganz zu dem Körper gehören, während bei den zweiten nur ein Theil zum Körper zu rechnen ist. Denken wir uns nun zwischen $M_1 S$ und PR eine weitere Parallele gezogen, deren Gleichung $\omega = ax + by$ sey, so wird dieselbe die Kurve $M_1 N_1$ in einem Punkte treffen, den man aus den Gleichungen

$$ax + by = \omega, \quad y = \varphi(x)$$

erhält, aus denen folgt $ax + b\varphi(x) = \omega$, welche Gleichung, da wir nur einen Durchschnittspunkt annehmen, auch nur einen Werth von x für jedes ω geben darf, das zwischen $b\varphi(0)$ und $a\alpha$ liegt, welch letzterer Werth PR zukommt. Folgt nun hieraus $x = \psi(\omega)$, so wird man also für die Koordinaten des Durchschnittspunkts mit $M_1 N_1$ haben: $x = \psi(\omega)$, $y = \frac{\omega - a\psi(\omega)}{b}$, so dass die Länge jener Parallelen, da der Durchschnittspunkt mit OR durch $x = \frac{\omega}{a}$ gegeben ist, seyn wird:

$$\sqrt{\left[\frac{\omega}{a} - \psi(\omega)\right]^2 + \left[\frac{\omega - a\psi(\omega)}{b}\right]^2} = \pm \frac{[\omega - a\psi(\omega)]\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

wo, da hier immer $\omega - a\psi(\omega) > 0$, das obere Zeichen zu wählen ist. Die Länge der vom Anfangspunkt auf diese Parallele gezogenen Senkrechten ist $\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$, so dass, wenn ω um $\Delta\omega$ zunimmt, diese letzte um $\frac{\Delta\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zunehmen wird, mithin das Flächenstückchen zwischen unendlich nahen solcher Parallelen durch $\frac{[\omega - a\psi(\omega)]\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\frac{\Delta\omega}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{[\omega - a\psi(\omega)]\,\Delta\omega}{ab}$ gegeben seyn wird. Daraus folgt dass der über SM_1 PR stehende Körper gleich

$$\frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha} [\omega - a\psi(\omega)]\, f(\omega)\, \partial\omega.$$

In derselben Weise ist der über $RPN_1 Q$ stehende [da für PR: $\omega = a\alpha$, für $N_1 Q$: $\omega = a\alpha + b\varphi(\alpha)$, indem die Koordinaten von N_1 sind: α und $\varphi(\alpha)$] gleich

$$\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha + b\varphi(\alpha)} [\omega - a\psi(\omega)]\, f(\omega)\, \partial\omega.$$

Davon ist nun zu subtrahiren das über $RN_1 Q$ stehende Stück, das in ganz ähnlicher Weise wie das über OSM_1 stehende berechnet wird. Ist nämlich $ax + by = \omega$ die Gleichung einer zwischen PR und $N_1 Q$ liegenden Parallelen, so trifft sie RQ im Punkte $x = \frac{\omega}{a}$, RN_1 in $x = \alpha$, $y = \frac{\omega - a\alpha}{b}$, so dass das Dreieck zwischen diesen beiden Punkten und $R = \frac{(\omega - a\alpha)^2}{2ab}$ ist, und also, wenn ω um das unendlich kleine $\Delta\omega$ zunimmt, selbst zunimmt nun $\frac{\omega - a\alpha}{ab}\Delta\omega$, so dass also der fragliche Körper =

$$\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)f(\omega)\partial\omega$$

ist. Daraus nun endlich:

$$\int_0^\alpha \partial x \int_0^{\varphi(x)} f(ax+by)\partial y = \frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)}\omega f(\omega)\partial\omega + \frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha}[\omega - a\psi(\omega)]f(\omega)\partial\omega$$

$$+\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}[\omega-a\psi(\omega)]f(\omega)\partial\omega - \frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)f(\omega)\partial\omega$$

$$=\frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)}\omega f(\omega)\partial\omega + \frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}[\omega-a\psi(\omega)]f(\omega)\partial\omega - \frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)f(\omega)\partial\omega$$

$$=\frac{1}{ab}\int_0^{a\alpha}\omega f(\omega)\partial\omega + \frac{\alpha}{b}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}f(\omega)\partial\omega - \frac{1}{b}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}\psi(\omega)f(\omega)\partial\omega, \quad \text{(A)}$$

wo $\psi(\omega)$ der (einzige) Werth von x ist, der aus $ax + b\varphi(x) = \omega$ folgt, in so ferne wenigstens ω zwischen $b\varphi(0)$ und $a\alpha + b\varphi(\alpha)$ liegt.

Ist $\varphi(x)$ konstant $=\beta(>0)$, so folgt aus $ax+b\varphi(x)=\omega$: $x=\frac{\omega-b\beta}{a}=\psi(\omega)$, also ist

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^\beta f(ax+by)\partial y = \frac{1}{ab}\int_0^{a\alpha}\omega f(\omega)\partial\omega + \frac{\alpha}{b}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\beta}f(\omega)\partial\omega - \frac{1}{ab}\int_{b\beta}^{a\alpha+b\beta}(\omega-b\beta)f(\omega)\partial\omega. \quad \text{(c)}$$

Kann $\alpha=\beta=\infty$ seyn, so ist hieraus (bei positivem a und b)

$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty f(ax+by)\partial y = \frac{1}{ab}\int_0^\infty\omega f(\omega)\partial\omega. \quad \text{(d)}$$

Setzt man z. B. $f(\omega)=\omega^{n-2}e^{-\omega}$, so ist

$$\iint_0^\infty (ax+by)^{n-2}e^{-(ax+by)}\partial x\,\partial y = \frac{1}{ab}\int_0^\infty \omega^{n-1}e^{-\omega}\partial\omega = \frac{\Gamma(n)}{ab}.$$

II. Es sey eben so das Integral

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^{\varphi(x)} f(ax^2+by^2)\partial y, \quad \text{(e)}$$

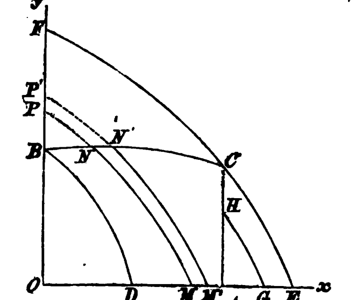
wo α, a, b positiv seyn sollen, vorgelegt. Setzt man auch hier

$$z=f(ax^2+by^2), \quad \text{(e')}$$

so stellt (e) abermals den Inhalt eines Körpers vor, der über der Fläche OACB (F. 66) stehend, von der Fläche (e') begränzt ist, wenn $y=\varphi(x)$ die Gleichung der Kurve BC, und $OA=\alpha$ ist. Setzt man nun $ax^2+by^2=\omega$, so ist $z=f(\omega)$, also z konstant, wenn ω es ist; ist diess aber der Fall, so drückt

$$ax^2+by^2=\omega \quad \text{(f)}$$

Fig. 66.



einen elliptischen Zylinder aus, der auf der Ebene der xy senkrecht steht. Die Halbaxen der Grundfläche, die nach OA und OB gerichtet sind, haben $\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, $\sqrt{\frac{\omega}{b}}$ zur Länge. Seyen nun MP, M'P' zwei Ellipsen, die zwei auf einander folgenden Werthen $(\omega, \omega+\varDelta\omega)$ in (f) entsprechen, so wird die Fläche MOP $=\frac{1}{4}\frac{\omega\pi}{\sqrt{ab}}$ (§. 46) seyn, so dass die zwischen MP und M'P' liegende Fläche $=\frac{1}{4}\frac{\pi\varDelta\omega}{\sqrt{ab}}$ ist; für alle Punkte der über MPP'M' liegenden Oberfläche (e') ist $z=f(\omega)$ als konstant anzusehen, so dass das über diesem Streifen liegende Körperstück $=\frac{1}{4}\frac{\pi\varDelta\omega}{\sqrt{ab}}f(\omega)$ ist. (Für den Fall, den die Figur angibt, gehört allerdings dieses ganze Stück nicht zum Körper, vielmehr ist das über NPP'N' stehende Körperstück davon abzurechnen.) Was die durch C gehende Ellipse anbelangt, so muss, um das ihr entsprechende ω zu finden, in (f) $x=\alpha$, $y=\varphi(\alpha)$ gesetzt werden, so dass für sie $\omega=a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2$ ist, mithin ist der über OEF stehende Körper =

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} f(\omega)\,\partial\omega.$$

Davon sind nun abzurechnen die über BCF und ACE stehenden Stücke. Um diese berechnen zu können, müssen wir im Stande seyn, die Fläche des Stücks NPP'N' zu erhalten; kennen wir aber BNP als Funktion von ω, so ist NPP'N' $=\frac{\partial(\text{BNP})}{\partial\omega}\varDelta\omega$, da ja wenn BNP $=F(\omega)$: BN'P' $=F(\omega+\varDelta\omega)$, also (für unendlich kleine $\varDelta\omega$) NN'P'P $=F(\omega+\varDelta\omega)-F(\omega)=\frac{F(\omega+\varDelta\omega)-F(\omega)}{\varDelta\omega}\varDelta\omega=\frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega}\varDelta\omega$, so dass es sich bloss um die Bestimmung von BNP handelt. Nun erhält man die Koordinaten des Punktes N aus den Gleichungen

$$y=\varphi(x),\quad ax^2+by^2=\omega;\quad ax^2+b\varphi(x)^2=\omega,$$

aus welch letzterer Gleichung $x=\psi(\omega)$ als einziger Werth folge; alsdann ist der Inhalt der Fläche BNP nach §. 45

$$=\int_0^{\psi(\omega)}\left[\sqrt{\frac{\omega-ax^2}{b}}-\varphi(x)\right]\partial x,$$

von welcher Grösse der Differentialquotient nach ω (§. 85, I) ist

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}\int_0^{\psi(\omega)}\frac{\partial x}{\sqrt{\omega-ax^2}}+\left[\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}-\varphi[\psi(\omega)]\right]\frac{\partial\psi(\omega)}{\partial\omega}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\,arc\left[sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]+\left[\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}-\varphi[\psi(\omega)]\right]\psi'(\omega),$$

wo aber, da $a\psi(\omega)^2+b\varphi[\psi(\omega)]^2=\omega$, also $\varphi[\psi(\omega)]=\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}$,

das letzte Glied wegfällt. Demgemäss ist endlich das über BCE stehende Körperstück, indem für die durch B gehende Ellipse $\omega = b\varphi(0)^2$:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left[sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right] f(\omega)\,\partial\omega.$$

Was nun weiter das über ACE stehende Körperstück anbelangt, so denken wir uns einen elliptischen Bogen GH, dessen Gleichung die (f) sey; die Abszissen von A und G sind: α und $\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, so dass die Fläche

$$GAH = \int_\alpha^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}} \sqrt{\frac{\omega - a x^2}{b}}\,\partial x \text{ ist, und } \frac{\partial(GAH)}{\partial\omega} = \frac{1}{2\sqrt{b}}\int_\alpha^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}}\frac{\partial x}{\sqrt{\omega - a x^2}}$$

$$+\sqrt{\frac{\omega-\frac{a\omega}{a}}{b}}\frac{1}{2\sqrt{a\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,arc\left(sin=\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right),$$

so dass das über AEC stehende Körperstück, für das zuerst $\omega = a\alpha^2$ (für die durch A gehende Ellipse), gleich

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} f(\omega)\,\partial\omega - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right) f(\omega)\,\partial\omega,$$

und also

$$\int_0^\alpha \partial x\int_0^{\varphi(x)} f(ax^2+by^2)\,\partial y = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} f(\omega)\,\partial\omega - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left[sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right] f(\omega)\,\partial\omega$$

$$-\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} f(\omega)\,\partial\omega + \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right) f(\omega)\,\partial\omega$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2} f(\omega)\,\partial\omega - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left[sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right] f(\omega)\,\partial\omega$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right) f(\omega)\,\partial\omega. \qquad (B)$$

Hierin ist $\psi(\omega)$ der aus $ax^2 + b\varphi(x)^2 = \omega$ folgende einzige Werth von x. Für $\varphi(x) = \beta$, d. h. konstant, ist $\psi(\omega) = \sqrt{\frac{\omega - b\beta^2}{a}}$, also

$$\int_0^\alpha \partial x\int_0^\beta f(ax^2+by^2)\,\partial y = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2} f(\omega)\,\partial\omega - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\beta^2}^{a\alpha^2+b\beta^2} arc\left(sin=\sqrt{\frac{\omega-b\beta^2}{\omega}}\right) f(\omega)\,\partial\omega$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\beta^2} arc\left(sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right) f(\omega)\,\partial\omega. \quad (g)$$

Für $\alpha = \beta = \infty$, wenn diess zulässig, folgt hieraus (§. 79, III, 3)

$$\overline{\iint}_0^\infty f(ax^2+by^2)\,\partial x\,\partial y = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^\infty f(\omega)\,\partial\omega. \qquad (g')$$

Setzt man etwa wieder $f(\omega)=\omega^{n-1}e^{-\omega}$, so ist

$$\overline{\iint}_0^\infty (ax^2+by^2)^{n-1}e^{-(ax^2+by^2)}\,\partial x\,\partial y = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^\infty \omega^{n-1}e^{-\omega}\,\partial\omega = \frac{\pi\,\Gamma(n)}{4\sqrt{ab}}. \qquad (h)$$

Für $n=1$ folgt hieraus

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x \int_0^\infty e^{-by^2}\partial y = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}},$$

und wenn $b=a$:

$$\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x\right)^2 = \frac{\pi}{4a},\quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \text{ (§. 86, II).}$$

Diese beiden Beispiele mögen hinreichen, um den Geist dieser Methode der Reduktion vielfacher Integrale klar zu machen. (Vergl. §. 169, II.)

§. 171.

Das Integral $\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z.$

I. In dem dreifachen Integrale

$$\overline{\iiint}_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

wollen wir setzen (§. 83, II)

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

so ist in §. 79, V u durch r, v durch φ, w durch ψ zu ersetzen. Die dortigen Gleichungen (k'), (k_1) sind $(x^2+y^2)\sin^2\psi = z^2\cos^2\psi$, $x\sin\varphi = y\cos\varphi$ und geben: die erste für $z=0$ auch $\psi=0$, für $z=\infty$ dagegen $\psi=\frac{\pi}{2}$; die zweite für $y=0$ auch $\varphi=0$, für $y=\infty$ aber $\varphi=\frac{\pi}{2}$; endlich folgt aus $x = r\cos\varphi\cos\psi$, dass für $x=0$ und ∞, auch $r=0$ und ∞ sey. Die dortige Grösse M ist $r^2\cos\psi$ (§. 83), so dass also

$$\iiint_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \int_0^\infty r^2\partial r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi f(r^2)\,\partial\psi,$$

d. h. (wenn man die Integrationen nach φ und ψ vollzieht):

$$\overline{\iiint}_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty r^2 f(r^2)\,\partial r. \qquad (b)$$

Sind a, b, c positiv und man setzt ax, by, cz für x, y, z, so ergibt sich hieraus

$$\overline{\underline{\iiint_0^\infty}} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{\pi}{2abc}\int_0^\infty r^2 f(r^2)\,\partial r, \tag{c}$$

welche Gleichung, indem man $r^2=\omega$ setzt, auch ist:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{\pi}{4abc}\int_0^\infty f(\omega)\sqrt{\omega}\,\partial\omega. \tag{c'}$$

Daraus folgt leicht

$$\overline{\underline{\iiint_{-\infty}^{+\infty}}} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega)\sqrt{\omega}\,\partial\omega,$$

auf welches Integral sich das allgemeinere

$$\overline{\underline{\iiint_{-\infty}^{+\infty}}} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

reduziren lässt. Setzt man nämlich hier $x=x'-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a^2}$, $y=y'-\frac{1}{2}\frac{\beta}{b^2}$, $z=z'-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{c^2}$, so wird

$$a^2x^2+\ldots+\delta=a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+\delta-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

so dass wenn

$$\delta-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=\varrho:$$

$$\overline{\underline{\iiint_{-\infty}^{+\infty}}} f(a^2x^2+\ldots+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\overline{\underline{\iiint_{-\infty}^{+\infty}}} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\varrho)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$
$$=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega+\varrho)\sqrt{\omega}\,\partial\omega,$$

so dass also

$$\overline{\underline{\iiint_{-\infty}^{+\infty}}} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega+\varrho)\sqrt{\omega}\,\partial\omega, \tag{d}$$
$$\varrho=\delta-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right].$$

II. Das Integral

$$\iint_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\sin^2\psi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\cos^2\varphi\cos^2\psi]^n},$$

worin n eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man α^2, β^2 dasselbe wie in §. 168, IV, so ist das Integral

$$\int^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi]^n}.$$

Zunächst nun sey

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{[\alpha^2 \cos^2\varphi + \beta^2 \sin^2\varphi]^n} = B_n,$$

so ist (§. 85):

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial B_n}{\partial \alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial B_n}{\partial \beta} = -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{[\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi]^{n+1}}\partial\varphi = -2nB_{n+1},$$

und da $B_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha\beta}$, so erhält man hieraus, indem man $n = 1, 2, \ldots$ setzt:

$$B_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^3\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^3}\right), \; B_3 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2.4}\left[\frac{3}{\alpha^5\beta} + \frac{3}{\alpha\beta^5} + \frac{2}{\alpha^3\beta^3}\right], \ldots.$$

so dass man B_n als bekannt ansehen darf. Alsdann kommt die Ermittlung des bestimmten Integrals auf die Bestimmung von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\,\partial\psi}{\alpha^{2n+1}\beta^{2m+1}}$$

zurück, die nun wie in §. 168, IV geschieht, indem man auf elliptische Integrale geführt wird.

§. 172.

Die elliptischen Koordinaten (von Lamé).

I. Ausser rechtwinkligen Koordinaten haben wir seither nur Polarkoordinaten eingeführt; in den Anwendungen der höhern Mathematik auf Physik sind jedoch häufig andere Koordinatensysteme nothwendig, von denen wir hier eines als Beispiel betrachten wollen.

Wir wollen annehmen, dass man an die Stelle rechtwinkliger Koordinaten x, y, z die Grössen λ, μ, ν einführe, welche mit jenen zusammenhängen mittelst der drei Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - a^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{a^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \qquad \text{(a)}$$

wo $c > a > 0$, $\lambda > c$, $c > \mu > a$, $\nu < a$ vorausgesetzt werde, so dass also λ von c bis ∞, μ von a bis c, ν von 0 bis a gehen könne. Die Grössen λ, μ ν nennt **Lamé**, der solche Koordinatensysteme zuerst untersuchte, elliptische Koordinaten, indem die Gleichungen (a) ein dreiaxiges Ellipsoid, ein einfächeriges und ein zweifächeriges Hyperboloid vorstellen.

Da

$$\lambda^2 - (\lambda^2 - a^2) = \mu^2 - (\mu^2 - a^2) = \nu^2 + (a^2 - \nu^2), \quad \lambda^2 - (\lambda^2 - c^2) = \mu^2 + (c^2 - \mu^2) = \nu^2 + (c^2 - \nu^2),$$
$$\lambda^2 - a^2 - (\lambda^2 - c^2) = \mu^2 - a^2 + (c^2 - \mu^2) = -(a^2 - \nu^2) + (c^2 - \nu^2),$$

so haben die drei Flächen (a), deren Mittelpunkt der Koordinaten-Anfang ist, und deren Hauptaxen in die Richtung der Koordinatenaxen fallen, auch gleiche Brennpunkte, sind also **homofocal**.

Für $\lambda = c$ reduzirt sich die erste Fläche (deren Halbaxen λ, $\sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ sind) auf die Ebene der xy; für $\mu = a$ wird die zweite zur Ebene der xz, für $\nu = 0$ die dritte zur Ebene der yz. Von da aus breitet sich das erste Ellipsoid mit wachsendem λ unbegränzt aus, bis es für $\lambda = \infty$ auch unendlich gross geworden ist. Keines dieser Ellipsoide schneidet eines der vorhergehenden, sondern jedes neue umhüllt dieselben. *

Lässt man μ gehen von a an, wo die zweite Fläche (a) zur Ebene der xz geworden bis zu $\mu = c$, wo sie sich in die der xy verwandelt, so durchlaufen die so erhaltenen Hyperboloide ebenfalls den ganzen Raum, ohne dass zwei sich schneiden; eben so verhält es sich mit den aus der dritten Gleichung (a) hervorgehenden Flächen, wenn ν von 0 bis a geht.

Daraus ergibt sich, dass es für jeden Punkt des Raumes je drei der Flächen (a) gibt, die durch ihn gehen, d. h. dass zu bestimmten x, y, z je bestimmte λ, μ, ν gehören, die in der oben angegebenen Weise liegen.

Es lässt sich diess auch leicht unmittelbar erweisen. Sind x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Raumpunktes, so geben die Gleichungen (a) einen Werth von λ^2 zwischen c^2 und ∞, einen von μ^2 zwischen a^2 und c^2, und einen von ν^2 zwischen 0 und a^2. Denn die drei Gleichungen (a) haben die Form

$$\frac{x^2}{\varrho} + \frac{y^2}{\varrho - a^2} + \frac{z^2}{\varrho - c^2} = 1,$$

oder

$$\varrho(\varrho - a^2)(\varrho - c^2) - x^2(\varrho - a^2)(\varrho - c^2) - y^2\varrho(\varrho - c^2) - z^2\varrho(\varrho - a^2) = 0,$$

von welcher Gleichung zu erweisen ist, dass ihre drei Wurzeln reell sind und zwischen 0 und a^2, a^2 und c^2, c^2 und ∞ liegen. Für $\varrho = 0$ ist aber die erste Seite $= -a^2c^2x^2$, also negativ; für $\varrho = a^2$: $y^2a^2(c^2 - a^2)$, also positiv; für $\varrho = c^2$: $-z^2c^2(c^2 - a^2)$, also negativ; für $\varrho = \infty$ endlich positiv. Daraus folgt die Behauptung, und man sieht, dass man für jedes x^2, y^2, z^2 in (a) die Grössen λ^2, μ^2, ν^2 einwerthig in den angegebenen Gränzen bestimmen kann.

II. Setzt man $F(\varrho) = \varrho(\varrho - a^2)(\varrho - c^2)$, $f(\varrho) = (\varrho - \lambda^2)(\varrho - \mu^2)(\varrho - \nu^2)$, so ist $F(\varrho) - f(\varrho)$ vom zweiten Grade in Bezug auf ϱ, so dass (§. 30):

---

* Sollten die beiden zu λ und λ' gehörigen Ellipsoide sich schneiden, so müsste zugleich

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\lambda'^2} + \frac{y^2}{\lambda'^2 - a^2} + \frac{z^2}{\lambda'^2 - c^2} = 1$$

seyn, woraus durch Subtraktion:

$$(\lambda'^2 - \lambda^2)\left[\frac{x^2}{\lambda^2\lambda'^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda'^2 - a^2)} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)(\lambda'^2 - c^2)}\right] = 0,$$

welche Gleichung, da $\lambda'^2 - \lambda^2$ nicht Null ist, unmöglich ist, indem nicht x, y, z Null seyn können.

Eben so folgt aus der zweiten und dritten:

$$(\mu'^2 - \mu^2)\left[\frac{x^2}{\mu^2\mu'^2} + \frac{y^2}{(\mu^2 - a^2)(\mu'^2 - a^2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \mu'^2)}\right] = 0,$$

$$(\nu'^2 - \nu^2)\left[\frac{x^2}{\nu^2\nu'^2} + \frac{y^2}{(a^2 - \nu^2)(a^2 - \nu'^2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \nu^2)(c^2 - \nu'^2)}\right] = 0,$$

woraus dieselben Folgerungen gezogen werden.

$$\frac{F(\varrho)-f(\varrho)}{F(\varrho)}=\frac{F(0)-f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\varrho}+\frac{F(a^2)-f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\varrho-a^2}+\frac{F(c^2)-f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\varrho-c^2},$$

welche Gleichung, da $F(0)=0$, $F(a^2)=0$, $F(c^2)=0$, auch heisst

$$\frac{F(\varrho)-f(\varrho)}{F(\varrho)}=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\varrho}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\varrho-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\varrho-c^2}$$

und gilt, was auch immer ϱ sey. Setzt man nun nach einander $\varrho=\lambda^2, \mu^2, \nu^2$ und beachtet, dass dann immer $f(\varrho)=0$, so ist

$$1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\lambda^2-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\lambda^2-c^2},\; 1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\mu^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\mu^2-a^2}$$
$$-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\mu^2-c^2},\; 1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\nu^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\nu^2-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\nu^2-c^2},$$

aus welchen drei Gleichungen ganz unmittelbar folgt, dass den Gleichungen (a) genügt wird, wenn

$$x^2=-\frac{f(0)}{F'(0)}=\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2},\; y^2=-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}=-\frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(a^2-c^2)},$$
$$z^2=-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}=-\frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-a^2)},$$

so dass also aus (a) folgt:

$$acx=\pm\lambda\mu\nu,\; a\sqrt{c^2-a^2}\,y=\pm\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)},$$
$$c\sqrt{c^2-a^2}\,z=\pm\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}, \qquad \text{(b)}$$

welche Gleichungen in Wahrheit acht Systeme von Werthen von x, y, z enthalten.

Sind x, y, z nur positiv, so muss man überall die obern Zeichen nehmen. Aus (b) folgt sofort, dass jede einzelne der in (a) enthaltenen Flächen alle Flächen der beiden andern Systeme schneidet. Zugleich sind die (b) die Gleichungen, welche zur Umformung dienen werden.

III. Aus den (a) ergibt sich durch Subtraktion:

$$\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)}=0,$$
$$\frac{x^2}{\lambda^2\nu^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-a^2)(\nu^2-a^2)}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)(\nu^2-c^2)}=0,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2}+\frac{y^2}{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}=0,$$

welche Gleichungen aussagen, dass jede der durch (a) gegebenen unzählig vielen Flächen alle Flächen der zwei andern Systeme rechtwinklig durchschneidet.

Durch jeden Raumpunkt geht je eine der Flächen der drei Systeme, die zu den bestimmten λ, μ, ν gehören (Nr. I), diese drei Flächen schneiden sich also rechtwinklig. Nennen wir S_1, S_2, S_3 die betreffenden drei Flächen, so schneiden sich S_1, S_2 in einer Kurve σ_3; S_1, S_3 in einer σ_2; S_2, S_3 endlich in einer Kurve σ_1. Die Kurve σ_3 steht in dem Durchschnittspunkt senkrecht auf S_3, σ_2 auf S_2, σ_1 auf S_1, so dass diese Kurven ein System rechtwinkliger Elemente bilden.

Denkt man sich nun drei andere Flächen (a) gezogen, die zu $\lambda+\Delta\lambda$, $\mu+\Delta\mu$, $\nu+\Delta\nu$ gehören, wo $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, $\Delta\nu$ unendlich klein gedacht sind, so werden diese auf den Kurven σ_1, σ_2, σ_3 unendlich kleine Elemente abschneiden, welche ein rechtwinkliges Parallelepiped

einschliessen können. Das Element $\varDelta\sigma_1$ wird erhalten, wenn man aus (b) die zwei Punkte ermittelt, die λ und $\lambda+\varDelta\lambda$ zugehören, während μ, ν ungeändert bleiben. Also ist

$$\varDelta\sigma_1^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2\right]\varDelta\lambda^2=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)}\varDelta\lambda^2;$$

eben so

$$\varDelta\sigma_2^2=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-a^2)(c^2-\mu^2)}\varDelta\mu^2,\quad \varDelta\sigma_3^2=\frac{(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}\varDelta\nu^2.$$

Demnach ist das Körperelement =

$$\varDelta\sigma_1\,\varDelta\sigma_2\,\varDelta\sigma_3=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)\,\varDelta\lambda\,\varDelta\mu\,\varDelta\nu}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

wie sich diess auch unmittelbar herausstellen wird. (Vergl. „Anhang“ unter 𝔄, XIV.)

IV. Man wird aus obigen Untersuchungen schliessen, dass wenn in dem bestimmten Integrale $\iiint V\,\partial x\,\partial y\,\partial z$ die Gränzen von x, y, z so gewählt sind, dass diese Veränderlichen nur positiv sind, von 0 an gehen und Koordinaten von Raumpunkten sind, die innerhalb des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-a^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1$$

liegen,* man λ von c bis ϱ, μ von a bis c, ν von 0 bis a müsse gehen lassen, so dass jenes Integral =

$$\int_c^\varrho\partial\lambda\int_a^c\partial\mu\int_0^a\frac{V(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\nu}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}}\qquad\text{(c)}$$

seyn wird, wo in V die x, y, z nach (b) zu ersetzen, hiebei aber nur die obern Zeichen zu wählen sind.

Das Integral

$$\int_k^{k'}\partial\lambda\int_m^{m'}\partial\mu\int_n^{n'}\frac{V(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\nu}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}}\qquad\text{(d)}$$

wo $k'>k$, $m'>m$, $n'>n$, $k\geqq c$, $m\geqq a$, $m'\leqq c$, $n\geqq 0$, $n'\leqq a$, ist dagegen gleich dem Integrale $\iiint V\,\partial x\,\partial y\,\partial z$, wenn diess über einen Raum mit drei positiven Koordinaten erstreckt ist, der eingeschlossen ist: von den zwei Ellipsoiden $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-a^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}=1$ und $\frac{x^2}{k'^2}+\frac{y^2}{k'^2-a^2}+\frac{z^2}{k'^2-c^2}=1$; von den zwei Hyperboloiden $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-a^2}+\frac{z^2}{m^2-c^2}=1$ und $\frac{x^2}{m'^2}+\frac{y^2}{m'^2-a^2}+\frac{z^2}{m'^2-c^2}=1$; endlich von den zwei Hyperboloiden $\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2-a^2}+\frac{z^2}{n^2-c^2}=1$, $\frac{x^2}{n'^2}+\frac{y^2}{n'^2-a^2}+\frac{z^2}{n'^2-c^2}=1$.

Da für $n=0$, $n'=a$; $m=a$, $m'=c$ diese Begränzungshyperboloide in die Ebenen der yz und xz, xz und xy, so sieht man leicht, dass wenn in (d): $m=a$,

---

* Die fraglichen Raumpunkte liegen in dem Oktanten des Ellipsoids, der von den positiven Axen der x, y, z gebildet wird.

$m' = c$, $n = 0$, $n' = a$, alsdann dieses Integral gleich $\iiint V \partial x \partial y \partial z$ ist, letzteres erstreckt über alle Punkte zwischen den vorhin genannten zwei Ellipsoiden, in so ferne diese in dem positiven Oktanten liegen.

V. So wäre also der achte Theil des Kubikinhalts des Ellipsoids in IV:

$$\int_c^\varrho \partial\lambda \int_a^c \partial\mu \int_0^a \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\nu}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Da dieser achte Theil auch gleich $\frac{\pi}{6}\varrho\sqrt{\varrho^2-a^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}$ ist (§. 84, I), so hat man also

$$\int_0^a \frac{\partial\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} \int_a^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,\partial\mu}{\sqrt{(\mu^2-a^2)(c^2-\mu^2)}} \int_c^\varrho \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)}}$$
$$= \frac{\varrho\pi}{6}\sqrt{\varrho^2-a^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}.$$

Diese Gleichung liesse sich leicht aus

$$\int_0^\varrho \partial x \int_0^{\sqrt{\varrho^2-a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho^2}}} \partial y \int_0^{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho^2}-\frac{y^2}{\varrho^2-a^2}}} \partial z = \frac{\pi\varrho}{6}\sqrt{\varrho^2-a^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}$$

ableiten, wenn man beachtet, dass in §. 79, VI jetzt

$$M = \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

gefunden wird, und man dann nach §. 168, III verfahren würde.

VI. Will man den achten Theil der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-a^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1$$

berechnen (§. 169, I), so hat man λ als Funktion von μ, ν anzusehen, gegeben durch die Gleichung welche man erhält, wenn man hier die Werthe von x, y, z aus (b) einsetzt. Daraus ergibt sich

$$\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2\varrho^2}+\frac{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(c^2-a^2)(\varrho^2-a^2)}+\frac{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-a^2)(\varrho^2-c^2)}=1,$$

d. h.

$$\lambda^2\mu^2\nu^2(c^2-a^2)(\varrho^2-a^2)(\varrho^2-c^2)+(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)c^2\varrho^2(\varrho^2-c^2)$$
$$+(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)a^2\varrho^2(\varrho^2-a^2)=a^2c^2(c^2-a^2)\varrho^2(\varrho^2-a^2)(\varrho^2-c^2).$$

Setzt man auf der ersten Seite $\lambda^2=\varrho^2$ so geht sie in die zweite Seite über, so dass wenn man von der ersten Seite den dadurch erhaltenen Werth subtrahirt, die zweite Seite Null wird. Diess gibt:

$$(\lambda^2-\varrho^2)\mu^2\nu^2(c^2-a^2)(\varrho^2-a^2)(\varrho^2-c^2)+(\lambda^2-\varrho^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)c^2\varrho^2(\varrho^2-c^2)$$
$$+(\lambda^2-\varrho^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)a^2\varrho^2(\varrho^2-a^2)=0,$$

welcher Gleichung durch $\lambda=\varrho$ genügt wird. Demnach ist λ als Konstante $=\varrho$ anzusehen, was sich sofort erwarten liess. Jetzt ist (§. 69, I)

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}=\frac{\varrho\nu}{ac},\quad \frac{\partial x}{\partial \nu}=\frac{\varrho\mu}{ac};\quad a\sqrt{c^2-a^2}\frac{\partial y}{\partial \mu}=\mu\frac{\sqrt{(\varrho^2-a^2)(a^2-\nu^2)}}{\sqrt{\mu^2-a^2}},$$

$$a\sqrt{c^2-a^2}\frac{\partial y}{\partial \nu}=-\nu\frac{\sqrt{(\varrho^2-a^2)(\mu^2-a^2)}}{\sqrt{a^2-\nu^2}},\quad c\sqrt{c^2-a^2}\frac{\partial z}{\partial \mu}=-\mu\frac{\sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$c\sqrt{c^2-a^2}\frac{\partial z}{\partial \nu}=-\nu\frac{\sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu},\quad \frac{\partial z}{\partial \nu}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \nu};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \mu}}{\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \mu}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \mu}-\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}}{\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \mu}},$$

d. h.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\varrho}\frac{\mu\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{a}\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-a^2}}\frac{\sqrt{(a^2-\nu^2)(\mu^2-a^2)}}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{c^2(c^2-a^2)(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{\varrho^2(\varrho^2-a^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)},$$

so dass der fragliche Flächeninhalt (§§. 80, 79) gleich

$$\int_0^a\partial\nu\int_a^c\frac{c\sqrt{c^2-a^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-a^2}}\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}}\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-a^2}}{a^2c\sqrt{c^2-a^2}}\frac{a^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(\mu^2-a^2)}}\partial\mu$$

$$=\int_0^a\frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}}\partial\nu\int_a^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-a^2}}\partial\mu.$$

Demnach (§. 169, I):

$$\int_0^a\frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\,\partial\nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}}\int_a^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-a^2)}}\partial\mu=\frac{\pi(\varrho^2-c^2)}{4}$$

$$+\frac{\pi\sqrt{\varrho^2-a^2}}{4c}[c^2E(\omega,e)+(\varrho^2-c^2)F(\omega,e)],$$

wo

$$\sin\omega=\frac{c}{\varrho},\quad e=\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-a^2}}\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}.$$

V. Daraus auch

$$\int_0^a\frac{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{\varrho^2}}\,\partial\nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}}\int_a^c\frac{(\mu^2-\nu)\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varrho^2}}\,\partial\mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-a^2)}}=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{c^2}{\varrho^2}\right)$$

$$+\frac{\pi}{4c}\sqrt{1-\frac{a^2}{\varrho^2}}\frac{1}{\varrho}[c^2E(\omega,e)+(\varrho^2-c^2)F(\omega,e)].$$

Lässt man hier ϱ unendlich wachsen, so wird die erste Seite zu

$$\int_0^a \frac{\partial \nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}} \int_a^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,\partial \mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-a^2)}}.$$

Was die zweite Seite betrifft, so wird ihr erstes Glied zu $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4c}\sqrt{1-\frac{a^2}{\varrho^2}}$ zu $\frac{\pi}{4c}$; ω wird zu 0, also $\frac{c^2}{\varrho}E(\omega, e)$ jedenfalls zu 0, und ebenso $\frac{c^2}{\varrho}F(\omega,e)$; so dass bloss noch $\varrho F(\omega, e)$ zu untersuchen ist (§. 23, I). Setzt man $\varrho = \frac{1}{z}$, so ist $z=0$ zu setzen, und es ist

$$\varrho F(\omega, e) = \frac{F(\omega, e)}{z},\ \omega = arc(sin = c z),\ e = \frac{1}{\sqrt{1-a^2 z^2}} \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}.$$

Demnach (§. 22, I):

$$\frac{\partial}{\partial z}F(\omega, e) = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\omega \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2 sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 sin^2\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \int_0^\omega \frac{e\, sin^2\varphi \frac{\partial e}{\partial z}}{(1-e^2 sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\partial \varphi \quad (§.\ 85)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^2 sin^2\omega}} \frac{c}{\sqrt{1-c^2 z^2}} + \int_0^\omega \frac{e\, sin^2\varphi}{(1-e^2 sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial e}{\partial z}\partial \varphi.$$

Für $z=0$ ist $\omega=0$, so dass diese Grösse $= c$ ist. Demnach wird die zweite Seite obiger Gleichung zu $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4c}c = \frac{\pi}{2}$, und es ist (§. 159, VII)

$$\int_0^a \frac{\partial \nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}} \int_a^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,\partial \mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-a^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

§. 173.

Das Integral $\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a_1 x+b_1 y+c_1 z,\ a_2 x+b_2 y+c_2 z,\ a_3 x+b_3 y+c_3 z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z.$

Folgerungen daraus.

I. Um das Integral

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a_1 x+b_1 y+c_1 z,\ a_2 x+b_2 y+c_2 z,\ a_3 x+b_3 y+c_3 z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z \quad (a)$$

umzuformen, führen wir (§. 79) drei neue Veränderliche u, v, w ein, die mit x, y, z zusammenhängen durch die Gleichungen

$$a_1 x+b_1 y+c_1 z = u,\ a_2 x+b_2 y+c_2 z = v,\ a_3 x+b_3 y+c_3 z = w,$$

woraus folge

$$x = \frac{A_1 u+B_1 v+C_1 w}{D},\ y = \frac{A_2 u+B_2 v+C_2 w}{D},\ z = \frac{A_3 u+B_3 v+C_3 w}{D}, \quad (c)$$

so dass die Grösse M in §. 79, V seyn wird:

$$\frac{A_3(B_1 C_2-B_2 C_1)+B_3(A_2 C_1-A_1 C_2)+C_3(A_1 B_2-A_2 B_1)}{D^3}. \quad (c')$$

Der Zähler dieser Grösse ist $= D^2$, so dass dieselbe selbst $= \frac{1}{D}$ ist.*

Die Gleichungen zur Bestimmung der Gränzen sind (§. 79, V):

$$\text{für } w\colon a_3 x + b_3 y + c_3 z = w;\quad \text{für } v\colon (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y = c_3 v - c_2 w,$$
$$\text{für } u\colon D x = A_1 u + B_1 v + C_1 w.$$

Ist also $c_3 > 0$, so sind die Gränzen von w: $-\infty$ und $+\infty$,
„ „ $c_3 < 0$, „ „ „ „ „ w: $+\infty$ „ $-\infty$;
„ „ $\frac{A_1}{c_3} > 0$, „ „ „ „ „ v: $-\infty$ „ $+\infty$, $A_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$.
„ „ $\frac{A_1}{c_3} < 0$, „ „ „ „ „ v: $+\infty$ „ $-\infty$,
„ „ $\frac{A_1}{D} > 0$, „ „ „ „ „ u: $-\infty$ „ $+\infty$,
„ „ $\frac{A_1}{D} < 0$, „ „ „ „ „ u: $+\infty$ „ $-\infty$,

Immerhin sind die Gränzen der neuen Veränderlichen beide unendlich, und man sieht dass sich folgende Tafel bilden lässt:

Gränzen von u, v, w.

$D > 0 \; -\infty \; +\infty$	$D > 0 \; -\infty \; +\infty$	$D > 0 \; +\infty \; -\infty$	$D > 0 \; +\infty \; -\infty$
$A_1 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$A_1 > 0 \; +\infty \; -\infty$	$A_1 < 0 \; +\infty \; -\infty$	$A_1 < 0 \; -\infty \; +\infty$
$c_3 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$c_3 < 0 \; +\infty \; -\infty$	$c_3 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$c_3 < 0 \; +\infty \; -\infty$
$D < 0 \; +\infty \; -\infty$	$D < 0 \; +\infty \; -\infty$	$D < 0 \; -\infty \; +\infty$	$D < 0 \; -\infty \; +\infty$
$A_1 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$A_1 > 0 \; +\infty \; -\infty$	$A_1 < 0 \; +\infty \; -\infty$	$A_1 < 0 \; -\infty \; +\infty$
$c_3 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$c_3 < 0 \; +\infty \; -\infty$	$c_3 > 0 \; -\infty \; +\infty$	$c_3 < 0 \; +\infty \; -\infty$.

Hieraus ergibt sich sofort dass das Integral (a) gleich ist

---

* Es ist

$$A_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2,\; B_1 = b_3 c_1 - b_1 c_3,\; C_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1;$$
$$A_2 = a_3 c_2 - a_2 c_3,\; B_2 = a_1 c_3 - a_3 c_1,\; C_2 = a_2 c_1 - a_1 c_2;$$
$$A_3 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\; B_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\; C_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$
$$D = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

$$B_1 C_2 - B_2 C_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_1 c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 c_3;$$
$$A_2 C_1 - A_1 C_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2 c_3;$$
$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 c_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 c_3.$$

$$A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) + B_3 (A_2 C_1 - A_1 C_2) + C_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 c_1^2$$
$$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 c_2^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 c_3^2 + 2 (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3) c_1 c_2$$
$$+ 2 (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 c_3 + 2 (a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2 c_3$$
$$= [(a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3]^2 = D^2,$$

womit der Satz erwiesen ist. (Aus einem allgemeinern Satze wird derselbe gezogen in „Anhang“ unter 𝔄, XII.)

$$\pm\frac{1}{D}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v,w)\,\partial u\,\partial v\,\partial w,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $D>0$, das untere wenn $D<0$. Ist also k der absolute Werth von D, d. h. von

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-a_2b_1),$$

so ist

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z,\ a_3x+b_3y+c_3z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$=\frac{1}{k}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z. \qquad \text{(d)}$$

II. Setzen wir in (d):

$$f(u,v,w)=e^{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,F\left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right),$$

wobei wir die $a_1,\ldots,c_3$ sogleich folgenden Bedingungen unterwerfen:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\alpha^2,\quad b_1^2+b_2^2+b_3^2=\beta^2,\quad c_1^2+c_2^2+c_3^2=\gamma^2$$
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,\quad a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,\quad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0, \qquad \text{(e)}$$

die, wie man aus der analytischen Geometrie weiss, immer möglich sind, so wird die Formel (d):

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)}}\,F\left(\frac{a_3x+b_3y+c_3z}{\sqrt{(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)}}\right)\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$=\frac{1}{k}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\,F\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\right)\partial x\,\partial y\,\partial z.$$

Aus den (e) folgt

$$a_2=\frac{c_1b_3-c_3b_1}{c_3b_2-c_2b_3}a_1,\quad a_3=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_3b_2-c_2b_3}a_1;$$

$$[(c_3b_2-c_2b_3)^2+(c_1b_3-c_3b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2]\,a_1^2=(c_3b_2-c_2b_3)^2\alpha^2;$$

$$a_1^2[(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2]=\alpha^2(c_3b_2-c_2b_3)^2;$$

$$a_1^2\beta^2\gamma^2=\alpha^2(c_3b_2-c_2b_3)^2.$$

$$D=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-c_3b_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=\frac{a_1}{c_3b_2-c_2b_3}[(c_3b_2-c_2b_3)^2+(c_1b_3-c_3b_1)^2+(b_1c_2-b_1c_2)^2]$$

$$=\frac{a_1}{c_3b_2-c_2b_3}\,\frac{\alpha^2(c_3b_2-c_2b_3)^2}{a_1^2}=\frac{\alpha^2(c_3b_2-c_2b_3)}{a_1}=\pm\frac{\alpha^2\beta\gamma}{\alpha}=\pm\alpha\beta\gamma,$$

so dass $k=\alpha\beta\gamma$.

III. Setzt man $\alpha=\beta=\gamma=1$, so ist

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} F\left(\frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\right) \partial x \, \partial y \, \partial z$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} F\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\right) \partial x \, \partial y \, \partial z.$$

Jetzt ist aber auch $a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 = 1$, so dass etwa

$$a_3 = \frac{k_1}{\varrho}, \quad b_3 = \frac{k_2}{\varrho}, \quad c_3 = \frac{k_3}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{(k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2)}.$$

Führt man überdiess die Veränderlichen r, φ, ψ (§. 83, II) ein, so ist $x^2+y^2+z^2=r^2$ und also

$$\int_0^\infty \partial r \int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\psi \, e^{-r} F\left(\frac{k_1 \cos\varphi \cos\psi + k_2 \cos\psi \sin\varphi + k_3 \sin\psi}{\sqrt{(k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2)}}\right) \partial \psi$$

$$= \int_0^\infty \partial r \int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-r} F(\sin\psi) \, r^2 \cos\psi \, \partial \psi.$$

Da

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r} \partial r = 2, \quad \int_0^{2\pi} \partial \varphi = 2\pi,$$

so ist also

$$\int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, F\left(\frac{k_1 \cos\varphi \cos\psi + k_2 \sin\varphi \cos\psi + k_3 \sin\psi}{\sqrt{(k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2)}}\right) \partial \psi$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(\sin\psi) \cos\psi \, \partial \psi.$$

Setzt man endlich

$$F(u) = f(u\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2}),$$

so hat man:

$$\int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(k_1 \cos\varphi \cos\psi + k_2 \sin\varphi \cos\psi + k_3 \sin\psi) \cos\psi \, \partial \psi$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2} \sin\psi) \cos\psi \, \partial \psi. \qquad (f)$$

IV. Wir wollen in I setzen:

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0,$$

so dass

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a_1 x, b_2 y, c_3 z) \, \partial x \, \partial y \, \partial z = \frac{1}{k} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \, \partial x \, \partial y \, \partial z,$$

eine Formel, in der k gleich dem absoluten Werthe von $a_1 b_2 c_3$, und die sich auch unmittelbar ableiten lässt.

Setzt man hier

$$f(u, v, w) = e^{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{w} F\left(\frac{w}{\sqrt{[a w^2 + b(u^2+v^2)]}}\right),$$

so ist

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(a_1^2 x^2+b_2^2 y^2+c_3^2 w^2)}} \frac{\sqrt{a_1^2 x^2+b_2^2 y^2+c_3^2 z^2}}{c_3 z}$$

$$F\left(\frac{c_3 z}{\sqrt{[a c_3^2 z^2 + b(a_1^2 x^2 + b_2^2 y^2)]}}\right) \partial x \partial y \partial z = \frac{1}{k} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z)}} \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{z}$$

$$F\left(\frac{z}{\sqrt{[a z^2 + b(x^2+y^2)]}}\right) \partial x \partial y \partial z,$$

so dass wenn wieder die Polarkoordinaten eingeführt werden:

$$\int_0^\infty \partial r \int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-r[a_1^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + b_2^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + c_3^2 \sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\frac{\sqrt{[a_1^2 \cos^2\varphi \cos\psi + b_2^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + c_3^2 \sin^2\psi]}}{c_3 \sin\psi} \times$$

$$F\left(\frac{c_3 \sin\psi}{\sqrt{[a c_3^2 \sin^2\psi + b(a_1^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + b_2^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi)]}}\right) r^2 \cos\psi \, \partial\psi$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^r \partial r \int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sin\psi} r^2 \cos\psi \, F\left(\frac{\sin\psi}{a \sin^2\psi + b \cos^2\psi}\right) \partial\psi$$

$$= \frac{4\pi}{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi}{\sin\psi} F\left(\frac{\sin\psi}{a \sin^2\psi + b \cos^2\psi}\right) \partial\psi.$$

Da aber

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\alpha^2 r} \partial r = \frac{2}{\alpha^6},$$

also

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r\sqrt{\alpha}} \partial r = \frac{2}{\alpha^{\frac{3}{2}}},$$

so ist diese Gleichung auch:

$$\int_0^{2\pi} \partial \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi}{c \sin\psi \, [a^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + b^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + c^2 \sin^2\psi]} \times$$

$$F\left(\frac{c \sin\psi}{[\alpha c^2 \sin^2\psi + \beta a^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + \beta b^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi]^{\frac{1}{2}}}\right) \partial\psi$$

$$= \frac{2\pi}{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi}{\sin\psi} F\left(\frac{\sin\psi}{\sqrt{[\alpha \sin^2\psi + \beta \cos^2\psi]}}\right) \partial\psi, \quad k^2 = a^2 b^2 c^2. \qquad (g)$$

Für $F(u) = u f(u)$, $a = b$, $\alpha = \beta = 1$ endlich:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}\, f\left(\frac{c\sin\psi}{\sqrt{(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{2\pi}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\sin\psi)\cos\psi\,\partial\psi,\quad k^2=a^4c^2,$$

d. h.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}\, f\left(\frac{c\sin\psi}{[a^2\cos\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{1}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\sin\psi)\cos\psi\cdot\partial\psi, \tag{h}$$

wo a und c positiv gedacht sind. Für $\sin\psi = x$ wird diese Gleichung zu

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{[a^2-(a^2-c^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}\, f\left[\frac{c\,x}{[a^2-(a^2-c^2)x^2]^{\frac{1}{2}}}\right]\partial x=\frac{1}{a^2c}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\partial x.$$

Setzt man oben bloss $\alpha=\beta$, $a=b$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{\sin\psi\,(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)}\, f\left(\frac{c\sin\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\, f\left(\frac{\sin\psi}{\sqrt{\alpha}}\right)\partial\psi,\quad \alpha>0,$$

d. h. wenn $f(u)=F\left(u\frac{\sqrt{\alpha}}{c}\right)$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{\sin\psi\,(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)}\, F\left(\frac{\sin\psi}{\sqrt{(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\, F\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)\partial\psi, \tag{i}$$

woraus [wenn wieder $F(u)=u\,f(u)$]:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}\, f\left(\frac{\sin\psi}{(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{1}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\psi\, f\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)\partial\psi,\quad c>0. \tag{k}$$

Ist etwa $f(u)=1$, so hat man

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{(a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\partial\psi=\frac{2}{a^2c}.$$

V. Setzt man in der Formel (f) $\psi=\frac{\pi}{2}-\psi'$ und lässt dann an ψ' den Accent weg, so ergibt sich

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_0^{\pi}f\,[k_1\cos\varphi\sin\psi+k_2\sin\varphi\sin\psi+k_3\cos\psi]\sin\psi\,\partial\psi$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}f\,[\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\cos\psi]\sin\psi\,\partial\psi.$$

Setzt man weiter $k_1=\sin\alpha\cos\beta$, $k_2=\sin\alpha\sin\beta$, $k_3=\cos\alpha$, so folgt:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_0^{\pi}f\,[\cos\alpha\cos\psi+\sin\alpha\sin\psi\cos(\varphi-\beta)]\sin\psi\,\partial\psi=2\pi\int_0^{\pi}f(\cos\psi)\sin\psi\,\partial\psi$$
$$=2\pi\int_{-1}^{+1}f(x)\,\partial x.$$

Also wenn etwa $f(u)=(1+c^2-2cu)^{-\frac{3}{2}}$:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi\,\partial\psi}{[1+c^2-2c\,[\cos\alpha\cos\psi+\sin\alpha\sin\psi\cos(\varphi-\beta)]]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=2\pi\int_{-1}^{+1}\frac{\partial x}{(1+c^2-2cx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aber

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\partial x}{(1+c^2-2cx)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1+c^2-2c}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2+2c}}\right].$$

Ist nun $c<1$, so ist $\sqrt{1+c^2-2c}=1-c$; für $c>1$ aber $\sqrt{1+c^2-2c}=c-1$, während $\sqrt{1+c^2+2c}=1+c$ wenn $c>-1$, dagegen $-(1+c)$ wenn $c<-1$. Demnach ist die zweite Seite gleich $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{1-c}-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{2}{1-c^2}$, wenn $c>-1$ und <1, d. h. also $c^2<1$; sie ist $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{c-1}-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{2}{c(c^2-1)}$ wenn $c>1$; ferner gleich $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1+c}\right)$ $=\frac{2}{c(1-c^2)}$, wenn $c<-1$. Daraus folgt:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi\,\partial\psi}{[1+c^2-2c\,[\cos\alpha\cos\psi+\sin\alpha\sin\psi\cos(\varphi-\beta)]]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\begin{cases}\frac{4\pi}{1-c^2}, & \text{wenn } c^2<1;\\ \frac{4\pi}{c(c^2-1)}, & \text{wenn } c>1;\\ \frac{4\pi}{c(1-c^2)}, & \text{wenn } c<-1.\end{cases}$$

§. 174.

Anziehung eines dreiaxigen Ellipsoids auf einen Punkt.

Bei der Berechnung vielfacher Integrale deren Gränzen veränderlich sind, kann man sich die Untersuchung oftmals durch Einführung eines Faktors erleichtern, der nur innerhalb gewisser Gränzen einen Werth hat,

jenseits derselben Null ist. Wir wollen das Verfahren bei Gelegenheit der folgenden Aufgabe erläutern, bei der es sich um die Anziehung eines Körpers, der von einer dreiaxigen Ellipsoidfläche umschlossen ist (§. 84, I), auf einen Punkt handelt.

Fig. 67.

I. Es stelle M (Fig. 67) ein körperliches Element des Ellipsoids vor, welches letztere wir aus Schichten uns bestehend denken, die jeweils jede für sich dieselbe Dichte haben, so dass wenn δ diese Dichte (= Masse in der Einheit des Körperinhalts) ist, dieselbe als eine Funktion der Grösse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ erscheint,* wo a, b, c die drei Halbaxen des Ellipsoids, x, y, z die Koordinaten von M sind, so wird der Inhalt des Elements $= \delta\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ seyn, wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die unendlich kleinen Zunahmen von x, y, z bedeuten. Sey μ die Masse des angezogenen Punkts A, r die Entfernung AM, so wird die Wirkung von M auf A durch $\varrho \frac{\mu\delta\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z}{r^2}$ ausgedrückt seyn, ** wo ϱ ein konstanter Koeffizient ist. Sind α, β, γ die Koordinaten von A, so ist $r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$; ferner sind die Cosinus der Winkel, welche die Linie r mit den Koordinatenaxen macht, gleich $\frac{\alpha - x}{r}, \frac{\beta - y}{r}, \frac{\gamma - z}{r}$, und es sind also die Seitenkräfte der Anziehung von M gegen A, zerlegt nach den Koordinatenaxen:

$$\frac{\varrho\mu\delta(\alpha-x)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{r^3},\quad \frac{\varrho\mu\delta\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,(\beta-y)}{r^3},\quad \frac{\varrho\mu\delta\,(\gamma-z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{r^3},$$

welche Kräfte in A angreifen und wo diejenigen als positiv angesehen werden, welche die Koordinaten von A zu verkleinern streben. Bildet man so die Seitenkräfte aller der Anziehungen der Elemente des Ellipsoids auf A, und addirt die nach derselben Richtung gehenden, so sieht man leicht, dass die Integrale

$$\varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\alpha-x)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3},\quad \varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\beta-y)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3},\quad \varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\gamma-z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3}, \tag{c}$$

ausgedehnt auf alle positiven und negativen Werthe von x, y, z, für welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \overline{\overline{<}}\, 1,\quad a > b > c \tag{c'}$$

die Seitenkräfte der gesammten Anziehung des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Oberfläche zur Gleichung hat $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, auf den materiellen Punkt A ausdrücken. Setzt man

---

* Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \varrho^2$ $(\varrho^2 \overline{\overline{<}}\, 1)$ stellt Ellipsoide vor, die dem gegebenen ähnlich sind, gleichen Mittelpunkt und gleiche Axenrichtung haben. In jeder Fläche, welche durch diese Gleichung gegeben ist, wenn ϱ^2 von 0 bis 1 geht, ist die Dichte in allen Punkten der Fläche (die ganz innerhalb des Ellipsoids für $\varrho^2 = 1$ liegt) dieselbe, $= f(\varrho^2)$

** Natürlich hier das gewöhnliche Anziehungsgesetz angenommen.

$$\int\int\int\frac{\delta\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r}=F, \qquad (d)$$

so ist

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=-\int\int\int\frac{\delta\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\alpha}=-\int\int\int\frac{\delta(\alpha-x)}{r^3}\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}=-\int\int\int\frac{\delta(\beta-y)}{r^3}\partial x\,\partial y\,\partial z,\ldots.$$

so dass die (c) auch sind:

$$-\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\alpha},\ -\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\beta},\ -\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\gamma}, \qquad (c')$$

und man also bloss die Grösse F in der Formel (d) als Funktion von α, β, γ zu bestimmen hat, um sofort die Grössen (c) zu erhalten. Mit dieser Bestimmung wollen wir uns nun beschäftigen.

II. Wir wollen, indem wir

$$\omega=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \delta=f(\omega)$$

setzen, uns erinnern (§. 149) dass die Grösse

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty cos(\omega u)\,\partial u\int_0^1 f(v)\,cos(uv)\,\partial v$$

gleich $f(\omega)$ ist, wenn ω zwischen 0 und 1, dagegen 0 ist, wenn ω über 1 ist;* alsdann ergibt sich sofort, dass

$$F=\frac{2}{\pi}\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial x\,\partial y\,\partial z}{r}\int_0^\infty cos(\omega u)\,\partial u\int_0^1 f(v)\,cos(uv)\,\partial v \qquad (e)$$

gesetzt werden könne, indem, in so ferne ω nicht zwischen 0 und 1 ist, der zugefügte Faktor verschwindet, also bloss diejenigen Elemente bleiben, für welche $\omega<1$.

Gemäss §. 163 (n') ist aber

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty\frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}\partial\varphi,$$

so dass

$$F=\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\pi\sqrt{\pi}}\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\partial x\,\partial y\,\partial z\overline{\int\int}_0^\infty\frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}cos(\omega u)\,\partial u\,\partial\varphi\int_0^1 f(v)\,cos(vu)\,\partial v,$$

welche Grösse übrigens, wie natürlich, reell ist. Setzt man noch ax, by, cz für x, y, z, so ist

$$F=\frac{2abc\,e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\pi\sqrt{\pi}}\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\partial x\,\partial y\,\partial z\overline{\int\int}_0^\infty\frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}cos(\omega u)\,\partial u\,\partial\varphi\int_0^1 f(v)\,cos(uv)\,\partial v,$$

wo $r^2=(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2,\ \omega=x^2+y^2+z^2$.

---

* Für $\omega=1$ ist sie allerdings nur $\frac{1}{2}f(\omega)$, allein da $\omega=1$ nur einer unendlich dünnen Schichte des Ellipsoids an der Oberfläche desselben zugehört, so können wir füglich dieselbe weglassen.

Da diese Grösse reell ist, so folgt hieraus unmittelbar, dass F der reelle Theil ist von

$$F_1 = \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i} abc}{\pi\sqrt{\pi}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \partial x\, \partial y\, \partial z \iint_0^{\infty} \frac{e^{(r^2\varphi + \omega u)i}}{\sqrt{\varphi}} \partial u\, \partial \varphi \int_0^1 f(v) \cos(uv)\, \partial v. \quad \text{(f)}$$

III. Hier wollen wir nun zuerst die Integrationen nach x, y, z vollziehen, d. h. das Integral

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{(r^2\varphi + \omega u)i}\, \partial x\, \partial y\, \partial z$$

bestimmen. Es ist aber

$$r^2\varphi + \omega u = (a^2\varphi + u)x^2 + (b^2\varphi + u)y^2 + (c^2\varphi + u)z^2 - 2\alpha a\varphi x - 2\beta b\varphi y - 2\gamma c\varphi z + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\varphi,$$

so dass

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{(r^2\varphi + \omega u)i}\, \partial x\, \partial y\, \partial z = e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(a^2\varphi+u)x^2 - 2\alpha a\varphi x]i}\, \partial x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(b^2\varphi+u)y^2 - 2b\beta y\varphi]i}\, \partial y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(c^2\varphi+u)z^2 - 2\gamma c\varphi z]i}\, \partial z$$

$$= \frac{e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi i} \sqrt{\pi^3}\, e^{\left[-\frac{\alpha^2 a^2\varphi^2}{a^2\varphi+u} - \frac{\beta^2 a^2\varphi^2}{b^2\varphi+u} - \frac{\gamma^2 c^2\varphi^2}{c^2\varphi+u} + \frac{3}{4}\pi\right]i}}{\sqrt{(a^2\varphi+u)}\sqrt{b^2\varphi+u}\sqrt{c^2\varphi+u}} \quad [\text{§. 163 } (n'')]$$

$$\frac{\sqrt{\pi^3}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\, e^{\sigma i}}{\sqrt{a^2\varphi+u}\sqrt{b^2\varphi+u}\sqrt{c^2\varphi+u}}, \quad \sigma = \left(\frac{\alpha^2}{a^2\varphi+u} + \frac{\beta^2}{b^2\varphi+u} + \frac{\gamma^2}{c^2\varphi+u}\right)\varphi u,$$

so dass

$$F_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} abc \iint_0^{\infty} \frac{e^{\sigma i}\, \partial u\, \partial \varphi}{\sqrt{a^2\varphi+u}\sqrt{b^2\varphi+u}\sqrt{c^2\varphi+u}\sqrt{\varphi}} \int_0^1 f(v) \cos(uv)\, \partial v.$$

Setzt man hier noch $\frac{u}{\varphi}$ für φ, so ist

$$F_1 = -2e^{\frac{\pi}{2}i} abc \int_0^{\infty} \partial u \int_{\infty}^{0} \frac{e^{tui}\, u\varphi^2\, \partial\varphi}{\varphi^2 u^2 \sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}} \int_0^1 f(v) \cos(uv)\, \partial v$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{2}i} abc \iint_0^{\infty} \frac{e^{tui}\, \partial u\, \partial\varphi}{u\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}} \int_0^1 f(v) \cos(uv)\, \partial v,$$

$$t = \frac{\alpha^2}{a^2+\varphi} + \frac{\beta^2}{b^2+\varphi} + \frac{\gamma^2}{c^2+\varphi}.$$

Nun ist $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $e^{tui} = \cos(tu) + i\sin(tu)$; demnach

$$F = -2abc \iint_0^{\infty} \frac{\sin(tu)\, \partial u\, \partial\varphi}{u\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}} \int_0^1 f(v) \cos(uv)\, \partial v.$$

Daraus folgt:

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha}=4\,a\,b\,c\,\alpha \iint_0^\infty \frac{\cos(t\,u)\,\partial u\,\partial \varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(u\,v)\,\partial v.$$

IV. Aber es ist

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(t\,u)\,\partial u\int_0^1 f(v)\cos(v\,u)\,\partial v &= \frac{\pi}{2}f(t), \text{ wenn } t<1,\\ &= 0, \quad\;\; \text{„} \quad t>1,\end{aligned}\right\}\;[\S.\ 149\ (p)],$$

so dass wir nun zwei Fälle unterscheiden müssen.

1. Der angezogene Punkt liegt innerhalb des Ellipsoids.

In diesem Falle ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1, \text{ also } t<1,$$

und es ist

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha}=4\,a\,b\,c\,\alpha\,\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{f(t)\,\partial \varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}.$$

Sind also P, Q, R die Seitenkräfte der Gesammtanziehung des Ellipsoids, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}P&=2\,a\,b\,c\,\varrho\,\mu\,\pi\,\alpha\int_0^\infty \frac{f(t)\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\ Q&=2\,a\,b\,c\,\varrho\,\mu\,\pi\,\beta\int_0^\infty \frac{f(t)\,\partial\varphi}{(b^2+\varphi)\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\ R&=2\,a\,b\,c\,\varrho\,\mu\,\pi\,\gamma\int_0^\infty \frac{f(t)\,\partial\varphi}{(c^2+\varphi)\sqrt{c^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}},\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

wo

$$t=\frac{\alpha^2}{a^2+\varphi}+\frac{\beta^2}{b^2+\varphi}+\frac{\gamma^2}{c^2+\varphi}.$$

2. Der angezogene Punkt liegt ausserhalb des Ellipsoids.

Alsdann ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1,$$

und es wird Werthe von φ geben, für die $t>1$, und solche, für die $t<1$. Bestimmt man den einzigen positiven Werth von m aus der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2+m}+\frac{\beta^2}{b^2+m}+\frac{\gamma^2}{c^2+m}=1, \quad (h)$$

so ist $t>1$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=m$; dagegen $t<1$ von $\varphi=m$ bis $\varphi=\infty$. Man hat also

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha}=\int_0^m \partial\varphi\int_0^\infty \frac{4\,a\,b\,c\,\alpha\cos(t\,u)\,\partial u}{\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}\,(a^2+\varphi)}\int_0^1 f(v)\cos(u\,v)\,\partial v$$

$$+\int_m^\infty \partial\varphi \int_0^\infty \frac{4abc\alpha\cos(tu)\partial u}{\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}\,(a^2+\varphi)} \int_0^l f(v)\cos(uv)\partial v,$$

und da das erste Integral Null ist, so ist

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 2abc\alpha\pi \int_m^\infty \frac{f(t)\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}.$$

Sind also P′, Q′, R′ die Seitenkräfte der Anziehung, so ist

$$\left.\begin{aligned} P' &= 2abc\varrho\mu\pi\alpha \int_m^\infty \frac{f(t)\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}, \\ Q' &= 2abc\varrho\mu\pi\beta \int_m^\infty \frac{f(t)\partial\varphi}{(b^2+\varphi)\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}, \\ R' &= 2abc\varrho\mu\pi\gamma \int_m^\infty \frac{f(t)\partial\varphi}{(c^2+\varphi)\sqrt{c^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}}, \end{aligned}\right\} \quad (g')$$

wo t dieselbe Bedeutung hat wie oben, und das positive m aus (h) bestimmt ist. Setzt man in (g′) $\varphi+m$ für φ, und macht $a^2+m=a_1^2$, $b^2+m=b_1^2$, $c^2+m=c_1^2$, so ist

$$P' = 2abc\varrho\mu\pi\alpha \int_0^\infty \frac{f(\tau)\partial\varphi}{(a_1^2+\varphi)\sqrt{a_1^2+\varphi}\sqrt{b_1^2+\varphi}\sqrt{c_1^2+\varphi}},$$

$$\tau = \frac{\alpha^2}{a_1^2+\varphi} + \frac{\beta^2}{b_1^2+\varphi} + \frac{\gamma^2}{c_1^2+\varphi}.$$

Daraus folgt nun leicht, dass man die Grössen P′, Q′, R′ aus (g) finden kann, wenn man in den Formeln (g) nur a_1, b_1, c_1 für a, b, c setzt. Sind die so aus (g) erhaltenen Grössen $= P_1$, Q_1, R_1, so ist

$$\frac{P'}{P_1} = \frac{Q'}{Q_1} = \frac{R'}{R_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}. \quad (l)$$

Da übrigens die Rechnung nach den Formeln (g) und (g′) ziemlich gleich leicht ist, so kann man diesen Satz auch entbehren. *

---

* Seyen α, β, γ die Koordinaten des angezogenen Punktes ausserhalb des Ellipsoids; a_1, b_1, c_1 die drei Halbaxen eines zweiten Ellipsoids, so liegt (α, β, γ) auf demselben. Man nehme nun auf dem anfänglichen Ellipsoid einen Punkt (α', β', γ') an, so dass also

$$\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \frac{\gamma^2}{c_1^2} = 1,$$

und bestimme überdiess α' β', γ' so dass

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{c}{c_1},$$

was nach den eben gegebenen Gleichungen möglich ist. Alsdann ist die Anziehung nach der Axe der x des zweiten (das ursprüngliche ganz umschliessenden) Ellipsoids von den Halbaxen a_1, b_1, c_1 auf den Punkt α', β', γ':

$$P_2 = 2a_1 b_1 c_1 \varrho\mu\pi\alpha' \int_0^\infty \frac{f(\tau)\partial\varphi}{(a_1^2+\varphi)\sqrt{a_1^2+\varphi}\sqrt{b_1^2+\varphi}\sqrt{c_1^2+\varphi}};$$

die des ursprünglichen auf (α, β, γ) aber P′, und

$$\frac{P'}{P_2} = \frac{abc\alpha}{a_1 b_1 c_1 \alpha'} = \frac{bc}{b_1 c_1}.$$

V. Für den Fall eines homogenen Ellipsoids ist δ konstant, d. h. $f(t)=\delta$ eine Konstante. Alsdann kommen die Formeln (g) und (g') auf elliptische Funktionen zurück und gehören zu §. 155, IV, Nr. 1. Es lassen sich jedoch diese Formeln alsdann noch unter etwas anderer Form schreiben. Setzt man nämlich $q=a^2x-a^2$, wenn $a>b>c$, so sind in (g) die Gränzen von x nun 1 und ∞ und wenn zur Abkürzung $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\lambda^2$, $\frac{a^2-c^2}{a^2}=\lambda'^2$ gesetzt wird, so ist

$$P=\frac{2abc\varrho\mu\pi\delta\alpha}{a^3}\int_1^\infty\frac{\partial x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda^2}\sqrt{x-\lambda'^2}},\quad Q=\frac{2abc\varrho\mu\pi\delta\beta}{a^3}\int_1^\infty\frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda'^2}\sqrt{(x-\lambda^2)^3}},$$

$$R=\frac{2abc\varrho\mu\pi\gamma}{a^3}\int_1^\infty\frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda^2}\sqrt{(x-\lambda'^2)^3}}.$$

Setzt man noch $x=\frac{1}{u^2}$, so wird

$$P=k\int_0^1\frac{u^2\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2u^2}\sqrt{1-\lambda'^2u^2}},\quad Q=k'\int_0^1\frac{u^2\partial u}{(1-\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1-\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$R=k''\int_0^1\frac{u^2\partial u}{(1-\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1-\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k=\frac{4abc\varrho\mu\pi\delta\alpha}{a^3},\quad k\beta=k'\alpha,\quad k''\alpha=k\gamma.$$

Setzt man hier endlich $\lambda' u=z$, so sind die Gränzen von $z:0$ und λ' und es ist, wenn man $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}=e^2$ setzt:

$$P=\frac{k}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'}\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\quad Q=\frac{k'}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'}\frac{z^2\partial z}{(1-e^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

$$R=\frac{k''}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'}\frac{z^2\partial z}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}. \qquad \text{(m)}$$

VI. Um diese Integrale auf elliptische zurückzuführen, sey $z=\sin\varphi$ und $\sin\omega=\lambda'=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}$, so ist (§. 154):

Hierin besteht Ivory's Theorem. Um also die Seitenkräfte der Anziehung unseres Ellipsoids auf den Punkt (α, β, γ) zu ermitteln, lege man durch letztern ein Ellipsoid, das mit dem gegebenen gleiche Axenrichtung und gleiche Brennpunkte habe ($a_1^2-c_1^2=a^2-c^2$, $a_1^2-b_1^2=a^2-b^2$); man nehme auf dem ursprünglichen Ellipsoid sodann einen Punkt $(\alpha', \beta', \gamma')$, so dass

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{a}{a_1},\quad \frac{\beta'}{\beta}=\frac{b}{b_1},\quad \frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{c}{c_1};$$

berechne die Anziehung des neuen Ellipsoids auf diesen, und wenn P_2, Q_2, R_2 die so erhaltenen Werthe sind, so ist

$$P'=\frac{bc}{b_1c_1}P_2,\quad Q'=\frac{ac}{a_1c_1}Q_2,\quad R'=\frac{ab}{a_1b_1}R_2.$$

$$\left.\begin{aligned}
P&=\frac{k}{\lambda'^3}\int_0^{\omega}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{k}{\lambda'^3 e^2}[F(\omega,e)-E(\omega,e)],\\
Q&=\frac{k'}{\lambda'^3}\int_0^{\omega}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k'}{\lambda'^3 e^2(1-e^2)}\left[E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)-e^2\frac{\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}\right],\\
R&=\frac{k''}{\lambda'^3}\int_0^{\omega}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{k''}{\lambda'^3(1-e^2)}[tg\,\omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}-E(\omega,e)],
\end{aligned}\right\}\quad (k)$$

wo also

$$\frac{k}{\alpha}=\frac{k'}{\beta}=\frac{k''}{\gamma}=\frac{4abc\varrho\mu\pi\delta}{a^3},\quad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad \lambda'=\sin\omega=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}.\,*$$

VII. Für den besondern Fall, dass $a=b$, ist $e=0$, $F(\omega,e)=E(\omega,e)=\omega$, also werden $\frac{F(\omega,e)-E(\omega,e)}{e^2}$, $\frac{E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)}{e^2(1-e^2)}$ zu $\frac{0}{0}$, und müssen nach §. 22 behandelt werden, wornach sich als Werth dieser Grössen findet: $\frac{1}{2}(\omega-\sin\omega\cos\omega)$, $\frac{1}{2}(\omega+\sin\omega\cos\omega)$, so dass jetzt

$$P=\frac{k}{2\lambda'^3}(\omega-\sin\omega\cos\omega),\ Q=\frac{k'}{2\lambda'^3}(\omega-\sin\omega\cos\omega),\ R=\frac{k''}{\lambda'^3}(tg\,\omega-\omega),$$

wo

$$\lambda'=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sin\omega,\quad \sin\omega\cos\omega=\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2},\quad \omega=arc\left(\sin=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right),$$

Ist endlich $a=b=c$, so hat man eine Kugel vom Halbmesser a. Alsdann ist in den letzten Formeln $\omega=0$, $\lambda'=0$ und man findet nach §. 22:

$$P=\frac{k}{3},\ Q=\frac{k'}{3},\ R=\frac{k''}{3};\ \text{d. h.}\ \frac{P}{\alpha}=\frac{Q}{\beta}=\frac{R}{\gamma}=\frac{4\pi\varrho\mu\delta}{3}.$$

VIII. Will man nun eben so die Werthe von P', Q', R' der Formeln (g′) bei $f(t)=\delta$ finden, so wird man nach (l) verfahren. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
P'&=\frac{h}{\lambda^3 e^2}[F(\omega,e)-E(\omega,e)],\quad Q'=\frac{h'}{\lambda^3 e^2(1-e^2)}\Big[E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)\\
&\quad-\frac{e^2\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}\Big],\quad R'=\frac{h''}{\lambda^3(1-e^2)}[tg\,\omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}-E(\omega,e)]
\end{aligned}\qquad (k')$$

wo

$$\frac{h}{\alpha}=\frac{h'}{\beta}=\frac{h''}{\gamma}=\frac{4abc\varrho\mu\pi\delta}{a_1^3},\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad \lambda^2=\frac{a^2-c^2}{a_1^2},\quad \sin\omega=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a_1},$$

$$a_1^2=a^2+m,\quad \frac{\alpha^2}{a^2+m}+\frac{\beta^2}{b^2+m}+\frac{\gamma^2}{c^2+m}=1,$$

IX. Aus den Formeln (m) lässt sich sehr leicht ein interessantes Resultat ziehen. Denken wir uns nämlich eine ellipsoidische Schichte, begränzt von zwei ähnlichen Ellipsoiden, deren Halbaxen a, b, c und na, nb, nc seyen, und sey der angezogene Punkt innerhalb des hohlen Raums der Schichte, so wird man die auf ihn ausge-

* Hier bedeuten: a, b, c die drei Halbaxen des anziehenden Ellipsoids; α, β, γ die Koordinaten des angezogenen Punktes, wenn jene Halbaxen Koordinatenaxen sind; δ die Masse der Raumeinheit des Ellipsoids; μ die Masse des angezogenen Punktes; ϱ einen konstanten Koeffizienten.

übte Wirkung finden, wenn man ($n>1$ vorausgesetzt) in (m) an die Stelle von a, b, c setzt na, nb, nc, und von den so erhaltenen Werthen die (m) abzieht. Da sich aber durch die genannte Vertauschung in (m) Nichts ändert, so erhält man also 0 als Wirkung, d. h. eine solche Schichte wirkt auf einen in ihrer Höhlung liegenden Punkt gar nicht, oder genauer gesprochen, die einzelnen Anziehungen heben sich gegenseitig auf.

Anders verhält sich natürlich die Sache bei den Formeln (k'). Man sieht aber hieraus leicht, wie man die Anziehung einer Schichte auf einen Punkt berechnen kann, wenn dieselbe nur von ellipsoidischen Flächen begränzt ist.

X. Wir wollen hier noch einer weitern Folgerung aus den Formeln (l) gedenken. Sind wieder a, b, c die Hauptaxen des Ellipsoids; A, B, C die eines andern, dessen Hauptschnitte mit ersterem gleiche Brennpunkte haben, so dass also ($A>B>C$): $A^2-B^2=a^2-b^2$, $B^2-C^2=b^2-c^2$; sey ferner der Punkt (α, β, γ) ausserhalb beider Ellipsoide. Man bestimme nun M aus der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{A^2+M}+\frac{\beta^2}{B^2+M}+\frac{\gamma^2}{C^2+M}=1 \text{ und setze } A^2+M=A_1{}^2,\ B^2+M=B_1{}^2,\ C^2+M=C_1{}^2;$$

ferner seyen P_2, Q_2, R_2 die Werthe von P, Q, R in (g), wenn man A_1, B_1, C_1 für a, b, c setzt; P'', Q'', R'' die Seitenkräfte der Anziehung des Ellipsoids mit den Axen A, B, C, so ist

$$\frac{P''}{P_2}=\frac{Q''}{Q_2}=\frac{R''}{R_2}=\frac{ABC}{A_1B_1C_1};\quad \frac{P''}{P'}\frac{P_1}{P_2}=\frac{Q''}{Q'}\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{R''}{R'}\frac{R_1}{R_2}=\frac{ABC}{abc}\,\frac{a_1b_1c_1}{A_1B_1C_1}.$$

Aber es ist

$$A_1{}^2=A^2+M,\ B_1{}^2=B^2+M=A^2+M-(a^2-b^2),\ C_1{}^2=C^2+M=A^2+M-(a^2-c^2);$$

ferner

$$\frac{\alpha^2}{a^2+m}+\frac{\beta^2}{a^2+m-(a^2-b^2)}+\frac{\gamma^2}{a^2+m-(a^2-c^2)}=1,$$

$$\frac{\alpha^2}{A^2+M}+\frac{\beta^2}{A^2+M-(a^2-b^2)}+\frac{\gamma^2}{A^2+M-(a^2-c^2)}=1,$$

woraus sofort folgt, dass $a^2+m=A^2+M$, d. h. $a_1{}^2=A_1{}^2$, und dann $b_1{}^2=B_1{}^2$, $c_1{}^2=C_1{}^2$, mithin $P_2=P_1$, $Q_2=Q_1$, $R_2=R_1$, und folglich

$$\frac{P''}{P'}=\frac{Q''}{Q'}=\frac{R''}{R'}=\frac{ABC}{abc}.$$

Demnach verhalten sich die Seitenkräfte der Anziehungen beider (homofocalen) Ellipsoide auf denselben äussern Punkt wie ihre Körperinhalte. Daraus folgt sofort, dass die Gesammtanziehungen sich eben so verhalten und gleich gerichtet sind. — Hierin besteht der berühmte Lehrsatz von Mac Laurin über die Anziehungen zweier homogener Ellipsoide, welche gleichen Mittelpunkt und gleiche Brennpunkte haben.

Anhang.

Uebungen und Zusätze enthaltend.

A.

Zur Theorie unendlicher Reihen.

I. In §. 57 nannten wir eine unendliche Reihe konvergent, wenn sie eine bestimmte endliche Summe hat, und erklärten diess dahin, dass man sich dieser Summe desto mehr nähern müsse, je mehr man Glieder der Reihe zusammen nehme. In §. 60, IV (nebst §. 164, III und V) gaben wir ein Kennzeichen an, wornach sich entscheiden lässt, ob die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \qquad \text{(a)}$$

eine endliche Summe hat. Es bestand darin, dass der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für sehr grosse n unter 1 seyn müsse, d. h. dass $Gr\,\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Daraus ergab sich, dass dann (a) immer eine endliche Summe habe.

Dass aber, wenn (a) überhaupt eine endliche Summe hat, man sich derselben nähern müsse, wenn man mehr und mehr Glieder zusammen nimmt, ist selbstverständlich.

Dass weiter eine unendliche Reihe, deren Glieder nicht alle positiv sind, sicher eine endliche Summe hat, wenn ihre positiv genommenen Glieder eine konvergente Reihe bilden, ergibt sich aus §. 60, IV ganz unmittelbar, während aus §. 164, V hervorgeht, dass selbst dann, wenn die positiv genommenen Glieder keine endliche Summe geben, die Reihe mit wechselnden Zeichen eine konvergente seyn kann. *

Der Fall, da $Gr\,\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, wurde in §. 60, IV nicht besonders betrachtet. Als-

---

* Die Sätze über die Konvergenz unendlicher Reihen finden sich zerstreut in §. 53, III, IV; §. 54; §. 57; §. 60, IV; §. 92, Note; §. 144—148; §. 164, III, V. Schluss des Anhangs.

dann ist aber die Reihe endgiltig eine steigende und es kann von Konvergenz keine Rede mehr seyn; sie ist **divergent**.

Ist endlich $Gr\,\frac{u^{n+1}}{u^n}=1$, so lässt sich nicht so kurzweg entscheiden, ob die Reihe konvergent oder divergent sey. Man muss sich dann in anderer Weise zu helfen suchen, wozu oft folgender Satz dient:

Ist für grosse n immer $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1$, so ist die Reihe (a) konvergent.

Denn es ist für hinlänglich grosse m:

$$m\left(\frac{u_m}{u_{m+1}}-1\right)>a, \text{ wo } a>1, \text{ also } \frac{u_m}{u_{m+1}}>1+\frac{a}{m}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_m}<\frac{m}{a+m}.$$

Demnach

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}<\frac{m}{a+m}, \quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<\frac{m+1}{a+m+1}, \quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<\frac{m+2}{a+m+2}, \ldots\ldots,$$

woraus

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}<\frac{m}{a+m}, \quad \frac{u_{m+2}}{u_m}<\frac{m(m+1)}{(a+m)(a+m+1)}, \quad \frac{u_{m+3}}{u_m}<\frac{m(m+1)(m+2)}{(a+m)(a+m+1)(a+m+2)}, \ldots,$$

$$u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots\ldots<u_m\left[1+\frac{m}{a+m}+\frac{m(m+1)}{(a+m)(a+m+1)}+\ldots\ldots\right].$$

Es ist aber identisch

$$\frac{1.2\ldots\ldots(m+r)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+m+r)}$$

$$=\frac{a}{a-1}\left[\frac{1.2\ldots\ldots(m+r)}{a(a+1)\ldots(a+m+r-1)}-\frac{1.2\ldots\ldots(m+r+1)}{a(a+1)\ldots\ldots(a+m+r)}\right],$$

woraus, indem man $r=0, 1, 2, \ldots, n$ setzt und addirt:

$$\frac{1.2\ldots m}{(a+1)\ldots(a+m)}+\frac{1.2\ldots(m+1)}{(a+1)\ldots(a+m+1)}+\ldots\ldots+\frac{1.2\ldots(m+n)}{(a+1)\ldots\ldots(a+m+n)}$$

$$=\frac{a}{a-1}\left[\frac{1.2\ldots\ldots m}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}-\frac{1.2\ldots(m+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+m+n)}\right].$$

Nun ist $a>1$, also $\frac{1.2\ldots(m+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+m+n)}=\frac{1.2\ldots(m+n+1)}{a(a+1)\ldots(m+n+a)}$ jedenfalls <1, was auch immer n sey, mithin auch noch für $n=\infty$, so dass die zweite Seite vorstehender Gleichung immer eine endliche Grösse ist. In derselben Lage ist folglich auch die erste Seite, selbst für $n=\infty$. Dividirt man die erste Seite mit $\frac{1.2\ldots(m-1)}{(a+1)\ldots(a+m-1)}$, so erhält man

$$\frac{m}{a+m}+\frac{m(m+1)}{(a+m)(a+m+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{(a+m)(a+m+1)(a+m+2)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{(a+m)\ldots\ldots(a+m+n)},$$

und für $n=\infty$ ist hiernach die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{m}{a+m}+\frac{m(m+1)}{(a+m)(a+m+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{(a+m)(a+m+1)(a+m+2)}+\ldots$$

eine endliche Grösse, woraus dann folgt, dass auch

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots\ldots$$

in derselben Lage ist. Da $u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1}$ immer endlich ist, so hat also die Reihe (a) eine endliche Summe, d. h. ist konvergent.

Dabei haben wir im Grunde alle Glieder als positiv angesehen. Da diess aber der ungünstigste Fall ist, so bleibt der Satz immerhin erwiesen. (§. 60, IV).

Dass u_n für $n = \infty$ verschwinden muss, ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, dass eine Reihe, in der die Glieder, welche weit genug vom Anfang abstehen, nicht unbegränzt abnehmen, nicht konvergent seyn kann.

II. Ist die unendliche Reihe

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \ldots\ldots, \qquad \text{(b)}$$

in der $u_1, u_2, \ldots$ als Funktionen von x angesehen sind, konvergent von $x = a$ bis $x = b$, und ist innerhalb dieser Gränzen z ihre Summe, so ist (§. 57, II) für x zwischen a und b:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots = \int_a^x z\,\partial x + C,$$

wo C der Werth der Reihe erster Seite für $x = a$ ist, der als endlich und bestimmt angenommen wird, so wie auch z als stetig vorausgesetzt wird. (§. 41, II).

Bezeichnet man also $\int_a^x z\,\partial x + C$ durch y, so ist (natürlich innerhalb derselben Gränzen für x):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots, = y, \qquad \text{(b')}$$

wo nun $\frac{\partial y}{\partial x} = z$, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \ldots\ldots \qquad \text{(c)}$$

(Vergl. §. 92, Note.) Da $\frac{\partial y}{\partial x}$ endlich und stetig ist, so ist y eine stetige Funktion von x (§. 10).

Daraus folgt der Satz:

Die Reihe (b') ist eine stetige Funktion von x, so lange die Reihe (b) eine endliche Summe hat.

Eine (stetige) Funktion, deren Differentialquotient endlich ist, kann ihren Werth nicht plötzlich ändern, oder springen (§. 143, IV), da sonst der Differentialquotient nothwendig unstetig seyn müsste, wie sich diess aus der ersten Erklärung desselben ergibt. — Daraus folgt weiter, dass die Summe der Reihe (b') so lange dieselbe Funktion von x seyn muss, als die Reihe (b) konvergirt (und ihre Summe eine stetige Grösse ist).

Die Reihe in §. 146, Nr. 3 wird durch Differenzirung geben:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\alpha\pi}{c}\cos\frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\alpha\pi}{c}\cos\frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\alpha\pi}{c}\cos\frac{5\pi x}{c} + \ldots\right]$$

und es wird die zweite Seite unstetig seyn für $x = \alpha$, $c - \alpha$ (und auch für $x = 0$, c).

III. Sey die Reihe

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots\ldots \qquad (d)$$

vorgelegt, so wird sie konvergiren, wenn von einem gehörig grossen m an

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\ldots\ldots. \qquad (e)$$

eine endliche Summe hat, divergiren im entgegengesetzten Falle. Dabei setzen wir in (e) alle Glieder positiv voraus, und natürlich abnehmend.

Ist f(x) eine stetige (und abnehmende) Funktion von x, so ist nach §. 39, II:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x=(b-a)\,f[a+\Theta(b-a)],$$

und wenn $b>a$, also $f(b)<f(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x>(b-a)\,f(b) \text{ und } <(b-a)\,f(a).$$

Daraus folgt:

$$\int_m^{m+1} f(x)\,\partial x \begin{matrix}>f(m+1)\\ <f(m)\end{matrix},\quad \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,\partial x \begin{matrix}>f(m+2)\\ <f(m+1)\end{matrix},\ldots\ldots$$

woraus (§. 42, II):

$$\int_m^{\infty} f(x)\,\partial x \begin{matrix}>f(m+1)+f(m+2)+\ldots\ldots..\\ <f(m)+f(m+1)+\ldots\ldots\ldots..\end{matrix}$$

Ist also $\int_m^{\infty} f(x)\,\partial x$ endlich, so ist es auch $f(m+1)+f(m+2)+\ldots$, d. h. die Reihe (d) konvergirt; ist $\int_m^{\infty} f(x)\,\partial x$ unendlich, so ist es auch $f(m)+f(m+1)+\ldots$, d. h. die (d) divergirt.

Dabei erinnern wir, dass bei Reihen mit nur positiven Gliedern bloss eine bestimmte endliche Summe, oder gar keine, vorhanden ist. (§. 60, IV.)

Für $f(x)=\frac{1}{x^a}$ ist $\int f(x)\,\partial x=\frac{1}{1-a}\frac{1}{x^{a-1}}$. Für $x=\infty$ ist diess Null, wenn $a>1$, dagegen ∞, wenn $a<1$. Daraus folgt, dass die Reihe

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots..$$

konvergent ist für $a>1$; * divergent für $a<1$. Für $a=1$ ist $\int f(x)\,\partial x=l(x)$, abermals ∞ für $x=\infty$, so dass die Reihe auch für $a=1$ divergirt. (§. 164, V.)

Für $f(x)=\frac{l(x)}{x}$ ist $\int\frac{l(x)}{x}\partial x=\frac{1}{2}[l(x)]^2$, $+\infty$ für $x=\infty$; demnach ist die Reihe

---

* Hieraus lässt sich noch ein weiterer Satz für die Konvergenz folgern. Ist nämlich $u_n n^{1+\alpha}$, wo $\alpha>0$, für ein sehr grosses n kleiner als die bestimmte endliche Zahl A, so ist die Reihe $u_1, u_2, \ldots$ konvergent.

Denn dann $u_n<\frac{A+a}{n^{1+\alpha}}$, wo a eine positive endliche Zahl, also bei gehörig grossem m:

$$u_m+u_{m+1}+\ldots<(A+a)\left(\frac{1}{m^{1+\alpha}}+\frac{1}{(m+1)^{1+\alpha}}+\ldots\right),$$

d. h. endlich, da $1+\alpha>1$.

$$\frac{l(1)}{1}+\frac{l(2)}{2}+\frac{l(3)}{3}+\ldots\ldots$$

eine divergente. Das Produkt $\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\ldots$ ist also unendlich, da die vorhergehende Reihe sein Logarithmus ist.

Anwendungen.

IV. Nach §. 54, I ist

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots\ldots \qquad (f)$$

so lange $x^2<1$. Der Differentialquotient dieser Reihe ist

$$m+\frac{m(m-1)}{1}x+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}x^2+\ldots\ldots$$

d. h.

$$m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2}{1.2}x^2+\ldots\ldots\right]. \qquad (f')$$

Diese Grösse ist stetig, so lange die eingeklammerte Reihe es ist. Da diese Reihe aber aus (f) hervorgeht, wenn man m durch $m-1$ ersetzt, so ist sie jedenfalls stetig, wenn $x^2<1$, so dass nur noch die Fälle $x=\pm 1$ zu untersuchen sind.

1) Für $x=+1$ hat man statt (f): [§. 55, I]:

$$2^m = 1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{m(m-1).\ \ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)}\,\frac{(1+\Theta)^m}{(1+\Theta)^{n+1}}.$$

Verschwindet mit unendlichem n hier $\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n+1}$, so wird, da $\frac{(1+\Theta)^m}{(1+\Theta)^{n+1}}$ jedenfalls endlich ist, auch das Ergänzungsglied verschwinden.

Setzt man aber in III

$$f(x)=l\left(\frac{x-a}{x}\right)=l(x-a)-l(x),$$

so ist

$$\int f(x)\,\partial x=(x-a)[l(x-a)-1]-x[l(x)-1]=(x-a)\,l\left(\frac{x-a}{x}\right)-a\,l(x)+a.$$

Für $x=\infty$ ist

$$(x-a)\,l\left(\frac{x-a}{x}\right)=-a \text{ [§. 23, I und §. 22, IV]; *}$$

---

* Setzt man $x=\frac{1}{z}$, so ist

$$(x-a)\,l\left(\frac{x-a}{x}\right)=\left(\frac{1}{z}-a\right)l\left[z\left(\frac{1}{z}-a\right)\right]=\frac{(1-az)\,l(1-az)}{z},$$

wo nun $z=0$ zu setzen ist. Demnach (§. 22, 1):

$$\frac{-a\frac{1-az}{1-az}-a\,l(1-az)}{1}$$

für $z=0$; diess ist aber dann $=-a$.

demnach ist

$$\int_r^\infty l\left(\frac{x-a}{x}\right)\partial x = -a\,l(\infty) - (r-a)\,l\left(\frac{r-a}{r}\right) + a\,l(r) - a,$$

also, wenn nur $r>a$ [damit $l\left(\frac{r-a}{r}\right)$ reell sey], ist diese Grösse $=-\infty$ für $a>0$. Daraus folgt, dass für $a>0$ und $r>a$:

$$l\left(\frac{r-a}{r}\right) + l\left(\frac{r+1-a}{r+1}\right) + \ldots\ldots\ldots = -\infty,$$

mithin $\frac{r-a}{r}\,\frac{r+1-a}{r+1}\ldots\ldots\frac{r+s-a}{r+1}$ Null für $s=\infty$, indem die eben angegebene Reihe der Logarithmus dieses Produkts ist. Setzt man $a=m+1$, wo also $m+1>0$ seyn muss, so ist

$$\frac{r-m-1}{r}\cdot\frac{r-m}{r+1}\cdot\frac{r-m+1}{r+2}\ldots\ldots\frac{r-m+s-1}{r+s}=0 \text{ für } s=\infty.$$

Setzt man hier $s=n-r+1$, so muss $n=\infty$ seyn für $s=\infty$, und es ist

$$\frac{r-m-1}{r}\cdot\frac{r-m}{r+1}\ldots\ldots\frac{r-m+n-r}{n+1}=0 \text{ für } n=\infty,$$

$$\text{d. h. } \pm\frac{m+1-r}{r}\,\frac{m-r}{r+1}\,\frac{m-(r+1)}{r+2}\ldots\ldots\frac{m-n}{n+1}=0,$$

und mithin auch, wenn man mit $\frac{m(m-1)\ldots.m-(r-2)}{1.2\ldots\ldots r-1}$ multiplizirt:

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1.2\ldots\ldots n+1}=0 \text{ für } n=\infty \text{ und } m+1>0.$$

Also gilt die Formel (f) noch, wenn $x=+1$ und $m+1>0$.

2) Für $x=-1$ wird die Reihe in (f) zu

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots, \qquad (g)$$

welche für gehörig weit vom Anfang entfernte Glieder nur solche mit demselben Zeichen hat. Ist aber r gross genug, damit $r-m$ positiv sey, so ist die (g):

$$1-\frac{m}{1}+\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}\left[1+\frac{r-m}{r+1}+\frac{(r-m)(r-m+1)}{(r+1)(r+2)}+\ldots\ldots\right]:$$

Die eingeklammerte Reihe hat wie in I (S. 364 unten) einen endlichen Werth wenn $(r+1)-(r-m)>1$, d. h. wenn $m+1>1$, $m>0$. Demnach ist (g) konvergent für $m>0$; ob aber ihre Summe $=(1+x)^m$, d. h. hier $=0$, bleibt noch zu erweisen. (Siehe den Zusatz am Schlusse des Anhangs.)

Da hiernach die (f) noch eine bestimmte Summe hat für $m>0$ und $x=-1$, für alle x bis zu -1 aber die Summe $=(1+x)^m$ ist und die Reihe (f) als nach Potenzen von x fortschreitend nicht plötzlich springt, so dürfte man sie sofort für $x=-1$ $(m>0)$ noch gelten lassen, doch lässt sich diess förmlich erweisen.

Ist nämlich $m>0$ (und $x=-1$) so ist wie gezeigt, die (f) noch konvergent, hat also eine bestimmte Summe, von der wir zeigen können dass sie $=0$ ist. Setzt man sie $=\alpha$, so ist also (wenn $m>0$):

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots=\alpha$$

und nach (f) wenn $x=1$:

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots=2^m,$$

woraus durch Addition:

$$1+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots=2^{m-1}+\frac{1}{2}\alpha.$$

Aber da $m-1>-1$, so ist auch nach 1)

$$1+\frac{m-1}{1}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}+\ldots\ldots=2^{m-1},$$

woraus durch Subtraktion:

$$1-1-\frac{m-1}{1}+\left[\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\right]-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$
$$+\left[\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}\right]-\ldots\ldots=\frac{\alpha}{2},$$

d. h.

$$-\frac{m-1}{1}+\frac{m-1}{1}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}-\ldots\ldots=\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$0=\frac{\alpha}{2},\ \alpha=0.$$

Demnach gilt die (f) für $x=-1$, wenn $m>0$.

V. Nach §. 55, VI ist

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^n}{n}\mp\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}.$$

Für $x^2<1$ verschwindet das Ergänzungsglied, wie bereits gezeigt; für $x=-1$ braucht man keine Untersuchung, da alsdann die erste Seite unendlich wird; für $x=1$ ist das Ergänzungsglied gleich $\frac{1}{(n+1)(1+\Theta)^{n+1}}$, das für $n=\infty$ immerhin verschwindet. Demnach gilt die Formel

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots,\ \text{für } x^2<1 \text{ und } x=1.\ (\S.\ 164,\ V).$$

VI. In §. 57, VI ergab sich

$$arc\,(tg=x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots,\ \text{für } x^2<1;$$

so dass noch $x=\pm 1$ zu untersuchen ist.

Für $x=-1$ hat die Reihe aber bloss das entgegengesetzte Zeichen, wie für $x=+1$. Wir haben also nur den Fall $x=1$ zu untersuchen, in welchem die Reihe allerdings konvergent ist (§. 164, V). Aber es ist (§. 55, I):

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4=\ldots\pm x^{2n}\pm\frac{x^{2n+2}}{(1+\Theta x^2)^n},$$

$$arc\,(tg=1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\mp\int_0^1\frac{x^{2n+2}\,\partial x}{(1+\Theta x^2)^n}.$$

Nun ist

$$\frac{x^{2n+2}}{(1+\Theta x^2)^n}<x^{2n+2},\ \text{also}\ \int_0^1\frac{x^{2n+2}\,\partial x}{(1+\Theta x^2)^n}<\int_0^1 x^{2n+2}\,\partial x,\ \text{d. h.}<\frac{1}{2n+3}.$$

Für $n=\infty$ wird diess aber zu Null, also auch $\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{(1+\Theta x^2)^n}\,\partial x$, so dass die Gleichung

$$arc\,(tg=x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots$$

gilt für $x^2<1$, und $x=\pm 1$.

VII. Eben so fanden wir (§. 57, V):

$$arc\,(sin=x)=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots,\ \text{für}\ x^2<1,$$

so dass noch $x=\pm 1$ zu untersuchen bleibt.

Für $x=+1$ ist in I

$$Gr\,n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=Gr\,n\left(\frac{2n+2}{2n+1}\,\frac{2n+3}{2n+1}-1\right)=Gr\,\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}=\frac{3}{2},$$

also die Reihe konvergent. Dasselbe gilt für $x=-1$, indem sie bloss das Zeichen wechselt.

Fall imaginärer Veränderlichen.

VIII. Wir wollen uns die Frage stellen, ob die Gleichung (§. 54, I)

$$(1+a)^m=1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\ldots\ldots,\ a^2<1 \qquad (a)$$

auch noch gilt, wenn a imaginär $= r(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)=r\,e^{\varphi i}$ (§. 54, V; §. 9, I). Alsdann wird die Reihe, da $(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)^n=cos\,n\varphi+i\,sin\,n\varphi$ (§. 4) wenn n positiv und ganz, zu

$$1+\frac{m}{1}r\,cos\,\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}r^2cos^2\varphi+\ldots+i\left[\frac{m}{1}r\,sin\,\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}r^2sin^2\varphi+\ldots\right]. \quad (b)$$

Diese beiden Reihen sind konvergent für $r^2<1$,* unter welcher Bedingung $1+\frac{m}{1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}r^2+\ldots$ es ist. Setzen wir nun die Summe der Reihe (b) gleich y, so ist

* Ist die Reihe $u_1+u_2+u_3+\ldots$ unter gewissen Bedingungen konvergent, so ist die Reihe $b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3+\ldots$, wenn die sämmtlichen b die Einheit nicht übersteigen, unter denselben Bedingungen konvergent. Dabei denken wir uns $u_1, u_2, \ldots$ sämmtlich positiv.

$$y = 1 + \frac{m}{1} r e^{\varphi i} + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = m e^{\varphi i} + \frac{m(m-1)}{1} r e^{2\varphi i} + \ldots\ldots$$

$$(\text{§. 92, I, 3 Note}) = m e^{\varphi i}\left[1 + \frac{m-1}{1} r e^{\varphi i} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots\right],$$

da

$$e^{\mu i} e^{\nu i} = (\cos\mu + i \sin\mu)(\cos\nu + \sin\nu) = \cos(\mu+\nu) + i \sin(\mu+\nu) = e^{(\mu+\nu)i}.$$

Daraus

$$\frac{1 + r e^{\varphi i}}{m e^{\varphi i}} \frac{\partial y}{\partial r} = 1 + \frac{m-1}{1} r e^{\varphi i} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots$$

$$+ r e^{\varphi i} + \frac{m-1}{1} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + m r e^{\varphi i} + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots (\text{§. 5}) = y,$$

also

$$(1 + r e^{\varphi i}) \frac{\partial y}{\partial r} = m e^{\varphi i} y, \quad \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{m e^{\varphi i}}{1 + r e^{\varphi i}}, \quad l(y) = m\, l(1 + r e^{\varphi i}) + C \; (\text{§.91}),$$

$$y = C(1 + r e^{\varphi i})^m.$$

Für $r = 0$ ist aber $y = 1$, also $C = 1$ und $y = (1 + r e^{\varphi i})^m$. Demnach gilt (a) noch wenn $a = r e^{\varphi i}$, $r^2 < 1$.

IX. Die Reihe

$$l(1 + a) = a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 - \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

gilt für $a^2 < 1$. Setzt man $a = r e^{\varphi i}$, so entsteht die Doppelreihe

$$r \cos\varphi - \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi + \ldots + i\left(r \sin\varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi + \ldots\right),$$

die für $r^2 < 1$ konvergirt. Setzt man ihre Summe $= y$, so ist

$$y = r e^{\varphi i} - \frac{1}{2} r^2 e^{2\varphi i} + \ldots, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = e^{\varphi i}(1 - r e^{\varphi i} + r^2 e^{2\varphi i} - \ldots) = \frac{e^{\varphi i}}{1 + r e^{\varphi i}}$$

(nach VIII),

woraus

$$y = \int \frac{e^{\varphi i}}{1 + r e^{\varphi i}} \partial r = l(1 + r e^{\varphi i}) + C.$$

Da für $r = 0$ auch $y = 0$, so ist $C = 0$, und folglich gilt (c), wenn $a = r e^{\varphi i}$, $r^2 < 1$. Dabei ist $l(1 + r e^{\varphi i})$ eindeutig (§. 9, IV, da sonst nicht $l(1) = 0$) und

$$= \frac{1}{2} l(1 + 2 r \cos\varphi + r^2) + \psi i,$$

wo

$$\cos\psi = \frac{1 + r \cos\varphi}{(1 + 2 r \cos\varphi + r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\psi = \frac{r \sin\varphi}{(1 + 2 r \cos\varphi + r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und ψ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Es folgt daraus

$$\frac{1}{2} l(1 + 2 r \cos\varphi + r^2) = r \cos\varphi - \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} r^3 \cos 3\varphi - \ldots,$$

$$arc\left(tg=\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}\right)=r\sin\varphi-\frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}r^3\sin 3\varphi-\ldots$$

Die Reihe in §. 54, III gilt für $x=\varphi i$ sofort, da sie $e^{\varphi i}=\cos\varphi+\sin\varphi$ liefert.

Dass man die übrigen Reihen in ähnlicher Weise behandeln kann, ist leicht ersichtlich.

.

Das Legendre'sche Theorem für die Gammafunktionen.

Gemäss §. 162, VI ist

$$\Gamma(a)=Gr\frac{1.2.3\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

so dass also nach einander:

$$\Gamma(a)=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^a m^n}{ma(ma+m)\ldots(ma+\overline{n-1}\,m)},$$

$$\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{1}{m}}}{\left(a+\frac{1}{m}\right)\left(a+1+\frac{1}{m}\right)\ldots\left(a+\frac{1}{m}+n-1\right)}$$

$$=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{1}{m}}m^n}{(ma+1)(ma+1+m)\ldots(ma+1+\overline{n-1}\,m)},$$

$$\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{2}{m}}}{\left(a+\frac{2}{m}\right)\left(a+1+\frac{2}{m}\right)\ldots\left(a+\frac{2}{m}+n-1\right)}$$

$$=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{2}{m}}m^n}{(ma+2)(ma+2+m)\ldots(ma+2+\overline{n-1}\,m)},$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{m-1}{m}}}{\left(a+\frac{m-1}{m}\right)\left(a+1+\frac{m-1}{m}\right)\ldots\left(a+\frac{m-1}{m}+n-1\right)}$$

$$=Gr\frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{m-1}{m}}m^n}{(ma+m-1)(ma+m-1+m)\ldots(ma+m-1+\overline{n-1}\,m)}.$$

Hieraus folgt unmittelbar (wenn m positiv und ganz):

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$=Gr\frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{mn}n^{ma+\frac{m-1}{2}}}{ma(ma+1)(ma+2)\ldots(ma+mn-1)}$$

$$= Gr \frac{1.2\ldots(mn-1)\,(mn)^{am}}{ma(ma+1)\ldots(ma+mn-1)}\; Gr \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{mn} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)m^{am}}.$$

Nun ist aber, wenn $mn = n'$:

$$Gr \frac{1.2\ldots(mn-1)\,(mn)^{am}}{ma(ma+1)\ldots(ma+mn-1)} = Gr \frac{1.2\ldots(n'-1)\,n'^{am}}{ma(ma+1)\ldots(ma+n'-1)} = \Gamma(ma),$$

da mit unendlichem n auch mn unendlich wird, so dass also

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{m})\ldots\Gamma(a+\frac{m-1}{m}) = \frac{\Gamma(ma)}{m^{am}} Gr \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{nm} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)}.$$

Aber nach §. 165, III ist

$$Gr \frac{1.2\ldots n e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \text{ d. h. } Gr \frac{1.2\ldots mne^{mn}}{(mn)^{mn+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

$$Gr \frac{(mn)^{mn+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ferner

$$Gr \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{mn} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)} = Gr \frac{(1.2\ldots n)^m m^{nm} n^{\frac{m-1}{2}} mn}{1.2\ldots mn.n^m} =$$

$$Gr\left(\frac{1.2\ldots n.e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)^m Gr \frac{m^{nm+1} n^{\frac{m+1}{2}} n^{nm+\frac{1}{2}m}}{1.2\ldots mn.n^m e^{mn}} = (\sqrt{2\pi})^m\, Gr \frac{m^{nm+1} n^{nm+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}}$$

$$= m^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2\pi})^m Gr \frac{(nm)^{nm+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}} = \sqrt{m(2\pi)^m}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{m(2\pi)^{m-1}},$$

so dass endlich

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{m})\Gamma(a+\frac{2}{m})\ldots\Gamma(a+\frac{m-1}{m}) = \frac{\Gamma(ma)}{m^{am}}\sqrt{m(2\pi)^{m-1}}$$

C.

Man soll die Differentialgleichung

$$(A + A'x + A''y)\,(x\frac{\partial y}{\partial x} - y) + (B + B'x + B''y)\frac{\partial y}{\partial x} + C + C'x + C''y = 0 \qquad \text{(a)}$$

integriren.

I. Man setze

$$p = \frac{a' + b'x + c'y}{a + bx + cy}, \quad q = \frac{a'' + b''x + c''y}{a + bx + cy}, \qquad \text{(b)}$$

so erhält man, wenn zur Abkürzung $a + bx + cy = z$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} z^2\frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha''(x\frac{\partial y}{\partial x} - y) + \beta''\frac{\partial y}{\partial x} + \gamma'', \\ z^2\frac{\partial q}{\partial x} &= \alpha'(x\frac{\partial y}{\partial x} - y) + \beta'\frac{\partial y}{\partial x} + \gamma', \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

wo

$$\left.\begin{array}{l}\alpha''=bc'-b'c,\ \beta''=ac'-a'c,\ \gamma''=ab'-a'b,\\ \alpha'=bc''-b''c,\ \beta'=ac''-a''c,\ \gamma'=ab''-a''b.\end{array}\right\}\quad (d)$$

Setzt man weiter noch

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=b'c''-b''c',\ \beta=a''c'-a'c'',\ \gamma=a'b''-a''b',\\ \delta=a(b'c''-b''c')+b(a''c'-ac'')+c(a'b''-a''b')=a\alpha+b\beta+c\gamma,\end{array}\right\}\quad (d')$$

so findet man leicht, dass

$$\left.\begin{array}{l}a\alpha'-b\beta'+c\gamma'=0,\ a\alpha''-b\beta''+c\gamma''=0,\ a'\alpha'-b'\beta'+c'\gamma'=-\delta,\\ a'\alpha''-b'\beta''+c'\gamma''=0,\ a''\alpha''-b''\beta''+c''\gamma''=\delta,\ a''\alpha'-b''\beta'+c''\gamma'=0.\end{array}\right\}\quad (d'')$$

Gesetzt nun man habe die Gleichung

$$M\frac{\partial p}{\partial x}+N\frac{\partial q}{\partial x}=0, \quad (e)$$

so ergibt dieselbe mittelst (c):

$$(M\alpha''+N\alpha')\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+(M\beta''+N\beta')\frac{\partial y}{\partial x}+M\gamma''+N\gamma'=0. \quad (e')$$

Multipliziren wir diese Gleichung noch mit z, so wird sie mit (a) zusammenstimmen, wenn identisch:

$$\left.\begin{array}{l}z(M\alpha''+N\alpha')+\lambda\ =A+A'x+A''y,\\ z(M\beta''+N\beta')-\lambda x=B+B'x+B''y,\\ z(M\gamma''+N\gamma')+\lambda y=C+C'x+C''y\end{array}\right\}\quad (f)$$

seyn kann. Berücksichtigt man (d''), so folgt aus (f):

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(a+bx+cy)=Aa-Bb+Cc+(A'a-B'b+C'c)x+(A''a-B''b+C''c)y,\\ \lambda(a'+b'x+c'y)-\delta Nz=Aa'-Bb'+Cc'+(A'a'-B'b'+C'c')x+(A''a'-B''b'\\ \qquad\qquad +C''c')y,\\ \lambda(a''+b''x+c''y)+\delta Mz=Aa''-Bb''+Cc''+(A'a''-B'b''+C'c'')x+(A''a''\\ \qquad\qquad -B''b''+C''c'')y,\end{array}\right\}\quad (f')$$

welche drei Gleichungen natürlich die (f) ersetzen.

Man setze nun $N\delta=-(\lambda'-\lambda)p$, $M\delta=(\lambda''-\lambda)q$, so werden die ersten Seiten der Gleichungen (f') zu $\lambda(a+bx+cy)$, $\lambda'(a'+b'x+c'y)$, $\lambda''(a''+b''x+c''y)$, während für M und N zwei andere Grössen: λ', λ'' eingeführt sind. Die (f') sind nun identisch, wenn:

$$\left.\begin{array}{l}Aa-Bb+Cc=\lambda a,\ A'a-B'b+C'c=\lambda b,\ A''a-B''b+C''c=\lambda c,\\ Aa'-Bb'+Cc'=\lambda'a',\ A'a'-B'b'+C'c'=\lambda'b',\ A''a'-B''b'+C''c'=\lambda'c',\\ Aa''-Bb''+Cc''=\lambda''a'',\ A'a''-B'b''+C'c''=\lambda''b'',\ A''a''-B''b''+C''=\lambda''c''\end{array}\right\}\quad (g)$$

ist, und alsdann fällt die Gleichung

$$\frac{\lambda''-\lambda}{\delta}q\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\lambda'-\lambda}{\delta}p\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad (a')$$

zusammen mit (a). Eliminirt man aus den drei ersten Gleichungen (g) die Grössen a, b, c, so erhält man:

$$(A-\lambda)(B'+\lambda)(C''-\lambda-B''C'(A-\lambda)-A''C(B'+\lambda)-A'B(C''-\lambda)+A''BC'$$
$$+B''A'C=0. \quad (h)$$

Ganz dieselbe Gleichung erhält man für λ', λ'' aus den übrigen Gleichungen (g). Bestimmt man also aus (h) die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung, und

sind λ, λ', λ'' dieselben, so wird (a) zu (a'), wenn man a, b, . . ., c'' aus (g) bestimmt. Da diese Gleichungen nur die Quotienten $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, bestimmen, so bleiben drei dieser Grössen ganz willkürlich.

Die Gleichung (a') gibt nun

$$(\lambda'' - \lambda) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - (\lambda' - \lambda) \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (\lambda'' - \lambda)\, l(p) - (\lambda' - \lambda)\, l(q) = C,$$

$$p^{\lambda'' - \lambda} = C q^{\lambda' - \lambda},$$

so dass man folgenden Satz erhält:

„Bestimmt man aus (h) die drei Werthe von λ, und sind dieselben λ, λ', λ''; ermittelt dann aus (g) sechs der Grössen a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', nachdem man drei davon willkürlich angenommen, so ist das Integral der Gleichung (a):

$$(a' + b'x + c'y)^{\lambda'' - \lambda} (a'' + b''x + c''y)^{\lambda - \lambda'} (a + bx + cy)^{\lambda' - \lambda''} = C.“$$

II. Für den Fall dass nicht alle Wurzeln der Gleichung (h) von einander verschieden sind, lässt sich obige Auflösung nicht anwenden. Man kann jedoch im Allgemeinen eine andere Auflösung geben, die von diesen Mängeln frei ist.

Man setze nämlich

$$A + A'x + A''y = u, \quad y = \frac{u - A'x - A}{A''} \quad (A'' \text{ nicht Null})$$

so ist, wenn man in (a) einsetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A''u^2 + \beta x + \gamma u + \delta}{A''ux + \beta'x + \gamma'u + \delta'}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{A''ux + \beta'x + \gamma'u + \delta'}{A''u^2 + \beta x + \gamma u + \delta},$$

wo $\beta = A'(B''A' - B'A'') + A''(A'C'' - A''C')$, $\gamma = A'B'' - A''(A + C'')$,

$$\delta = (BA'' - B''A)A' + (CA'' - C''A)A''$$
$$\beta' = A''B' - A'B'', \quad \gamma' = B'', \quad \delta' = BA'' - B''A.$$

Man setze nun

$$\frac{A''ux + \beta'x + \gamma'u + \delta'}{A''u^2 + \beta x + \gamma u + \delta} = z, \quad x = \frac{A''u^2z + \gamma uz + \delta z - \gamma'u - \delta'}{A''u + \beta' - \beta z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = z = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{A''u^2z + \gamma uz + \delta z - \gamma'u - \delta'}{A''u + \beta' - \beta z}\right],$$

$$(A''u + \beta' - \beta z)^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A''u^2z + \gamma uz + \delta z - \gamma'u - \delta'}{A''u + \beta' - \beta z}\right) - z(A''u + \beta' - \beta z)^2 = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial z}{\partial u}[A''^2u^3 + A''(\gamma + \beta')u^2 + (A''\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')u + \beta'\delta - \beta\delta']$$
$$- \beta^2z^3 + (2\beta\beta' - \beta\gamma)z^2 + (\beta\gamma' + \beta'\gamma - A''\delta - \beta'^2)z - \beta'\gamma' + A''\delta' = 0,$$

woraus nun

$$\frac{1}{\beta^2z^3 + (\gamma - 2\beta')\beta z^2 + (A''\delta + \beta'^2 - \beta\gamma' - \beta'\gamma)z + \beta'\gamma' - A''\delta'} \frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= \frac{1}{A''^2u^3 + A''(\gamma + \beta')u^2 + (A''\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')u + \beta'\delta - \beta\delta'}.$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind. Ist weder A'' noch β Null, so kann man etwa setzen:

$$A''u+\beta'=\beta v,\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{A''}{\beta}\frac{\partial z}{\partial v}$$

und erhält:

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{\varphi(v)},\ \varphi(z)=\beta^2 z^3+(\gamma-2\beta')\beta z^2+(A''\delta+\beta'^2-\beta\gamma'-\beta'\gamma)z+\beta'\gamma'-A''\delta'.$$

Integrirt man die Gleichung zwischen z und v, oder z und u, setzt dann

$$z=\frac{A''ux+\beta'x+\gamma'u+\delta}{A''u^2+\beta x+\gamma'u+\delta},\ u=A+A'x+A''y,$$

so erhält man die Gleichung zwischen x und y.

Ist $A''=0$, so lässt sich die obige Rechnung nicht durchführen. Wäre in diesem Falle auch noch $B''=0$, so käme die vorgelegte Gleichung auf §. 66 zurück. Ist Letzteres nicht der Fall, so kommt die Gleichung auf

$$y\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}(a+bx+cx^2)-y(a'+cx)+a''+b''x=0,\ (c=A')$$

zurück. Hieraus folgt nun

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y(a'+cx)-a''-b''x}{y+a+bx+cx^2},$$

und wenn man $\frac{\partial y}{\partial x}=u$ setzt, so ist

$$y=\frac{(a+bx+cx^2)u+a''+b''x}{a'+cx-u}.$$

Demnach

$$u=\frac{d}{dx}\left[\frac{(a+bx+cx^2)u+a''+b''x}{a'+cx-u}\right],$$

welche Gleichung unmittelbar auf die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}[cx^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma]+(-u^3+\alpha'u^2+\beta'u+\gamma')=0$$

führt, in der die Veränderlichen getrennt werden können.

D.

Aufgabe.

In einer vertikal stehenden Ebene soll eine Kurve konstruirt werden so, dass ein schwerer Körper, der auf ihr herabfällt, immer in derselben Zeit in dem tiefsten Punkte derselben anlangt, von wo aus (auf der Kurve) er auch ohne Anfangsgeschwindigkeit gegangen seyn mag, wenn man von der Reibung und dem Luftwiderstand absieht. (Tautochrone.)

Sey durch den tiefsten Punkt die Axe der x vertikal gegen die Richtung der Schwere gerichtet; y die Ordinate eines Punktes, s der zum Punkt (x, y) gehörige, vom Anfangspunkt aus gerechnete Kurvenbogen. (Man vergleiche etwa Fig. 22, wenn AM vertikal nach oben gerichtet ist, $AM=x$, $MN=y$, $AN=s$.) Ist p das Gewicht des Körpers, t die vom Anfang der Bewegung gerechnete Zeit, so hat man:

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-p,\ \frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0;\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-g,\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0;\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-g\frac{\partial x}{\partial t};\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=-2gx+C.$$

Ist nun h die Abszisse des Ausgangspunkts, so ist für $x=h$: $\frac{\partial s}{\partial t}=0$, also $C=2gh$ und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=2g(h-x)$, $\frac{\partial s}{\partial t}=-\sqrt{2g(h-x)}$, wo man das negative Zeichen wählen muss, da s abnimmt mit wachsendem t. Demnach:

$$\frac{\partial t}{\partial s}=-\frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}},\ t=-\int\frac{\partial s}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Ist nun $s=f(x)$, so ist wenn τ die Zeit des Falles:

$$\tau=\int_0^h\frac{f'(x)\,\partial x}{\sqrt{2g(h-x)}}=\sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^1\frac{f'(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll diese Grösse unabhängig von h seyn, so dass $\frac{\partial \tau}{\partial h}=0$ seyn muss. Demnach (§. 85, I):

$$\frac{1}{2\sqrt{2gh}}\int_0^1\frac{f'(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}+\sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^1\frac{z f''(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}=0,$$

d. h.

$$\frac{1}{2\sqrt{2hg}}\int_0^1\frac{f'(hz)+2hzf''(hz)}{\sqrt{1-z}}\partial z=0,\quad \frac{1}{2h\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{f'(x)+2xf''(x)}{\sqrt{h-x}}\partial x=0.$$

Da nun nicht $\frac{1}{2h\sqrt{2g}}=0$, so muss das bestimmte Integral Null seyn was auch h seyn mag. Diess ist nur möglich wenn $f'(x)+2xf''(x)=0$, da man ja etwa immer h klein genug wählen kann, dass $f'(x)+2xf''(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ dasselbe Zeichen hat, wo dann sicher $\int_0^h\frac{f'(x)+2xf''(x)}{\sqrt{h-x}}\partial x$ nicht Null wäre. Aber $f(x)=s$, also

$$\frac{\partial s}{\partial x}+2x\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=0,\ \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial x}}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=-\frac{1}{2x},\ l\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2}l(x)+C,\ \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$s=2C\sqrt{x}+C'=2C\sqrt{x},$$

da für $x=0$ auch $s=0$. Diese Gleichung stellt aber eine Zykloide dar. (§. 48, III, wo $C=\sqrt{2r}$). Jetzt ist

$$\tau=\int_0^h\frac{C}{\sqrt{x}}\frac{\partial x}{\sqrt{2g(h-x)}}=\frac{C\pi}{\sqrt{2g}},$$

was wirklich von h unabhängig ist. (Man vergleiche hiemit Poisson, Mechanik I, §. 197.)

C.

Aufgabe.

Ueber einer Ellipse deren Halbaxen a und b sind ist ein Kegel errichtet, dessen Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte der Ellipse in der Entfernung c liegt. Um

die Spitze beschreibt man eine Kugel mit dem Halbmesser r und will denjenigen Theil der Kugelfläche kennen, der innerhalb des Kegels liegt.

Die Gleichung der Kegelfläche ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; der Kugelfläche: $x^2+y^2+z^2=r^2$, wenn man die Kegelspitze als Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten und die Axen der x und y parallel den Hauptaxen der Ellipse nimmt. Der Inhalt des gesuchten Flächenstücks ist gegeben durch das doppelte Integral

$$r\int\int\frac{\partial x\,\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\ (\S.\ 81,\ II), \qquad \text{(a)}$$

wenn dasselhe auf alle Werthe von x und y ausgedehnt wird, die den Punkten der Projektion der gesuchten Fläche auf die Ebene der xy entsprechen. Was nun aber diese Projektion anbelangt, so wird man die Gleichung ihrer Begränzungskurve erhalten, wenn man z zwischen den Gleichungen der beiden Flächen eliminirt. Diese Gleichung ist demnach:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{r^2-x^2-y^2}{c^2},\ x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{r^2}{c^2}.$$

Setzt man in dem Integrale (a) rx, ry an die Stelle von x, y, so ist die gesuchte Fläche $=r^2\int\int\frac{\partial x\,\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, ausgedehnt auf alle positiven und negativen Werthe von x und y, für die $\alpha^2x^2+\beta^2y^2 \overline{\overline{<}} 1$, wo $\alpha^2=1+\frac{c^2}{a^2}$, $\beta^2=1+\frac{c^2}{b^2}$. Dehnt man das Integral nur auf die positiven Werthe von x und y aus, die der eben gegebenen Bedingung genügen, so erhält man den vierten Theil der Fläche. Dieselbe ist also =

$$4r^2\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\partial x\int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \qquad \text{(a)}$$

In diesem Integrale führen wir die Veränderlichen ϱ und ω ein, so dass

$$\alpha x=\varrho\cos\omega,\ \beta y=\varrho\sin\omega,\ \text{also}\ \alpha^2x^2+\beta^2y^2=\varrho^2;$$

dann ist (§. 79, II) $-\frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial y}{\partial\omega}+\frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial y}{\partial\varrho}=-\frac{\varrho}{\alpha\beta}$. Die Gränzen ergeben sich (§. 168, II) aus

$$\alpha x=\varrho\cos\omega,\ \beta y\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2x^2}=\varrho\sin\omega,$$

woraus (§. 79, II)

$$\alpha x\sin\omega=y\cos\omega\sqrt{1-\alpha^2x^2},\ tg^2\omega=\frac{y^2(1-\alpha^2x^2)}{\alpha^2x^2}.$$

Für $x=0$ folgt daraus $\omega=\frac{\pi}{2}$, für $x=\frac{1}{\alpha}$ aber $\omega=0$. Dann

$$y\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\omega}=\varrho\sin\omega,\ \varrho^2=\frac{y^2}{\sin^2\omega+y^2\cos^2\omega}.$$

Für $y=0$ ist $\varrho=0$, für $y=1$ aber $\varrho=1$, wie sich erwarten liess, da $\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\varrho^2$. Demnach ist die Fläche gleich

$$-4r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\partial\omega\int_0^1\frac{\varrho}{\alpha\beta}\frac{\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left(\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}$$

$$=\frac{4r^2}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\omega\int_0^1\frac{\varrho\,\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left(\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}.$$

Das Integral ist

$$\frac{4r^2}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}}-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}{\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}}\right]\partial\omega$$

$$=4r^2\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\omega}{\alpha^2 sin^2\omega+\beta^2 cos^2\omega}-4r^2\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}{\alpha^2 sin^2\omega+\beta^2 cos^2\omega}\partial\omega.$$

Wir wollen $a>b$ voraussetzen, so dass $\beta^2>\alpha^2$; alsdann ist das erste Integral =

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\omega}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)sin^2\omega}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\omega}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)cos^2\omega}=\frac{1}{2\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\omega}{\beta-cos\,\omega\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$$

$$+\frac{1}{2\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\omega}{\beta+cos\,\omega\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2},$$

wenn man §. 40, IV und §. 32, IV beachtet.

Was das zweite obiger Integrale betrifft, so kommt es auf elliptische Integrale zurück. Setzt man nämlich $sin\,\omega=x$, so ist es da x, $cos\,\omega$ nur positiv sind

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{\beta^2}-\frac{1-x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2x^2+\beta^2(1-x^2)}\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{1-\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)x^2}{(\alpha^2-\beta^2)x^2+\beta^2}\frac{\partial x}{\sqrt{\left[1-\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)x^2\right](1-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1\frac{\beta^2(\alpha^2-1)+(\beta^2-\alpha^2)x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2}\frac{\partial x}{\sqrt{[\beta^2(\alpha^2-1)+(\beta^2-\alpha^2)x^2](1-x^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\int_0^1\frac{1+n^2x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2}\frac{\partial x}{\sqrt{(1+n^2x^2)(1-x^2)}},$$

wo $n^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2(\alpha^2-1)}$, also da $\alpha^2>1$ jedenfalls $n^2>0$ ist. Setzt man hier (§. 156) $x=cos\,\varphi$, so ist

$$\int_0^1 \frac{1+n^2x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+n^2x^2)(1-x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+n^2 \cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1+n^2\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+n^2 \cos\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}},$$

wo

$$e^2 = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2(\beta^2-1)},\quad 1+n^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2-1)}{\beta^2(\alpha^2-1)},\ \text{d. h. } e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\quad 1+n^2 = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} = -\frac{n^2}{\beta^2-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \frac{1}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} = -\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \frac{1}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)} + \frac{1}{\alpha^2-1} \frac{1}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\sin^2\varphi},$$

so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2-1} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}, e\right),$$

mithin endlich

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \partial x \int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\beta^2-1}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}, e\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta^2-1}} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right),$$

wo also

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\quad \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\frac{c^2}{b^2} = \frac{c^2e^2}{b^2},\quad \alpha\sqrt{\beta^2-1} = \frac{c}{ab}\sqrt{(a^2+c^2)},$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\beta^2-1}} = \frac{a(b^2+c^2)}{bc\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Man setze nun in der Formel (h) des §. 152, I:

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\quad tg^2\alpha = \frac{c^2}{b^2},\quad \sin^2\alpha = \frac{c^2}{b^2+c^2},\quad \cos^2\alpha = \frac{b^2}{b^2+c^2},$$

$$-(\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha) = -\frac{a^2}{a^2+c^2},$$

so ist (§. 160, III):

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}, e\right) = -\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{a^2}{a^2+c^2}, e\right)$$

$$+ \frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2(b^2+c^2)} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + \frac{bc\sqrt{a^2+c^2}}{a(b^2+c^2)} \frac{\pi}{2};$$

setzt man weiter in §. 152, II:

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\quad a=-\frac{a^2}{a^2+c^2},$$

folglich

$$k=\left(1-\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^2c^2}{a^2(a^2+c^2)},\quad \varphi=\frac{\pi}{2},$$

also $\varrho=\infty$, so ist

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2}{a^2+c^2},e\right)+\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)=F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\int_0^\infty\frac{\partial z}{1+\frac{b^2c^2}{a^2(a^2+c^2)}z^2},$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2}{a^2+c^2},e\right)=-\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{bc}\frac{\pi}{2},$$

so dass

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2},e\right)=\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)-\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$-\frac{bc\sqrt{a^2+c^2}}{a(b^2+c^2)}\frac{\pi}{2}+\frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2(b^2+c^2)}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{bc\sqrt{a^2+c^2}}{a(b^2+c^2)}\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)+\frac{b^2}{b^2+c^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right),$$

mithin die Fläche

$$4r^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{bc}{a\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)-\frac{ab}{c\sqrt{a^2+c^2}}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right.$$

$$\left.+\frac{ab}{c\sqrt{a^2+c^2}}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right]$$

d. h. gleich

$$4r^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{bc}{a\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)\right]. \qquad (b)$$

Für $a=b$ wäre die Ellipse ein Kreis. Dann ist

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{a^2-b^2}{a^2},e\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi=\frac{\pi}{2},$$

also jetzt die Fläche

$$4r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{\pi}{2}\right)=2r^2\pi\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right),$$

wie sich auch leicht auf elementarem Wege finden lässt.

§.

Umformung einiger bestimmter Integrale.

I. Sey das Integral

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x$$

zur Umformung vorgelegt, wenn a und b positiv sind. (Vergl. §. 44, I).

Man setze

$$ax-\frac{b}{x}=z,\ x=\frac{z}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{4ab+z^2},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2a}\pm\frac{z}{2a\sqrt{4ab+z^2}}.$$

Die Grösse $ax-\frac{b}{x}$ erreicht von $x=0$ bis $x=\infty$ kein Maximum oder Minimum, sondern wächst von $-\infty$ zu $+\infty$, so dass also die Gränzen von z sind $-\infty$ und $+\infty$. Daraus aber folgt sofort, dass nur das obere Zeichen gelten kann, man also hat:

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\left(\frac{1}{2a}+\frac{z}{2a\sqrt{4ab+z^2}}\right)\partial z$$
$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\partial z+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z^2)z\,\partial z}{\sqrt{4ab+z^2}}.$$

Aber (§. 42, VII):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\partial z=2\int_0^\infty f(z^2)\partial z,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z f(z^2)\partial z}{\sqrt{4ab+z^2}}=0,$$

so dass endlich

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(x^2)\partial x,\ a>0,\ b>0. \qquad (a)$$

Setzt man in dieser Formel etwa statt $f(z)$: $f(2ab+z)$, so ist

$$f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]=f\left[2ab+\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]=f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right),\ f(x^2)=f(2ab+x^2),$$

so dass auch

$$\int_0^\infty f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(2ab+x^2)\partial x,\ a>0,\ b>0. \qquad (b)$$

Uebrigens lässt sich diese Formel leicht aus §. 44, I ableiten. Setzt man dort nämlich $f(x)=F[x^2-2ab]$, so ist $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)=F\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab\right]$ $=F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)$, $f(\sqrt{x^2+4ab})=F(x^2+4ab-2ab)=F(x^2+2ab)$, so dass

$$\int_0^\infty F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty F(x^2+2ab)\,\partial x.$$

2) Setzt man das bestimmte Integral $\int_0^\infty\frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\partial x$, in dem a und b positiv sind, gleich y, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\int_0^\infty\frac{2ax^2\partial x}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}=\frac{2a}{1-a^2b^2}\int_0^\infty\left(\frac{-b^2}{b^2+x^2}+\frac{1}{1+a^2x^2}\right)\partial x=\frac{\pi}{1+ab},$$
$$y=\pi\int\frac{\partial a}{1+ab}=\frac{\pi}{b}l(1+ab)+C,$$

wo C unabhängig ist von a. Für $a=0$ ist aber $y=0$, also $C=0$, so dass

$$\int_0^\infty\frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\partial x=\frac{\pi}{b}l(1+ab);\ a>0,\ b>0.$$

𝔊.

Die Gleichung $\int_a^b f(x)F^n(x)\partial x = (-1)^n \int_a^b f^n(x)F(x)\partial x$. Folgerungen.

I. Sey $f(x)$ eine Funktion von x so beschaffen, dass $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{n-1}(x)$ Null sind für $x=a$ und $x=b$, so ist

$$\int_a^b f(x)F^n(x)\partial x = (-1)^n \int_a^b f^n(x)F(x)\partial x. \qquad \text{(a)}$$

Dieser Satz folgt ganz unmittelbar aus dem nachstehenden Schema:

$$\int f(x)F^n(x)\partial x = f(x)F^{n-1}(x) - \int f'(x)F^{n-1}(x)\partial x,$$

$$\int f'(x)F^{n-1}(x)\partial x = f'(x)F^{n-2}(x) - \int f''(x)F^{n-2}(x)\partial x,$$

$$\vdots$$

$$\int f^{n-1}(x)F'(x)\partial x = f^{n-1}(x)F(x) - \int f^n(x)F(x)\partial x.$$

Dass dabei $f^n(x)$ und $F^n(x)$ innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn müssen, versteht sich von selbst.

II. Als besonderes Beispiel wollen wir $a=-1$, $b=+1$, $f(x)=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ setzen, wo n (wie eben) eine positive ganze Zahl ist, so sind alle Bedingungen erfüllt und es ist:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}F^n(x)\partial x = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^n} F(x)\partial x. \qquad \text{(b)}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\varphi), \text{ wenn } x=\cos\varphi. \qquad \text{(b')}$$

Denn für $n=2, 3, \ldots$ gilt der Satz. Es ist nämlich (φ zwischen 0 und π)

$$\frac{\partial(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x} = -\frac{1.3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}2x = -\frac{1.3}{2}2\cos\varphi\sin\varphi = -\frac{1.3}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{\partial x^2} = -\frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial x}[2x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] = -5[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}] = -5[\sin^3\varphi -$$
$$3\cos^2\varphi\sin\varphi] = 5\sin 3\varphi = \frac{1.3.5}{3}\sin 3\varphi.$$

Sey nun der Satz (b') wahr für ein bestimmtes n, so fragt es sich ob er für das folgende n auch noch gilt. Sey also

$$\frac{\partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^{n-1}} = y_n = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin n\varphi,$$

so ist

$$y_{n+1} = \frac{\partial^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^n} = \int_1^x \frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}\partial x = -\int_0^\varphi \frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

wenn man $x=\cos\varphi$ setzt. Aber (§. 18')

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}[(1-x^2)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]}{\partial x^{n+n}} = (1-x^2)\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} - 2(n+1)x\frac{\partial y_n}{\partial x} - n(n+1)y_n,$$

oder wenn $x = \cos\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$:

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^2 y_n}{\partial\varphi^2} + (2n+1)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial y_n}{\partial\varphi} - n(n+1)y_n,$$

d. h.

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}} = (-1)^n 1.3\ldots(2n-1)\,n\sin n\varphi + (-1)^{n-1}1.3\ldots(2n-1)(2n+1)$$

$$\cos n\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - (-1)^{n-1}1.3\ldots(2n-1)(n+1)\sin n\varphi$$

$$= (-1)^n 1.3\ldots(2n-1)\left[n\sin n\varphi - (2n+1)\frac{\cos\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi} + (n+1)\sin n\varphi\right]$$

$$= (-1)^n 1.3\ldots(2n+1)\left[\sin n\varphi - \frac{\cos\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}.1.3\ldots(2n+1)\frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

so dass

$$y_{n+1} = (-1)^n\int_0^\varphi 1.3\ldots(2n+1)\frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi\,\partial\varphi = (-1)^n\frac{1.3..(2n+1)\sin(n+1)\varphi}{n+1},$$

wodurch der Satz (b′) bewiesen ist.

III. Setzt man in der Formel (b) nun $x = \cos\varphi$, so ist

$$\int_0^\pi \sin^{2n-1}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\sin\varphi\,\partial\varphi = (-1)^n\int_0^\pi(-1)^{n-1}1.3\ldots(2n-1)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin n\varphi}{n}\right]\times$$

$$F(\cos\varphi)\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

und da

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin n\varphi}{n}\right)\left(-\frac{1}{\sin\varphi}\right) = -\frac{\cos n\varphi}{\sin\varphi},$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\,\partial\varphi &= 1.3\ldots(2n-1)\int_0^\pi \cos n\varphi\, F(\cos\varphi)\,\partial\varphi,\\ \int_0^\pi \cos n\varphi\, F(\cos\varphi)\,\partial\varphi &= \frac{1}{1.3.5\ldots 2n-1}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\,\partial\varphi.\end{aligned}\right\}\quad (c)$$

Als Anwendung dieses Satzes wollen wir

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2au+a^2}},\quad F^n(u) = \frac{1.3\ldots(2n-1)a^n}{(1-2au+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

setzen, so dass

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}} = a^n\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}.\quad (d)$$

Das Integral der zweiten Seite, in welchem wir $a^2 < 1$ voraussetzen, lässt sich auf elliptische Integrale zurückführen, wobei man nach der Vorschrift des §. 155, IV, 3 und §. 156, I zu verfahren hätte. Kürzer aber gelangt man zum Ziele, wenn man eine neue Veränderliche ψ einführt mittelst der Gleichung

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}} = \sin\psi,\quad (e)$$

wobei wir nun vor Allem die Zulässigkeit und Bedeutung dieser Annahme zu untersuchen haben.

Da immer

$$1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi=\cos^2\varphi-2a\cos\varphi+a^2=(\cos\varphi-a)^2,$$

so ist also

$$1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi>0,\ 1-2a\cos\varphi+a^2>\sin^2\varphi,$$

wodurch die Zulässigkeit der Gleichung (e) erwiesen ist. Die Grösse erster Seite geht, wenn φ von 0 bis π wächst, von 0 zu 0, so dass zu untersuchen ist ob sie Maxima und Minima haben könne (§. 42, IV). Differenzirt man nach φ, so erhält man zur Bestimmung dieser Maxima oder Minima:

$$\cos\varphi(1-2a\cos\varphi+a^2)-a\sin^2\varphi=0,\ \cos\varphi-a\cos^2\varphi-a+a^2\cos\varphi=0,$$
$$\cos\varphi-a-a\cos\varphi(\cos\varphi-a)=0,\ (\cos\varphi-a)(1-a\cos\varphi)=0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $\cos\varphi=a$ und $\cos\varphi=\frac{1}{a}$, von welchen Werthen der letztere unzulässig ist $\left(\frac{1}{a^2}>1\right)$. Für $\cos\varphi=a$ ist übrigens

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-2a^2+a^2}}=1.$$

Also wächst die Grösse erster Seite in (e), die immer positiv ist, von 0 bis 1, und nimmt dann ab von 1 bis 0. Demnach geht ψ von 0 bis π.

Es folgt aus (e):

$$\cos^2\psi=\frac{1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\frac{\cos^2\varphi-2a\cos\varphi+a^2}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\frac{(\cos\varphi-a)^2}{1-2a\cos\varphi+a^2},$$

also

$$\cos\psi=\pm\frac{\cos\varphi-a}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}.$$

Nun ist für $\varphi=0$ auch $\psi=0$ und für $\varphi=\pi$ auch $\psi=\pi$; demnach zugleich

$$1=\pm\frac{1-a}{\sqrt{1-2a+a^2}}\ \text{und}\ -1=\pm\frac{-1-a}{\sqrt{1+2a+a^2}},$$

woraus sofort hervorgeht, dass man nur das obere Zeichen beibehalten dürfe, indem

$$\sqrt{1-2a+a^2}=1-a,\ \sqrt{1+2a+a^2}=1+a.$$

Also ist immer

$$\cos\psi=\frac{\cos\varphi-a}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}},$$

und es ist $\psi<\frac{\pi}{2}$ so lange $\cos\varphi>a$, dagegen $\psi>\frac{\pi}{2}$ wenn $\cos\varphi<a$.

Aus (e) folgt überdiess:

$$\frac{(\cos\varphi-a)(1-a\cos\varphi)}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\cos\psi=\frac{\cos\varphi-a}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}},$$

$$\frac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=1,\ \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}{1-a\cos\varphi}.$$

$$1-a^2\sin^2\psi=\frac{1-2a\cos\varphi+a^2-a^2\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\frac{1-2a\cos\varphi+a^2\cos^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\frac{(1-a\cos\varphi)^2}{1-2a\cos\varphi+a^2},$$

und da $1-a\cos\varphi$ immer positiv:

$$\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}=\frac{1-a\cos\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}.$$

Mithin

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}=\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\right)^{2n}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\partial\psi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}\partial\psi,$$

so dass endlich

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}=a^n\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}=2a^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},\ a^2<1. \quad \text{(f)}$$

Für das letzte Integral besteht die Formel (§. 154, II):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}=\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{1+a^2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n-2}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}-\frac{2n-3}{(2n-1)a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n-4}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},$$

wodurch das Integral auf elliptische zurückgeführt ist.

IV. Sollten etwa in der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}=\frac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

die Koeffizienten bestimmt werden, so wäre nach §. 144, III (g):

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}=\frac{4a^n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},\ a^2<1,$$

wobei x von 0 bis π geht. Diese Formel gilt auch für $n=0$, wo

$$A_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}.$$

Es kommt diese Entwicklung in den Anwendungen häufig vor.

H.

Der Lehrsatz von den homogenen Funktionen.

Eine Funktion der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ heisst homogen des Grades n, wenn, indem man für $x, y, z, \ldots$ setzt $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots$ der Faktor α^n in allen Gliedern erscheint und ausser demselben kein α mehr vorkommt. So ist $5x^2y^3+7x^3y^2+9x^5$ eine homogene Funktion von x und y vom Grade 5.

Sey also $f(x,y,z,\ldots)$ eine homogene Funktion vom Grade n, so ist hiernach

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots) = \alpha^n f(x, y, z, \ldots),$$

woraus, wenn man $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots$ durch $x', y', z', \ldots, f(\alpha x, \alpha y, \ldots)$ durch f' bezeichnet:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial \alpha} + \ldots = n\alpha^{n-1} f(x, y, z, \ldots).$$

Aber $\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = x$, $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = y, \ldots$, so dass, wenn man $\alpha = 1$ setzt, wo f' in f übergeht, man hat:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = n f(x, y, z, \ldots). \quad \text{(a)}$$

Aus der Gleichung (a) folgt, dass $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots$ abermals eine homogene Funktion von $x, y, z, \ldots$ des Grades n ist, so dass derselbe Satz nochmals auf sie Anwendung findet. Heisst also die erste Seite von (a) F, so ist

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} + \ldots = nF,$$

d. h.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots = n \cdot n f(x, y, z, \ldots),$$

d. h. wenn man (a) beachtet:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots$$
$$= n(n-1) f(x, y, z \ldots),$$

was man auch durch

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^2 f = n(n-1) f x, y, z, \ldots)$$

darstelllen kann.

Es ist hieraus leicht zu schliessen, dass

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^m f(x, y, z, \ldots) = n(n-1) \ldots (n-m+1) f(x, y, z, \ldots). \quad \text{(b)}$$

Durch Differenzirung der Gleichung (a) nach $x, y, z, \ldots$ erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \ldots &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}, \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \ldots &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

u. s. w.

J.

Die Keplerschen Gesetze.

Wir wollen die drei Keplerschen Gesetze als richtig annehmen:

1) die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht;
2) die Flächenräume, welche der Fahrstrahl (von Sonne auf Planet) beschreibt, sind der Zeit proportional;

3) die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Würfel der grossen Axen.

Daraus wollen wir nun einige Folgerungen ziehen.

I. Ist a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellipse, $e=\sqrt{a^2-b^2}$, so ist, wenn man den Brennpunkt als Anfangspunkt wählt (vergl. §. 46, III):

$$r=\frac{b^2}{a+e\cos\omega},\quad \int_0^\omega \frac{\partial\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2}=\beta t,\ \beta \text{ konstant,} \qquad (a)$$

wegen des zweiten Gesetzes. Ferner ist, wenn p das Gewicht des (als Punkt betrachteten) Planeten, die Seitenkraft der nach dem Fahrstrahl zerlegten bewegenden Kraft:

$$\frac{p}{g}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{y}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right),\quad x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega;$$

senkrecht darauf aber $\frac{p}{g}\left(\frac{y}{r}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{x}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial t}\right)$. Da nun

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\cos\omega-2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial t}\sin\omega-r\cos\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-r\sin\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\sin\omega+2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial t}\cos\omega-r\sin\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+r\cos\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2},$$

so sind die Seitenkräfte:

$$\text{nach dem Fahrstrahl}=\frac{p}{g}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-r\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$\text{senkrecht darauf}=\frac{p}{g}\left(-2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial t}-r\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right),$$

Wegen (a) ist aber (§. 85, I)

$$\frac{1}{(a+e\cos\omega)^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}=\beta,\quad \frac{\partial\omega}{\partial t}=\beta(a+e\cos\omega)^2=\beta\frac{b^4}{r^2},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=-\frac{2\beta b^4}{r^3}\frac{\partial r}{\partial t},$$

$$r\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial t}=0.$$

Da hiernach die Seitenkraft senkrecht auf den Fahrstrahl = Null, so ist also die gesammte **bewegende Kraft nach dem Fahrstrahl gerichtet.**

II.
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\beta b^4}{r^2};\quad \frac{\partial r}{\partial t}=\frac{b^2 e\sin\omega}{(a+e\cos\omega)^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}=\beta b^2 e\sin\omega;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=\beta b^2 e\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\beta^2 b^6 e\cos\omega}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-r\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2=\frac{\beta^2 b^6 e\cos\omega}{r^2}-\frac{\beta^2 b^8}{r^3}=\frac{\beta^2 b^6}{r^3}(r e\cos\omega-b^2)$$

$$=\beta^2(a+e\cos\omega)^3\left(\frac{b^2 e\cos\omega}{a+e\cos\omega}-b^2\right)=-\beta^2 a b^2(a+e\cos\omega)^2=-\frac{\beta^2 a b^6}{r^2}.$$

Da also die Seitenkraft nach dem Fahrstrahl, d. h. (nach I) die ganze Kraft, negativ ist, so ist sie **gegen die Sonne gerichtet,** und überdiess **dem Quadrate des Fahrstrahls r umgekehrt proportional.**

III. Ist τ die halbe Umlaufszeit, so ist nach dem zweiten Gesetze:

$$\frac{b^4}{2}\int_0^\pi \frac{\partial\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2}:\frac{b^4}{2}\int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2}=\tau:t,$$

d. h. mit Beachtung von (a):

$$\frac{ab\pi}{2}:\beta t\frac{b^4}{2}=\tau:t,\ \beta=\frac{ab\pi}{b^4\tau}=\frac{a\pi}{b^3\tau}.$$

Also ist (II) die Kraft $=-\frac{a^2b^6\pi^2}{b^6\tau^2r^2}\frac{p}{g}=-\frac{a^3\pi^2}{\tau^2r^2}\frac{p}{g}$. Wegen des dritten Gesetzes ist $\frac{a^3}{\tau^2}$ für alle Planeten dieselbe Grösse. Demnach ist in der Einheit der Entfernung (d. h. für $r=1$) die wirksame Kraft dieselbe. **Die Sonne wirkt also auf alle Planeten gleich stark** (in derselben Entfernung und bei dem selben Gewichte des Planeten; die Kraft ist übrigens proportional dem Gewichte, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung).

K.

Die Gleichung $$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}]+[n(n+1)-\frac{\lambda^2}{1-x^2}]y=0 \qquad (a)$$

sey zur Integration vorgelegt, wenn n positiv.

I. Setzt man $y=(1-x^2)^m z$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=(1-x^2)^{m-1}[-2mxz+(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}],$$

so ergibt sich aus (a):

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^m[-2mxz+(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}]]+[n(n+1)-\frac{\lambda^2}{1-x^2}]y=0,$$

d. h.

$$(1-x^2)^{m+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x(1-x^2)^m(2m+1)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+[-2m(1-x^2)+4m^2x^2+n(n+1)(1-x^2)-\lambda^2](1-x^2)^{m-1}z=0.$$

Bestimmt man also m aus der Gleichung $\lambda^2=4m^2$, $m=\pm\frac{1}{2}\lambda$, so ist diese Differentialgleichung durch $(1-x^2)^m$ theilbar und gibt:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(2m+1)x\frac{\partial z}{\partial x}+[n(n+1)-2m(2m+1)]z=0.$$

Für $m=\frac{1}{2}\lambda$ ist

$2m+1=\lambda+1,\ n(n+1)-2m(2m+1)=n(n+1)-\lambda(\lambda+1)=(n-\lambda)(n+\lambda+1);$

für $m=-\frac{1}{2}\lambda$:

$2m+1=-\lambda+1,\ n(n+1)-2m(2m+1)=n(n+1)+\lambda(\lambda-1)=(n+\lambda)(n-\lambda+1).$

Demnach hat man die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\lambda+1)x\frac{\partial z}{\partial x}+(n-\lambda)(n+\lambda+1)z=0,\\ (1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(-\lambda+1)x\frac{\partial z}{\partial x}+(n+\lambda)(n-\lambda+1)z=0,\end{aligned}\right\}\quad (b)$$

von denen jedoch die zweite aus der ersten folgt, wenn man $-\lambda$ für $+\lambda$ setzt, wie diess aus (a) zu erwarten war. Wir werden also bloss die erste untersuchen.

II. Die (b) gehört zu (f) in §. 114, II. Dort ist

$a_2=1,\ b_2=0,\ c_2=-1,\ a_1=0,\ b_1=-2(\lambda+1),\ a_0=(n-\lambda)(n+\lambda+1);$

bestimmt man also μ aus

$$-\mu(\mu-1)-2\mu(\lambda+1)+(n-\lambda)(n+\lambda+1)=0,$$

woraus $\mu=n-\lambda$ und $-(n+\lambda+1)$ folgen, so ergibt sich je ein Werth und zwar

1) für $\mu=n-\lambda$:

$$\mu b_1+2a_0=-2(\lambda+1)(n-\lambda)+2(n-\lambda)(n+\lambda+1)=2n(n-\lambda),$$

$$l(R)=\frac{1}{\mu}\int\frac{2n(n-\lambda)u\,\partial u}{1-u^2}=-n\,l(1-u^2),\quad R=(1-u^2)^{-n};$$

$(1-u^2)^{-n}(u+x)^{\mu-1}$ ist Null für $u=\pm\infty$, so dass $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u+x)^{n-\lambda}\partial u}{(1-u^2)^{n+1}}$ als Integral sich ergäbe, was aber zu verwerfen ist, indem $u^2=1$ innerhalb der Integrationsgränzen liegt.

2) für $\mu=-(n+\lambda+1)$:

$$\mu b_1+2a_0=2(\lambda+1)(n+\lambda+1)+2(n-\lambda)(n+\lambda+1)=2(n+1)(n+\lambda+1);$$

$$l(R)=\frac{1}{\mu}\int\frac{2(n+1)(n+\lambda+1)u\,\partial u}{1-u^2}=(n+1)\,l(1-u^2),\quad R=(1-u^2)^{n+1};$$

$$\alpha=-1,\ \beta=+1;\quad z=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^n\partial u}{(u+x)^{n+\lambda+1}}=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{n+\lambda+1}},$$

welches Integral, wenn $n+\lambda+1>0$, nur für $x^2>1$ zulässig ist.

Der zweiten (b) genügt eben so: $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{n-\lambda+1}}$ mit der Bedingung, dass bei $n-\lambda+1>0$ auch $x^2>1$ sey.

III. Die vorhin als unzulässig erkannte Form weist uns darauf hin (§. 121, 2) zu setzen:

$$z=A_0x^{n-\lambda}+A_1x^{n-\lambda-1}+A_2x^{n-\lambda-2}+\ldots\ldots$$

Führt man diess in (b) ein, so ergibt sich in der bekannten Weise:

$$A_1=A_3=\ldots.=A_{2r+1}=\ldots.=0;$$

$$A_{2r+2}=(-1)^{r+1}\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(n-\lambda-2r-1)}{2.4\ldots(2r+2)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r-1)}A_0.$$

Ist also $n-\lambda$ eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe ab, d. h. ist endlich; im andern Falle müsste $x^2>1$ seyn, damit die Reihe konvergent sey (§. 60, IV).

Für die zweite Gleichung (b) würde sich eben so ergeben:

$$z=B_0x^{n+\lambda}+B_2x^{n+\lambda-2}+B_4x^{n+\lambda-4}+\ldots.,$$

$$B_{2r+2}=(-1)^{r+1}\frac{(n+\lambda)(n+\lambda-1)\ldots(n+\lambda-2r-1)}{2.4\ldots.(2r+2)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r-1)}B_0,$$

welche Reihe endlich ist, wenn $n+\lambda$ eine positive ganze Zahl; im andern Falle müsste wieder $x^2>1$ seyn.

IV. Da (§. 54):

$$\frac{1}{(x+\cos\varphi)^{n+\lambda+1}}=\frac{1}{x^{n+\lambda+1}}-\frac{n+\lambda+1}{1}\frac{\cos\varphi}{x^{n+\lambda+2}}+\frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}{1.2}\frac{\cos^2\varphi}{x^{n+\lambda+3}}-\ldots\ldots;$$

ferner (§. 42, VII; §. 34)

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\cos^{2m+1}\varphi\,\partial\varphi=0,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\cos^{2m}\varphi\,\partial\varphi=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots1}{(2n+3)(2n+5)\ldots.(2n+2m+1)}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\,\partial\varphi,$$

so ist

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{n+\lambda+1}}=\frac{1}{x^{n+\lambda+1}}\times$$

$$\left[1+\frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{x^2}+\frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\ldots(n+\lambda+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{x^4}+\ldots\right]\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\,\partial\varphi.$$

Daraus ergibt sich nun leicht, dass der Gleichung (a) durch folgende vier Formen genügt werden kann:

$$1)\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}x^{n-\lambda}\left[1+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_4}{x^4}+\ldots.\right],$$

$$A_{2r+2}=(-1)^{r+1}\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(n-\lambda-2r-1)}{2.4\ldots(2r+2)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r-1)};$$

$$2)\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x^{n+\lambda}\left[1+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_4}{x^4}+\ldots.\right],$$

$$B_{2r+2}=(-1)^{r+1}\frac{(n+\lambda)(n+\lambda-1)\ldots(n+\lambda-2r-1)}{2.4\ .(2r+2)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r-1)};$$

$$3)\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}x^{-(n+\lambda+1)}\left[1+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_4}{x^4}+\ldots.\right],$$

$$C_{2r+2}=\frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\ldots(n+\lambda+2r+2)}{2.4\ldots(2r+2)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+3)};$$

$$4)\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x^{-(n-\lambda+1)}\left[1+\frac{D_2}{x^2}+\frac{D_4}{x^4}+\ldots.\right],$$

$$D_{2r+2}=\frac{(n-\lambda+1)(n-\lambda+2)\ldots(n-\lambda+2r+2)}{2.4\ldots(2r+2)(2n+3)(2n+5)\ .(2n+2r+3)}. \qquad (c)$$

Von diesen Reihen sind endlich: die erste wenn $n-\lambda$ eine positive ganze Zahl, die zweite wenn $n+\lambda$ eine positive ganze Zahl, die dritte für positive n und λ niemals, die vierte für $n-\lambda$ eine negative ganze Zahl.

Ist übrigens n negativ (λ immer positiv), so wird die dritte für $n+\lambda$ eine negative ganze Zahl endlich seyn, die vierte wenn $n-\lambda$ eine solche Zahl, während die zweite fordert, dass $n+\lambda$ eine positive ganze Zahl. In allen andern Fällen muss $x^2>1$ seyn, wenn die Reihen sollen benützt werden können. (§. 60, IV).

V. **Sind n und λ positive ganze Zahlen**, so werden in (c) für $n-\lambda>0$ die erste und zweite, für $n-\lambda<0$ aber die zweite und vierte Formel angewendet werden und man wird endliche Reihen erhalten.

Für $n-\lambda=0$ gibt die (b) z gleich einer Konstanten, so dass dann der (a) durch $(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}$ und $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}$ genügt wird.

Man hat also, wenn n und λ positiv ganz:

$$y=M(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}x^{n-\lambda}[1+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_4}{x^4}+\ldots]+N(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x^{n+\lambda}[1+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_4}{x^4}+\ldots],\quad n-\lambda>0;$$

$$y=M(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x^{n+\lambda}[1+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_4}{x^4}+\ldots]+N(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x^{-(n-\lambda+1)}[1+\frac{D_2}{x^2}+\frac{D_4}{x^4}+\ldots],\quad n-\lambda<0;$$

$$y=M(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}+N(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda},\quad n-\lambda=0; \qquad (d)$$

wenn je M und N willkürliche Konstanten.

VI. Sind n und λ nicht ganze Zahlen, so verlangen die unendlichen Reihen in (c), dass $x^2>1$. Man kann aber auch das Integral von (b) nach steigenden Potenzen von x entwickeln. Setzt man nämlich

$$z=x^m+G_2x^{m+2}+G_4x^{m+4}+\ldots,$$

so ergibt sich $m(m-1)=0$, also $m=0$ oder $=1$.

Für $m=0$ findet man:

$$G_2=-\frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{1.2},\ldots,\quad G_{2r+2}=-\frac{(n-\lambda-2r)(n+\lambda+2r+1)}{(2r+1)(2r+2)}G_{2r};$$

für $m=1$ erhält man:

$$G_2=-\frac{(n-\lambda-1)(n+\lambda+2)}{2.3},\ldots,\quad G_{2r+2}=-\frac{(n-\lambda-2r-1)(n+\lambda+2r+2)}{(2r+2)(2r+3)}G_{2r}.$$

Daraus folgt, dass man der (a) auch durch folgende vier Formen genügt:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}[1+E_2x^2+\ldots+E_{2r}x^{2r}+\ldots],\quad E_2=-\frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{1.2},\ldots,$$

$$E_{2r+2}=-\frac{(n-\lambda-2r)(n+\lambda+2r+1)}{(2r+1)(2r+2)}E_{2r};$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}x[1+F_2x^2+\ldots+F_{2r}x^{2r}+\ldots],\quad F_2=-\frac{(n-\lambda-1)(n+\lambda+2)}{2.3},\ldots,$$

$$F_{2r+2}=-\frac{(n-\lambda-2r-1)(n+\lambda+2r+2)}{(2r+2)(2r+3)}F_{2r};$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}[1+G_2x^2+\ldots+G_{2r}x^{2r}+\ldots],\quad G_2=-\frac{(n+\lambda)(n-\lambda+1)}{1.2},\ldots,$$

$$G_{2r+2}=-\frac{(n+\lambda-2r)(n-\lambda+2r+1)}{(2r+1)(2r+2)}G_{2r};$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\lambda}x[1+H_2x^2+\ldots+H_{2r}x^{2r}+\ldots],\quad H_2=-\frac{(n+\lambda-1)(n-\lambda+2)}{2.3},\ldots,$$

$$H_{2r+2}=-\frac{(n+\lambda-2r-1)(n-\lambda+2r+2)}{(2r+2)(2r+3)}H_{2r}.$$

Von diesen Reihen ist die erste endlich, wenn $n-\lambda$ eine gerade positive (natürlich ganze) Zahl ist, oder wenn $n+\lambda$ ungerad negativ; die zweite wenn $n-\lambda$ ungerad positiv oder $n+\lambda$ gerad negativ; die dritte wenn $n+\lambda$ gerad positiv, oder

$n - \lambda$ ungerad negativ; die vierte wenn $n + \lambda$ ungerad positiv, oder $n - \lambda$ gerad negativ. — In diesen Fällen aber erhält man die in IV schon gegebenen Formen.

Sind die hier angeführten Reihen unendlich, so muss $x^2 < 1$ seyn.

VII. Für $\lambda = 0$ hat man

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right] + n(n-1)y = 0, \text{ d. h. } (1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} + n(n+1)y = 0. \quad (a')$$

Jetzt fallen in IV und VI je zwei Reihen zusammen. Bezeichnen wieder $A_2, \ldots$ die oben gegebenen Koeffizienten, in denen nur $\lambda = 0$ zu setzen ist, und M, N willkürliche Konstanten, so ergibt sich für ein positives ganzes n:

$$y = Mx^n\left[1 + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_4}{x^4} + \ldots\right] + \frac{N}{x^{n+1}}\left[1 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_4}{x^4} + \ldots\right]. \quad (d_1)$$

wenn in dem zweiten (mit N multiplizirten) Theile $x^2 > 1$;

$$y = Mx^n\left[1 + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_4}{x^4} + \ldots\right] + N\left[1 + E_2x^2 + E_4x^4 + \ldots\right], \quad (d_2)$$

wenn n eine ungerade Zahl und im zweiten Theile $x^2 < 1$ (für n gerade fällt der zweite Theil mit dem ersten zusammen);

$$y = Mx^n\left[1 + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_4}{x^4} + \ldots\right] + Nx\left[1 + F_2x^2 + F_4x^4 + \ldots\right], \quad (d_3)$$

wenn n eine gerade Zahl und im zweiten Theil $x^2 < 1$ (für n ungerade würden beide Theile zusammen fallen).

Man sieht, dass der erste Theil, der eine ganze Funktion von x ist, in allen drei Formeln gemeinschaftlich bleibt, während der zweite immer unter der Form einer unendlichen Reihe erscheint. *

VIII. Die hier vorkommenden Funktionen spielen eine besondere Rolle in vielen Anwendungen. (Vergl. Laplace: Mécanique céleste, Livre III, Chap. II; Lamé: Leçons sur les Fonctions inverses des Transcendantes et les Surfaces isothermes, Leçon XV, u. s. w.) Bezeichnet man

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}\left[x^{n-\lambda} + A_2x^{n-\lambda-2} + \ldots\right] \text{ durch } y_n,$$

so ist also

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{\partial y_n}{\partial x}\right] + \left[n(n+1) - \frac{\lambda^2}{1-x^2}\right]y_n = 0,$$

und eben so

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{\partial y_m}{\partial x}\right] + \left[m(m+1) - \frac{\lambda^2}{1-x^2}\right]y_m = 0.$$

Daraus folgt sofort:

$$\frac{1}{y_n}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{\partial y_n}{\partial x}\right] - \frac{1}{y_m}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{\partial y_m}{\partial x}\right] + n(n+1) - m(m+1 = 0$$

d. h.

---

* Muss also y eine ganze Funktion seyn, so hat man $N = 0$ zu setzen. (Siehe auch unter ⑩, III).

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(y_m\frac{\partial y_n}{\partial x}-y_n\frac{\partial y_m}{\partial x}\right)\right]=[m(m+1)-n(n+1)]\,y_n\,y_m\,,$$

$$(1-x^2)\left(y_m\frac{\partial y_n}{\partial x}-y_n\frac{\partial y_m}{\partial x}\right)=[m(m+1)-n(n+1)]\int y_n\,y_m\,\partial x+C.$$

Da nun für $x^2=1$ die Grösse $y_m\frac{\partial y_n}{\partial x}-y_n\frac{\partial y_m}{\partial x}$ nicht unendlich wird, * so zieht man hieraus

$$\int_{-1}^{+1} y_n\,y_m\,\partial x=0, \tag{e}$$

wo n und m verschieden seyn müssen.

X. Man findet durch unmittelbare Rechnung, dass $y_{n+1}=x\,y_n-k\,y_{n-1}$, wenn $k=\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}$, so dass also

$$y_{n+1}=x\,y_n-\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}\,y_{n-1}. \tag{f}$$

Hieraus

$$\int_{-1}^{+1} y_{n+1}^2\,\partial x=\int_{-1}^{+1} x\,y_n\,y_{n+1}\,\partial x-\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1} y_{n-1}\,y_{n+1}\,\partial x,$$
$$\int_{-1}^{+1} y_{n+1}\,y_{n-1}\,\partial x=\int_{-1}^{+1} x\,y_n\,y_{n-1}\,\partial x-\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1} y_{n-1}^2\,\partial x,$$

d. h. wegen (f):

$$\int_{-1}^{+1} y_{n+1}^2\,\partial x=\int_{-1}^{+1} x\,y_n\,y_{n+1}\,\partial x,\quad 0=\int_{-1}^{+1} x\,y_n\,y_{n-1}\,\partial x-\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1} y_{n-1}^2\,\partial x.$$

Die letzte Gleichung liefert, da (f) für alle n richtig ist, also auch wenn man $n+1$ für n setzt:

$$\int_{-1}^{+1} x\,y_n\,y_{n+1}\,\partial x=\frac{(n+1)^2-\lambda^2}{4(n+1)^2-1}\int_{-1}^{+1} y_n^2\,\partial x,$$

so dass

$$\int_{-1}^{+1} y_{n+1}^2\,\partial x=\frac{(n+1)^2-\lambda^2}{4(n+1)^2-1}\int_{-1}^{+1} y_n^2\,\partial x, \tag{g}$$

vermittelst welcher Formel sich $\int_{-1}^{+1} y_m^2\,\partial x$ berechnen lässt.

Da nie $n-\lambda$ negativ seyn darf, so erhält man aus (g):

$$\int_{-1}^{+1} y_{\lambda+1}^2\,\partial x=\frac{(\lambda+1)^2-\lambda^2}{4(\lambda+1)^2-1}\int_{-1}^{+1} y_\lambda^2\,\partial x,\quad \int_{-1}^{+1} y_{\lambda+2}^2\,\partial x=\frac{(\lambda+2)^2-\lambda^2}{4(\lambda+3)^2-1}\int_{-1}^{+1} y_{\lambda+1}^2\,\partial x,\ldots,$$
$$\int_{-1}^{+1} y_n^2\,\partial x=\frac{n^2-\lambda^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1} y^2_{n-1}\,\partial x,$$

also

---

* Die Grösse $y_r\frac{\partial y_s}{\partial x}$ hat jedenfalls den Faktor $(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}(1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda-1}=(1-x^2)^{\lambda-1}$, der für $x^2=1$ nur unendlich würde, wenn $\lambda=0$; allein für $\lambda=0$ ist in y_r der Faktor $1-x^2$ nicht mehr, da dann bloss $y_n=x^n+A_2\,x^{n-2}+A_4\,x^{n-4}+\ldots\ldots$ Demnach wird, selbst für $\lambda=0$ die genannte Grösse nicht unendlich. (Für $\lambda=0$ wäre jener Faktor eigentlich $\frac{1}{2}\lambda(1-x^2)^{\lambda-1}$, d. h. $=0$).

$$\int_{-1}^{+1} y_n^2 \partial x = \frac{[n^2 - \lambda^2][(n-1)^2 - \lambda^2] \dots [(\lambda+1)^2 - \lambda^2]}{[4n^2 - 1][4(n-1)^2 - 1] \dots [4(\lambda+1)^2 - 1]} \int_{-1}^{+1} y_\lambda^2 \partial x,$$

und

$$y_\lambda = (1-x^2)^{\frac{1}{2}\lambda}, \quad \int_{-1}^{+1} y_\lambda^2 \partial x = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\lambda \partial x = \int_0^\pi \sin^{2\lambda+1} \varphi \, \partial \varphi$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\lambda+1} \partial \varphi = 2 \frac{2\lambda(2\lambda-2)\dots 2}{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\dots 3},$$

so dass

$$\int_{-1}^{+1} y_n^2 \partial x = 2 \frac{[n^2-\lambda^2][(n-1)^2-\lambda^2] \dots [(\lambda+1)^2-\lambda^2]}{[4n^2-1][4(n-1)^2-1] \dots [4(\lambda+1)^2-1]} \, \frac{2.4 \dots 2\lambda}{3.5 \dots (2\lambda+1)}, \qquad (g)$$

wobei übrigens $n - \lambda > 0$ seyn muss, und für $n = \lambda$ der Werth $= 2 \frac{2.4 \dots 2\lambda}{3.5 \dots (2\lambda+1)}$ zu setzen ist.

L.

Die Fläche zu berechnen, welche von den Fahrstrahlen gebildet wird, die von einem festen Punkte aus auf alle Punkte einer gegebenen doppelt gekrümmten Kurve gezogen werden.

I. Sey der feste Punkt Koordinatenanfang; x, y, z die Koordinaten eines Kurvenpunkts. Alsdann sind $Y = \frac{y}{x} X$, $Z = \frac{z}{x} X$ die Gleichungen des auf ihn gezogenen Fahrstrahls, und wenn man zwischen diesen zwei Gleichungen und denen der Kurve die Grössen x, y, z eliminirt, so erhält man die Gleichung der fraglichen krummen Fläche.

Führt man in diese Gleichung die Polarkoordinaten (§. 80, II) r, φ, ψ ein, so wird in derselben r gar nicht vorkommen. Denn wäre sie $f(r, \varphi, \psi) = 0$, so würde zu bestimmten φ, ψ nur ein (oder eine beschränkte Anzahl von) r gehören; diess ist aber nicht der Fall, da zu bestimmtem φ und ψ unendlich viele r gehören werden. Diese Gleichung ist also bloss eine Gleichung zwischen φ und ψ.

II. Man kann sie finden, wenn man in den beiden Gleichungen der Kurve $x = r \cos\varphi \cos\psi$, $y = r \sin\varphi \cos\psi$, $z = r \sin\psi$ setzt, und r eliminirt. Es ist diess schon daraus klar, dass bei bestimmtem φ und ψ unter den unendlich vielen zugehörigen r der Fläche, eines das r der Kurve ist. Man kann jedoch auch unmittelbar die Richtigkeit nachweisen. Sey $F(X, Y, Z) = 0$ die Gleichung der Fläche, erhalten durch Elimination von x, y, z aus

$$Y = \frac{y}{x} X, \quad Z = \frac{z}{x} X, \quad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

von welchen Gleichungen die zwei letzten die der Kurve sind. Man setze nun

$$X = r \cos\varphi \cos\psi, \quad Y = r \sin\varphi \cos\psi, \quad Z = r \sin\psi;$$
$$x = \varrho \cos\alpha \cos\beta, \quad y = \varrho \sin\alpha \cos\beta, \quad z = \varrho \sin\beta;$$

so ist ϱ, α, β zu eliminiren zwischen

$$tg\,\varphi = tg\,\alpha, \quad \frac{tg\,\psi}{\cos\varphi} = \frac{tg\,\beta}{\cos\alpha}, \quad f(\varrho\cos\alpha\cos\beta, \ \varrho\sin\alpha\cos\beta, \ \varrho\sin\beta) = 0,$$
$$f_1(\varrho\cos\alpha\cos\beta, \ \varrho\sin\alpha\cos\beta, \ \varrho\sin\beta) = 0,$$

woraus zunächst hervorgeht, dass r nicht in der Endgleichung vorkommt.

Aus $tg\varphi = tg\alpha$ folgt entweder $\varphi = \alpha$ oder $\varphi = \alpha + \pi$, da φ und α zwischen 0 und 2π liegen. Für $\varphi = \alpha$ ist $cos\varphi = cos\alpha$, also $tg\psi = tg\beta$, $\psi = \beta$, da ψ und β zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen; für $\varphi = \alpha + \pi$ ist $cos\varphi = -cos\alpha$, also $tg\psi = -tg\beta$, $\psi = -\beta$. Demnach

$$\text{entweder } \varphi = \alpha,\ \psi = \beta, \text{ oder } \varphi = \alpha + \pi,\ \psi = -\beta.$$

Dadurch werden die zwei letzten der obigen Gleichungen:

$$f(\varrho\cos\varphi\cos\psi,\ \varrho\sin\varphi\cos\psi,\ \varrho\sin\psi) = 0,\quad f_1(\varrho\cos\varphi\cos\psi,\ \varrho\sin\varphi\cos\psi,\ \varrho\sin\psi) = 0,$$

oder

$$f(-\varrho\cos\varphi\cos\psi,\ -\varphi\sin\varphi\cos\psi,\ -\varrho\sin\psi) = 0,\quad f_1(-\varrho\cos\varphi\cos\psi,\ -\varrho\sin\varphi\cos\psi,\ -\varrho\sin\psi) = 0,$$

zwischen denen ϱ zu eliminiren ist. Da im zweiten System bloss $-\varrho$ an die Stelle von ϱ getreten ist, so geben beide Systeme dieselbe Endgleichung und auch dieselbe, wie wenn man

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi$$

gesetzt, und r eliminirt hätte.

III. Die Gleichung (b) in §. 80, II wird jetzt nicht angewendet werden können, da die Flächengleichung r nicht enthält. Wir werden desshalb die allgemeine Formel

$$\int\int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y$$

so umzuformen haben, dass wir etwa r und φ als neue unabhängig Veränderliche ansehen, wobei wir an §. 168, II erinnern. Es ergibt sich nach §. 79:

$$\int\int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y$$

$$= \int\int\sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right]}\,\partial\varphi\,\partial r$$

(vergl. §. 69, I). Aber

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\cos\psi - r\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\psi - r\cos\psi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin\psi + r\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\psi - r^2\sin\psi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial r} = r\cos\psi\left(\cos\psi - r\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + r\sin\varphi\sin\psi\cos\psi + r^2\sin\varphi\cos^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos\varphi\cos\psi\sin\psi - r\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + r^2\cos\varphi\cos^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Daraus

$$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y$$

$$\iint r\sqrt{\cos^2\psi+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2}\,\partial r\,\partial\varphi,$$

welches nun die allgemeine Formel für diese Fälle ist.

IV. In der besondern Aufgabe die wir im Auge haben ist ψ unabhängig von r, also $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$, und die allgemeine Formel wird zu

$$\int\sqrt{\cos^2\psi+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi\int r\,\partial r.$$

Will man nun das Flächenstück haben das der Fahrstrahl beschrieb, indem er sich mit seinem Endpunkte auf der doppelt gekrümmten Kurve bewegte, so sind die Gränzen von $r:0$ und ϱ, wo ϱ der Werth des Fahrstrahls der Kurve für dasselbe φ und ψ ist, die der Fläche angehören. Sind also φ_0, φ_1 die äussersten Werthe von φ, so ist das Flächenstück:

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\varrho^2\sqrt{\cos^2\psi+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi.$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Formel voraussetzt (§. 80), dass wenn das zu berechnende Flächenstück auf die Ebene der xy (in der φ gezählt wird) projizirt wird, kein Stück der Projektion auf ein anderes fallen darf, und wenn man die Projektion durchläuft, φ fortwährend wächst.

Was φ und ψ betrifft, so bilde man aus den zwei Gleichungen der Kurve in Polarkoordinaten (II) die Gleichungen

$$F(\varrho,\varphi)=0,\quad F_1(\psi,\varphi)=0,$$

so gibt die erste ϱ, die zweite ψ.

M.

Das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\,l\left(\frac{1+m\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-m\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right)\partial\varphi,\ e^2<1,\ m\begin{matrix}>0.\\<1.\end{matrix}$

Bezeichnet man dasselbe durch Φ, so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial m}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2(1-e^2\sin^2\varphi)}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2+m^2e^2\sin^2\varphi}.$$

Setzen wir $m=\sin\alpha$, so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial m}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^{2n-2}\alpha}{e^{2n}\sin^{2n}\alpha}\,\frac{e^{2n}tg^{2n}\alpha\sin^{2n}\varphi}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Aber

$$\frac{e^{2n}tg^{2n}\alpha\sin^{2n}\varphi}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi}=(e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi)^{n-1}-(e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi)^{n-2}+(e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi)^{n-3}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\pm1\mp\frac{1}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi},$$

wie man aus der Formel

$$\frac{z^n}{1+z}=z^{n-1}-z^{n-2}+z^{n-3}-\ldots\ldots\pm 1\mp\frac{1}{1+z}$$

sofort findet. Daraus folgt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial m}=\frac{2\cos^{2n-2}\alpha}{e^{2n}\sin^{2n}\alpha}\Big(e^{2n-2}tg^{2n-2}\alpha\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\frac{\pi}{2}$$

$$-e^{2n-4}tg^{2n-4}\alpha\frac{(2n-5)(2n-7)\ldots 1}{(2n-4)(2n-6)\ldots 2}\frac{\pi}{2}+\ldots\ldots\ldots\pm\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$\mp\frac{2\cos^{2n-2}\alpha}{e^{2n}\sin^{2n}\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi}\ (\S.\ 151,\ II)$$

$$=\frac{\pi}{e^{2n}\sin^2\alpha}\Big(\frac{1.3..(2n-3)}{2.4....(2n-2)}e^{2n-2}-\frac{1.3..(2n-5)}{2.4..(2n-4)}\frac{e^{2n-4}}{tg^2\alpha}$$

$$+\frac{1.3..(2n-7)}{2.4..(2n-6)}\frac{e^{2n-6}}{tg^4\alpha}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{tg^{2n-2}\alpha}\Big)$$

$$\mp\frac{\pi\cos\alpha}{e^{2n}\sin^2\alpha\, tg^{2n-2}\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}},\quad e_1^2=1-e^2.$$

Da $m=\sin\alpha$, so ist $\frac{\partial\Phi}{\partial m}=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{1}{\cos\alpha}$, so dass

$$\Phi=\frac{\pi}{e^{2n}}\Big(\frac{1.3..(2n-3)}{2.4..(2n-2)}e^{2n-2}\int\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\partial\alpha-\frac{1.3..(2n-5)}{2.4..(2n-4)}e^{2n-4}\int\frac{\cos^3\alpha}{\sin^4\alpha}\partial\alpha$$

$$+\ldots\ldots\pm\int\frac{\cos^{2n-1}\alpha\,\partial\alpha}{\sin^{2n}\alpha}\Big)\mp\frac{\pi}{e^{2n}}\int\frac{\partial\alpha}{tg^{2n}\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}}\Big)+C.$$

Die Konstante bestimmt sich durch die Bemerkung dass Φ Null ist für $m=0$, d. h. $\alpha=0$. Die hier vorkommenden Integrale können alle bestimmt werden.

So ist

für $n=0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial m}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{\cos^2\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+e^2\,tg^2\alpha}}$$

$$=\frac{\pi}{\cos\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}},$$

$$\Phi=\pi\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}l\Big(\frac{1+\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\Big)\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\pi F(\alpha,e_1).$$

Für $n=1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}l\Big(\frac{1+\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\Big)\partial\varphi=\frac{\pi}{e^2}\int\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\partial\alpha$$

$$-\frac{\pi}{e^2}\int\frac{\partial\alpha}{tg^2\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}}+C$$

$$= \frac{\pi}{e^2}\left(-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha - (1-e_1^2)\int\frac{tg^2\alpha}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}}\partial\alpha + \frac{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha\, tg\,\alpha}\right) + C$$

$$= \frac{\pi}{e^2}\left(-\frac{1}{\sin\alpha} + \int\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}\,\partial\alpha - tg\,\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha} + \frac{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha\, tg\,\alpha}\right) + C$$

$$= \frac{\pi}{e^2}\left(\int\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}\,\partial\alpha - \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{tg\,\alpha}\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}\right) + C$$

$$= \frac{\pi}{e^2}\left(\int\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}\,\partial\alpha + \frac{\cos\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}-1}{\sin\alpha}\right) + C.$$

Für $\alpha = 0$ ist $\frac{\cos\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}-1}{\sin\alpha} = 0$ (§. 22, I) also endlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\, l\left(\frac{1+\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right)\partial\varphi$$

$$\frac{\pi}{e^2}\left(E(\alpha, e_1) + \frac{\cos\alpha\sqrt{1-e_1^2\sin^2\alpha}-1}{\sin\alpha}\right).$$

XI.

Elemente der Theorie der Determinanten mit hieher gehörenden Anwendungen.

I. Hat man das System von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 + \ldots a_{1,n}\, x_n = c_1, \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + a_{2,3}\, x_3 + \ldots a_{2,n}\, x_n = c_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + a_{n,3}\, x_3 + \ldots a_{n,n}\, x_n = c_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

wo also $a_{r,s}$ den s^{ten} Koeffizienten in der r^{ten} Gleichung bezeichnet, und löst dieses System auf, so haben die Werthe von $x_1, \ldots, x_n$ alle denselben Nenner, welcher die **Determinante** des Systems der Koeffizienten in (1) genannt wird. Dieselbe wird nach folgender Regel gebildet: „Man bilde aus den Elementen 1, 2,.., n alle möglichen Versetzungen ohne Wiederholungen, und betrachte jede Gruppe als erste Zeiger an die a, denen man dann als zweite Zeiger der Ordnung nach 1, 2, ..., n zuschreibt. Diese Koefffizienten geben eines der 1.2.3...n Produkte, aus denen die Determinante besteht, und es hat dasselbe das Vorzeichen + oder —, je nachdem in der Gruppe eine gerade oder ungerade Anzahl höherer Elemente vor niederern steht."

So für 4 Gleichungen hätte man die Versetzungen von 1, 2, 3, 4 zu bilden, welche sind: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 3421.

Nach der angegebenen Regel haben das + Zeichen die 1., 4., 5., 8., 9., 12., 13., 16., 17., 20., 21., 24.* Gruppe. Desshalb ist die Determinante:

---

* So z. B. die Gruppe 2431, weil 2 vor 1, 4 vor 3, 4 vor 1, 3 vor 1 steht. — Der **Beweis**, dass die so gebildete Determinante wirklich der Nenner der aus (1) gezogenen

$$a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} - a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{3,4} - a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3}\,a_{4,4} + a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{4,3}\,a_{2,4} + a_{1,1}\,a_{4,2}\,a_{2,3}\,a_{3,4} -$$
$$a_{1,1}\,a_{4,2}\,a_{3,3}\,a_{2,4} - a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} + a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{4,3}\,a_{3,4} + a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3}\,a_{4,4} - a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4} -$$
$$a_{2,1}\,a_{4,2}\,a_{1,3}\,a_{3,1} + a_{2,1}\,a_{4,2}\,a_{3,3}\,a_{1,4} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{4,4} - a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{4,3}\,a_{2,4} - a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}\,a_{4,4} +$$
$$a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4} + a_{3,1}\,a_{4,2}\,a_{1,3}\,a_{2,4} - a_{3,1}\,a_{4,2}\,a_{2,3}\,a_{1,4} - a_{4,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,4} + a_{4,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}\,a_{2,4} +$$
$$a_{4,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}\,a_{3,4} - a_{4,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{1,4} - a_{4,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3}\,a_{2,4} + a_{4,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3}\,a_{1,4}.$$

Man pflegt allgemein die Determinante des Systems (1) durch

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \dots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

zu bezeichnen, welchen Ausdruck wir auch häufig durch A_n bezeichnen werden, um in Druck und Schrift uns kürzer fassen zu können. Zuweilen bezeichnet man A_n auch durch $\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n})$. Es kann hier nicht unsere Aufgabe seyn, die ganze Theorie dieser Gattung von Grössen darzustellen, vielmehr wollen wir nur einige Anwendungen davon auf den Gegenstand dieses Werkes machen und zu dem Ende nur diejenigen Sätze aus der Theorie nachweisen, die uns gerade nothwendig sind.

II. Zwei Gruppen der Determinante, die nur dadurch verschieden sind, dass zwei erste Zeiger ihre Plätze getauscht haben, sonst Alles gleich ist, haben verschiedenes Zeichen. So haben oben die Gruppen $a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3}\, a_{4,4}$ und $a_{2,1}\, a_{4,2}, a_{1,3}\, a_{3,4}$ verschiedenes Zeichen (+ und —).

Um diese Behauptung zu beweisen wollen wir zwei Gruppen:

$$a_{m,1}\; a_{m',2} \dots,\; a_{r,\varrho} \dots a_{s,\varrho'} \dots a_{v,n}$$
$$a_{m,1}\; a_{m',2} \dots,\; a_{s,\varrho} \dots a_{r,\varrho'} \dots a_{v,n}$$

betrachten, in denen ausser der Vertauschung von r gegen s Alles gleich ist. Da es hier auf die zweiten Zeiger nicht ankommt, so wollen wir diese Gruppen so darstellen:

$$(a) = \dots I \dots r \dots II \dots s \dots III \dots;\; (a') = \dots I' \dots s \dots II' \dots r \dots III' \dots,$$

wo wir durch I, II, III und eben so durch I', II', III' die zwischen liegenden Elemente bezeichnen. I und I' haben ganz dieselben Elemente u. s. w.; zugleich sey etwa $s > r$. Wir wollen ferner sagen, ein höheres Element vor einem niederern gebe eine Vorsetzung, und es geben nun in (a) und (a'), wenn man r und s sich wegdenkt, alle Elemente α Vorsetzungen; ferner gebe in (a) I gegen $r:\beta$, gegen $s:\beta'$, II gegen $s:\gamma$, r gegen $II:\delta$, r gegen $III:\delta'$, s gegen $III:\varepsilon$ Vorsetzungen; alsdann gibt in (a') auch I' gegen $r:\beta$, I' gegen $s:\beta'$, s gegen $III':\varepsilon$, r gegen $III':\delta'$ Vorsetzungen. Sind weiter in II, also auch II', im Ganzen e Elemente, so sind davon δ kleiner als r und γ grösser als s, so dass $e-\delta$ grösser als r, $e-\gamma$ kleiner als s sind. In (a') wird somit s gegen II geben $e-\gamma$, II' gegen r aber $e-\delta$ Vorsetzungen; endlich gibt s gegen r in (a') noch eine Vorsetzung. Daraus nun folgt, dass die Anzahl aller Vorsetzungen ist

---

Werthe der Unbekannten ist, findet sich unter V. Für jetzt genügt es uns die Regel zu kennen, nach der eine Determinante zu bilden ist.

in (a): $\alpha + \beta + \beta' + \gamma + \delta + \delta' + \varepsilon = k$,
in (a'): $\alpha + \beta + \beta' + \delta' + \varepsilon + e - \gamma + e - \delta + 1 = k + 2(e - \gamma - \delta) + 1$,

so dass die Differenz beider ungerade ist. Ist also in der einen Gruppe die Anzahl der Vorsetzungen gerade, so ist sie in der andern ungerade, und umgekehrt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Daraus folgt dann auch, dass es in A_n eben so viele Gruppen mit dem + Zeichen, als mit dem entgegengesetzten geben muss.

III. Da man die Versetzungen der Elemente 1, 2, ..., n aus der Gruppe 12..n nach einander dadurch bilden kann, dass man allemal nur zwei Elemente gegenseitig tauscht, dadurch aber jedesmal das Zeichen, der Regel gemäss, geändert wird, so kann man auch sagen, es habe eine Gruppe das + oder — Zeichen, je nachdem die Anordnung der ersten Zeiger aus 12..n durch eine gerade oder ungerade Anzahl gegenseitiger Vertauschungen je zweier Elemente hervorgebracht werden kann.*

Daraus aber lässt sich weiter beweisen, dass dieselbe Determinante herauskommen muss, wenn man die zweiten Zeiger permutirt und die ersten in der Ordnung 1, 2, .., n zusetzt.

Denn gesetzt auf die in Nr. I beschriebene Weise entstehe A_n, auf die angegebene aber A'_n. In jeder Gruppe von A_n tausche man in jedem Element bloss die zwei Zeiger, so wird je eine Gruppe entstehen, die auch in A'_n vorkommt, und dort dasselbe Zeichen hat, wie die betreffende Gruppe in A_n (gleich sind sie freilich nicht). Durch eine so durchgeführte Vertauschung verwandelt sich also A_n in A'_n. Denken wir uns nun eine bestimmte Gruppe von A_n, die wir mit k bezeichnen wollen, so ist dieselbe nach den zweiten Zeigern geordnet, während die ersten in einer Zusammensetzung sind, die durch m Vertauschungen je zweier Zeiger aus 123..n entstanden seyn soll. Vertauschen wir nun die Elemente in k, die durch ihre ersten Zeiger charakterisirt seyn sollen, in derselben Ordnung, nur rückwärts gehend, wie die Anordnung der ersten Zeiger aus 12..n entstanden ist, so werden diese Elemente schliesslich nach den ersten Zeigern geordnet erscheinen, während die zweiten in einer Anordnung sind, die aus 12..n durch m Vertauschungen entstanden ist.**

* Jede beliebige Complexion der Elemente 1, 2, ..., n muss nothwendig durch auf einander folgende Vertauschungen von nur zwei Elementen hervorgebracht werden können. So aus 12345 die Complexion 41325. Um 4 an die erste Stelle zu bringen, schreibe man etwa nach einander: 12435, 14235, 41235; um jetzt 3 an die dritte Stelle zu bringen: 41325 und man ist fertig. Es gehörten also 4 Vertauschungen zu; desshalb haben 12345 und 41325 dasselbe Vorzeichen.

** So kann 52413 aus 12345 entstehen nach dem Schema: 12345, 12435, 52431, 52413. Also aus der Gruppe $a_{5,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4}\,a_{3,5}$, die in A_n vorkommt, bilde man nach einander: $a_{5,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{3,5}\,a_{1,4}$, $a_{1,4}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{3,5}\,a_{5,1}$, $a_{1,4}\,a_{2,2}\,a_{3,5}\,a_{4,3}\,a_{5,1}$, so enthält diese genau dieselben Elemente, wie erstere; sie kommt aber in A'_n vor, da sie nach den ersten Elementen geordnet ist. In A_n hat die Gruppe $a_{5,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4}\,a_{3,5}$ das — Zeichen, da man drei Vertauschungen vornehmen musste, um von 12345 auf 52413 zu gelangen; in A'_n hat die Gruppe $a_{1,4}\,a_{2,2}\,a_{3,5}\,a_{4,3}\,a_{5,1}$ ebenfalls das — Zeichen, da man, um von 12345 auf 42531 zu gelangen, ja ebenfalls drei Vertauschungen vornahm: 12354, 42351, 42531.

Diese Gruppe gehört aber zu A'_n, da sie ja nach den ersten Zeigern geordnet ist, und in A'_n hat sie dasselbe Zeichen wie k, indem dasselbe sich nur nach m richtet. A_n und A'_n haben also dieselben Gruppen (wenn auch anders geordnet) mit denselben Zeichen, und sind folglich einander gleich.

Wie schon bemerkt, entsteht A'_n aus A_n auch, indem man $a_{r,s}$ gegen $a_{s,r}$ umtauscht, wo r und s gleich 1, 2, ..., n seyn können, so dass also

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1}, & \ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

IV. In jeder Gruppe von A_n kommt der erste Zeiger r (= 1, 2, ..., n) nur einmal, eben so der zweite Zeiger s (= 1, ..., n) auch nur einmal vor. Betrachtet man also diejenigen Gruppen, die das Element $a_{r,s}$ enthalten, so kommt in ihnen weder $a_{r,\varrho}$, noch $a_{\varrho,s}$ vor, wo $\varrho = 1, 2, \ldots, n$. Daraus folgt leicht, dass alle diese Gruppen zusammen $\doteq a_{r,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ sind. Lässt man hier $r = 1, 2, \ldots, n$ seyn, so erhält man alle Grupppen in A_n, da jede den zweiten Zeiger s einmal enthalten muss. Daraus folgt:

$$A_n = a_{1,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}} + a_{2,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}} + \ldots + a_{n,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Wegen (3) ergibt sich dann sofort:

$$A_n = a_{s,1}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,1}} + a_{s,2}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,2}} + \ldots + a_{s,n}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,n}}. \qquad (4')$$

Ferner ist, wenn s und r verschieden sind:

$$a_{r,1}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,1}} + a_{r,2}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,n}} = 0. \qquad (5)$$

Denn es stellt diese Grösse den Werth von A_n vor, den man erhält, wenn man überall an die Stelle des ersten Zeigers s den Zeiger r setzt. * Da aber je zwei Gruppen, in denen nur r und s vertauscht sind, verschiedenes Zeichen haben (Nr. II) und jetzt gleich werden, so ist der daraus folgende Werth von A_n Null. Aus (3) folgt dann:

---

* Die Grösse $a_{s,m}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,m}}$ stellt die Gesammtheit aller Gruppen vor, in denen überhaupt das Element $a_{s,m}$ vorkommt; in $\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,m}}$ steht dieses Element nicht. Daraus folgt, dass in $a_{r,m}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,m}}$ das Element $a_{s,m}$ nicht mehr vorkommt, vielmehr $a_{r,m}$ an seine Stelle getreten ist. Demnach ist die Grösse erster Seite in (5) aus A_n dadurch gebildet, dass man überall an die Stelle des ersten Elementes s das Element r eintrug. Die sämmtlichen Versetzungen der ersten Elemente kann man aber in zwei Gruppen abtheilen so, dass jeder Versetzung der einen Gruppe eine der zweiten zugehört, die bloss dadurch von ihr verschieden ist, dass r und s getauscht wurden. Solchen entsprechen (II) verschiedene Zeichen. Da man aber jetzt s durch r ersetzt, so werden sie sonst gleich, haben aber verschiedenes Zeichen, so dass ihre Summe Null ist.

$$a_{1,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}}+a_{2,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}}+\ldots+a_{n,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}=0. \tag{5'}$$

V. Man multiplizire die erste Gleichung (1) mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}}$, die zweite mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}}$, ..., die n^{te} mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}$ und addire, indem man die Gleichungen (4) und (5′) beachtet, so ist:

$$A_n \cdot x_s = c_1\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}}+c_2\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}}+\ldots.+c_n\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}, \tag{6}$$

woraus sofort x_s folgt. $(s=1, 2, \ldots, n)$. Was die Grösse zweiter Seite anbelangt, so entsteht sie aus A_n, wenn man für $a_{1,s}, a_{2,s}, \ldots, a_{n,s}$ setzt $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Sie ist also gleich:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,s-1}, & c_1, & a_{1,s+1}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,s-1}, & c_2, & a_{2,s+1}, \ldots, & a_{2,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,s-1}, & c_n, & a_{n,s+1}, \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

VI. Gesetzt man habe das nfache Integral

$$\int\partial x_1\int\partial x_2\ldots\int P\,\partial x_n, \tag{8}$$

das wir als ein bestimmtes ansehen wollen und worin P eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist, und es solle dasselbe umgeformt werden, indem statt $x_1, \ldots, x_n$ die Grössen $z_1, \ldots, z_n$ eingeführt werden, die mit jenen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$x_1=\varphi_1(z_1,\ldots,z_n),\ x_2=\varphi_2(z_1,\ldots,z_n),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(z_1,z_2,\ldots,z_n). \tag{9}$$

Denken wir uns nun (§. 79) es werde x_n durch z_n, dann x_{n-1} durch $z_{n-1}, \ldots$ ersetzt, so hat man gemäss §. 79 zuerst $\frac{\partial x_n}{\partial z_n}$ zu bestimmen aus:

$$\frac{\partial x_n}{\partial z_n}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n}+\ldots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n},$$

$$0=\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial z_n},$$

$$\vdots$$

$$0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n}+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n}.$$

Folgt hieraus $\frac{\partial x_n}{\partial z_n}=\frac{M}{N}$, so ist nach Nr. V: (10)

$$M=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}, \quad N=\begin{vmatrix} 1, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n-1}} \\ 0, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Was diese zwei Grössen anbelangt, so ist leicht zu sehen dass: *

$$M=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \end{vmatrix}, \quad N=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Ist nunmehr x_n ersetzt, so bestimmt man $\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}}$ aus:

---

* Wir müssen hier noch Einiges in Bezug auf die Theorie einschalten. — Aus der in I angegebenen Bildungsweise der Determinante (2) geht hervor, dass jedes einzelne der Produkte, aus denen sie besteht, aus jeder der in (2) vorkommenden Horizontal- und Vertikalreihen je ein Element enthalten muss, aus keiner dieser Reihen aber zwei enthält (IV). Die Determinante M enthält in jeder Horizontalreihe $n-1$ negative Glieder; sie enthält also nothwendig in jedem Produkte $n-1$ solcher Glieder. Setzt man also alle Elemente positiv, so ist die Determinante eigentlich mit $(-1)^{n-1}$ multiplizirt worden.

Vertauscht man in einer Determinante (2) irgend zwei Horizontalreihen mit einander, so wechselt die Determinante bloss das Zeichen. Diese Vertauschung kommt auf ein Tauschen der ersten Zeiger r und s zurück, so dass statt der Ordnung $12..r..s..n$ jetzt die $12...s...r..,n$ gilt, wo das erste mal r niederer als s, das andere mal s niederer als r gerechnet wird. Bildet man aus $12..r..s..n$ alle möglichen Versetzungen und dann die Determinante A_n nach I; bildet sodann nach derselben Weise die Versetzungen von $12..s..r..n$ und ebenfalls daraus die Determinante A'_n nach I, so werden die Gruppen, die in A'_n vorkommen, alle auch in A_n enthalten seyn, dort aber das entgegengesetzte Zeichen haben (II), indem z. B. die in A'_n vorkommende Gruppe $a_{m,1}..a_{r,\varrho}..a_{s,\mu}..a_{e,n}$ dasselbe Zeichen hat wie $a_{m,1}..a_{s,\varrho}..a_{r,\mu}..a_{e,n}$ in A_n, also verschiedenes mit $a_{m,1}..a_{r,\varrho}..a_{s,\mu}..a_{e,n}$ in A_n. — Nach (3) ergibt sich sodann, dass ein Tauschen zweier Vertikalreihen dieselbe Wirkung hat.

Verschwinden in der ersten Horizontalreihe alle Glieder bis auf das erste, das 1 seyn soll; so kann man diese Reihe ganz weglassen. Diess ergibt sich aus (4) für $s=1$; dann ist $a_{1,1}=1$, $a_{1,2}=a_{1,3}=..=a_{1,n}=0$, also $A_n=\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,1}}$. Letzterer Grösse ist aber die Determinante, gebildet aus denselben Reihen mit Ausschluss der ersten Horizontal- und Vertikalreihe. Nach (3) wird also auch, wenn in der ersten Vertikalreihe das erste Glied 1, alle andern Null sind, die erste Horizontal- und die erste Vertikalreihe wegfallen.

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-2}}\frac{\partial z_{n-2}}{\partial z_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_{n-1}},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}}.$$

Folgt hieraus $\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}} = \frac{M'}{N'}$, so ist $M' = (-1)^{n-1} N$, während N' aus N folgt, wenn man dort statt n einsetzt $n-1$, d. h. Reihen auslöscht. Dass dasselbe Gesetz fortwährend stattfindet, ist leicht zu übersehen, und wenn $\frac{\partial x_3}{\partial z_3} = \frac{M^{(n-3)}}{N^{(n-3)}}$, so ist $M^{(n-3)} = -N^{(n-4)}$, während $N^{(n-3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$, und wenn dann $\frac{\partial x_2}{\partial z_2} = \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, so ist $M^{(n-2)} = N^{(n-3)}$, und $N^{(n-2)} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$, so dass da schliesslich $\frac{\partial x_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$:

$$\int \partial x_1 \int \partial x_2 \ldots \int P\, \partial x_n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \int \partial z_n \int \partial z_{n-1} \ldots \int PM\, \partial z_1; \qquad (11)$$

wo M durch (10) gegeben ist. (Vergl. noch XV.)

VII. Die Grösse $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ wird nach Nr. IV keines der Elemente der s^{ten} Vertikal- und der r^{ten} Horizontalreihe von (2) enthalten. In all den Gruppen von A_n, in denen $a_{r,s}$ vorkommt, nimmt diese Grösse die s^{te} Stelle ein, und nur diese Gruppen kommen, mit Weglassung von $a_{r,s}$, in $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ vor. In all den Gruppen nun, die letztere Grösse bilden, sind die ersten Zeiger $1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$ in allen möglichen Weisen versetzt, und daneben sind der Ordnung nach als zweite Zeiger geschrieben $1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$. Würde man also in (2) die s^{te} Vertikal- und die r^{te} Horizontalreihe weglassen und dann die Determinante bilden, so scheint es, erhielte man $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$. In allen Fällen erhält man dadurch die in letzterer Grösse vorkommenden Gruppen und es fragt sich bloss, ob das Zeichen derselben auch das ist, was der entsprechenden Gruppe in A_n zukommt. Zu dem Ende stelle $(a) = \ldots a_{r,s} \ldots$ eine Gruppe in A_n vor, so wird $(a') = \ldots 0 \ldots$ die entsprechende in $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ vorstellen, wo durch 0 angedeutet wird, dass kein Element dort steht. In der ersten Abtheilung von (a) stehen $s-1$ Elemente, in der zweiten $n-s$; von den

ersten seyen α erste Zeiger kleiner als r, also $s-\alpha-1$ grösser als r, in der zweiten seyen β kleiner als r, also $n-s-\beta$ grösser. Die Elemente, wenn $a_{r,s}$ weggedacht wird, machen etwa γ Vorsetzungen (Nr. II). Alsdann ist die Gesammtzahl aller Vorsetzungen in (a): $\gamma+s-\alpha-1+\beta$, in (a') aber γ; aber es gibt im Ganzen nur $r-1$ Zeiger, welche kleiner seyn können als r, so dass $\alpha+\beta=r-1$, d. h. wenn in (a') γ Vorsetzungen sind, so sind in (a) ihrer $\gamma+s-\alpha-1+r-1-\alpha=\gamma+s+r-2(\alpha+1)$. Da immer $2(\alpha+1)$ gerade ist, so wird also nach der Regel (a) dasselbe Zeichen haben mit (a'), wenn $s+r$ gerade, verschiedenes, wenn $r+s$ ungerade. Da diess für alle Gruppen so ist,* so hat man:

$$\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}=(-1)^{r+s}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} & ,\ldots, a_{1,s-1}, & a_{1,s+1} & ,\ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} & ,\ldots, a_{2,s-1}, & a_{2,s+1} & ,\ldots, a_{2,n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{r-1,1}, & a_{r-1,2}, & \ldots, a_{r-1,s-1}, & a_{r-1,s+1}, & \ldots, a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1}, & a_{r+1,2}, & \ldots, a_{r+1,s-1}, & a_{r+1,s+1}, & \ldots, a_{r+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}, & a_{n,2} & ,\ldots, a_{n,s-1}, & a_{n,s+1} & ,\ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

VIII. Seyen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ die (verschiedenen) Wurzeln der Gleichung $x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0=0=F(x)$, so ist also

$$\alpha_1^n+A_{n-1}\alpha_1^{n-1}+\ldots+A_1\alpha_1+A_0=0,$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\alpha_n^n+A_{n-1}\alpha_n^{n-1}+\ldots+A_1\alpha_n+A_0=0.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen mit $a_1,\ldots,a_n$, wo

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+\ldots+a_n=0, \\ \alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n=0, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \alpha_1^ra_1+\alpha_2^ra_2+\ldots+\alpha_n^ra_n=z, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \alpha_1^{n-1}a_1+\alpha_2^{n-1}a_2+\ldots+\alpha_n^{n-1}a_n=0, \end{array}\right\} \quad (12)$$

so folgt durch Addition:

$$A_r=-\frac{1}{z}\left(a_1\alpha_1^n+a_2\alpha_2^n+\ldots+a_n\alpha_n^n\right).$$

Ist aber

---

* Indem $r+s$ für alle Gruppen dasselbe ist, und nur α und γ sich von Gruppe zu Gruppe ändern können. Uebrigens folgt diess auch aus dem in der Note zu Nr. VI gezeigten, indem man zuerst durch Wechseln zweier benachbarter Vertikal- und Horizontalreihen die auszuwerfenden Gruppen zu erster Horizontal- und Vertikalreihe macht, und dann alle ihre Elemente, bis auf das erste, Null macht.

$$M = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

so ist nach Nr. V: $a_1 = \frac{z}{M} \frac{\partial M}{\partial (\alpha_1^r)}, \ldots, a_n = \frac{z}{M} \frac{\partial M}{\partial (\alpha_n^r)}$, also $A_r = -\frac{1}{M}\Big(\alpha_1^n \frac{\partial M}{\partial (\alpha_1^r)} + \ldots + \alpha_n^n \frac{\partial M}{\partial (\alpha_n^r)}\Big)$.

Den Gleichungen (12) wird übrigens, wenn $r = n-1$, genügt durch $a_1 = \frac{z}{F'(\alpha_1)}, \ldots, a_n = \frac{z}{F'(\alpha_n)}$, (nach §. 30, IV), so dass

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)} = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial (\alpha_1^{n-1})}, \ldots, \frac{1}{F'(\alpha_n)} = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{(\partial \alpha_n^{n-1})}.$$

Was nun $\frac{\partial M}{\partial (\alpha_r^{n-1})}$ anbelangt, so kann diese Grösse nach Nr. VII bestimmt werden. Tilgt man in (13) die erste Vertikal- und die letzte Horizontalreihe, und heisst M_1 die dann entstehende Determinante, so ist $\frac{\partial M}{\partial (\alpha_1^{n-1})} = (-1)^{n-1} M_1$. Ist aber $F_1(x) = (x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$, so ist ganz wie so eben $\frac{1}{F_1'(\alpha_2)} = \frac{1}{M_1} \frac{\partial M_1}{\partial (\alpha_2^{n-2})}$, u.s.w., so dass wenn

$F(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$, $F_1(x) = (x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \ldots, F_{n-3}(x) = (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$;

$$\frac{\partial M}{\partial (\alpha_1^{n-1})} = (-1)^{n-1} M_1, \quad \frac{\partial M_1}{\partial (\alpha_2^{n-2})} = (-1)^{n-2} M_2, \ldots, \frac{\partial M_{n-3}}{\partial (\alpha_{n-3}^2)} = (-1)^2 M_{n-2},$$

$$\frac{\partial M_{n-2}}{\partial \alpha_{n-1}} = (-1)^1 M_{n-1},$$

man hat $M_{n-2} = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \alpha_{n-1}, & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $M_{n-1} = 1$, und

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)} = \frac{(-1)^{n-1} M_1}{M}, \quad \frac{1}{F_1'(\alpha_2)} = \frac{(-1)^{n-2} M_2}{M_1}, \ldots, \frac{1}{F'_{(n-2)}(\alpha_{n-1})} =$$

$$\frac{(-1)^1 M_{n-1}}{M_{n-2}} = \frac{(-1)^1}{M_{n-2}},$$

woraus $M = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} F'(\alpha_1) F_1'(\alpha_2) \ldots F'_{n-2}(\alpha_{n-1}) = \pm (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \ldots$
$(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_3) \ldots (\alpha_2-\alpha_n) \ldots (\alpha_{n-1}-\alpha_n)$,

wo das obere Zeichen gilt, wenn $\frac{n(n-1)}{2}$ gerade, das untere im entgegengesetzten Falle.

IX. Betrachten wir das n fache bestimmte Integral:

$$\int_{a_1}^{b_1}\partial x_1 \int_{a_2}^{b_2}\partial x_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1) F(x_2) \ldots \varphi(x_n)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)\ldots (x_{n-1}-x_n)\,\partial x_n,$$

so ist dasselbe nach Nr. VIII gleich

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{a_1}^{b_1}\partial x_1 \int_{a_2}^{b_2}\partial x_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1) F(x_2) \ldots \varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, x_n^{n-1} \end{vmatrix} \partial x_n,$$

wo nun, wenn man die Determinante entwickelt, das Ganze in eine Reihe einzelner Integrale zerfällt, die als Produkte einfacher Integrale erscheinen.

X. Man habe die lineare Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + A_{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_1 \frac{\partial y}{\partial x} + A_0 y = 0, \tag{14}$$

worin $A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ bekannte Funktionen von x sind, und es seyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Funktionen von x, welche der (14) genügen, so ist, wenn man $\frac{\partial^m y_r}{\partial x^m} = y_r^{(m)}$ setzt und annimmt:*

$$\begin{aligned} a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n &= 0, \\ a_1 y'_1 + a_2 y'_2 + \ldots + a_n y'_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_1 y_1^{(r)} + a_2 y_2^{(r)} + \ldots + a_n y_n^{(r)} &= z, \\ &\vdots \\ a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n y_n^{(n-1)} &= 0, \end{aligned}$$

ganz wie in Nr. VIII:

$$A_r = -\frac{1}{M}\left(y_1^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r)}} + y_2^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(r)}} \right),$$

wo

$$M = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots, & y_n \\ y'_1, & y'_2, \ldots, & y'_n \\ \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

* Es ist

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} + A_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_1 y_1' + A_0 y_1 &= 0, \\ y_2^{(n)} + A_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_1 y_2' + A_0 y_2 &= 0, \\ &\vdots \\ y_n^{(n)} + A_{n-1} y_n^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_1 y_n' + A_0 y_n &= 0. \end{aligned}$$

Gemäss (4') ist auch

$$M = y_1^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + y_2^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(n-1)}} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}.$$

Hieraus folgt nun, wenn man nach x differenzirt:

$$\frac{dM}{dx} = y_1^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + y_2^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(n-1)}} + \dots + y_n^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} + y_1^{(n-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + \dots$$

$$+ y_n^{(n-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}.$$

Nach IV enthält $\frac{\partial M}{\partial y_r^{(n-1)}}$ weder $y_r, y_r', \dots, y_r^{(n-1)}$, noch $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \dots, y_n^{(n-1)}$, so dass wenn zur Abkürzung $\frac{\partial M}{\partial y_r^{(n-1)}} = K_r$,

$$\frac{dK_r}{dx} = \frac{\partial K_r}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial K_r}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n} y_n'$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(n-2)}} y_1^{(n-1)} + \frac{\partial K_r}{\partial y_2^{(n-1)}} y_2^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(n-2)}} y_n^{(n-1)},$$

wo man das Glied $\frac{\partial K_r}{\partial y_r^{(s)}}$ je mitrechnen kann, indem es von selbst Null ist. Man kann also setzen:

$$\frac{dK_r}{dx} = \Sigma_s \left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(s)}} y_1^{(s+1)} + \frac{\partial K_r}{\partial y_2^{(s)}} y_2^{(s+1)} + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(s)}} y_n^{(s+1)} \right),$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe von s, von 0 bis $n-2$, bezieht. Daraus folgt

$$y_1^{(n-1)} \frac{dK_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dK_2}{dx} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{dK_n}{dx} = \Sigma_r\, y_r^{(n-1)} \frac{dK_r}{dx}$$

$$= \Sigma_r \left[y_r^{(n-1)} \Sigma_s \left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(s)}} y_1^{(s+1)} + \frac{\partial K_r}{\partial y_2^{(s)}} y_2^{(s+1)} + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(s)}} y_n^{(s+1)} \right) \right],$$

wo Σ_r sich auf die Werthe $r = 1, 2, \dots, n$ bezieht. Diese Grösse ist auch

$$\Sigma_r \Sigma_s\, y_r^{(n-1)} \left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(s)}} y_1^{(s+1)} + \frac{\partial K_r}{\partial y_2^{(s)}} y_2^{(s+1)} + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(s)}} y_n^{(s+1)} \right),$$

wie man sich unmittelbar überzeugt.

In anderer Anordnung wird sie *

---

* Man hat nach einander:

$$\Sigma_r\, y_r^{(n-1)} \left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n} y_n' \right)$$

$$+ \Sigma_r\, y_r^{(n-1)} \left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1'} y_1'' + \frac{\partial K_r}{\partial y_2'} y_2'' + \dots + y_2'' + \dots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n'} y_n'' \right) + \dots$$

$$\Sigma_r \Sigma_s y_r^{(s+1)}\left(y_1^{(n-1)}\frac{\partial K_1}{\partial y_r^{(s)}} + y_2^{(n-1)}\frac{\partial K_2}{\partial y_r^{(s)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial K_n}{\partial y_r^{(s)}}\right). \qquad (a)$$

Da aber $K_m = \frac{\partial M}{\partial y_m^{(n-1)}}$, so ist $\frac{\partial K_m}{\partial y_r^{(s)}} = \frac{\partial^2 M}{\partial y_m^{(n-1)}\,\partial y_r^{(s)}}$, und weil $\frac{\partial M}{\partial y_r^{(s)}}$ selbst wieder eine Determinante ist (VII), so ist nach (4):

$$\frac{\partial M}{\partial y_r^{(s)}} = y_1^{(n-1)}\frac{\partial^2 M}{\partial y_1^{(n-1)}\,\partial y_r^{(s)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial^2 M}{\partial y_n^{(n-1)}\,\partial y_r^{(s)}}$$

$$= y_1^{(n-1)}\frac{\partial K_1}{\partial y_r^{(s)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial K_n}{\partial y_r^{(s)}},$$

wo das Glied $y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_r^{(s)}}$ allerdings von selbst wegfällt. Also ist die oben betrachtete Grösse (a) gleich

$$\Sigma_r \Sigma_s y_r^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_r^{(s)}} = \Sigma_s \Sigma_r y_r^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_r^{(s)}}$$

$$= \Sigma_s\left(y_1^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(s)}} + y_2^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_2^{(s)}} + \ldots + y_n^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(s)}}\right).$$

Wegen (5) ist $y_1^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(s)}} + \ldots + y_n^{(s+1)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(s)}} = 0$, so dass also (a)=0 und folglich

$$\frac{dM}{dx} = y_1^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} = -M A_{n-1},$$

$$M = C e^{-\int A_{n-1}\,dx}. \qquad (15)$$

Demgemäss ist auch (IV):

$$y_n^{(n-1)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} + y_n^{(n-2)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-2)}} + \ldots + y_n\frac{\partial M}{\partial y_n} = C e^{-\int A_{n-1}\,dx},$$

so dass, wenn

$$+ \Sigma_r y_r^{(n-1)}\left(\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(n-2)}} y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(n-2)}} y_n^{(n-1)}\right) = y_1' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_1}$$

$$+ y_1'' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_1'} + \ldots + y_1^{(n-1)} \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(n-2)}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ y_n' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_n} + y_n'' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_n'} + \ldots + y_n^{(n-1)} \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(n-2)}}$$

$$= y_1' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_1} + y_2' \Sigma y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_2} + \ldots + y_n' \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_n} + \ldots\ldots$$

$$+ y_1^{(n-1)} \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_1^{(n-2)}} + \ldots + y_n^{(n-1)} \Sigma_r y_r^{(n-1)}\frac{\partial K_r}{\partial y_n^{(n-2)}}$$

$$= \Sigma_s y_1^{(s+1)}\left(y_1^{(n-1)}\frac{\partial K_1}{\partial y_1^{(s)}} + y_2^{(n-1)}\frac{\partial K_2}{\partial y_1^{(s)}} + \ldots y_n^{(n-1)}\frac{\partial K_n}{\partial y_1^{(s)}}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \Sigma_s y_n^{(s+1)}\left(y_1^{(n-1)}\frac{\partial K_1}{\partial y_n^{(s)}} + y_2^{(n-1)}\frac{\partial K_2}{\partial y_n^{(s)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial K_n}{\partial y_n^{(s)}}\right)$$

$$= \Sigma_r \Sigma_s y_r^{(s+1)}\left(y_1^{(n-1)}\frac{\partial K_1}{\partial y_r^{(s)}} + y_2^{(n-1)}\frac{\partial K_2}{\partial y_r^{(s)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial K_n}{\partial y_r^{(s)}}\right).$$

$$\frac{\partial M}{\partial y_n^{(r)}} = B_r \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}},$$

ist

$$y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots\ldots + B_0 y_n = \frac{C e^{-\int A_{n-1} dx}}{\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}}. \qquad \text{(b)}$$

Setzt man die zweite Seite gleich ξ, so sagt also die (b) aus, dass y_n der Gleichung

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + B_{n-2} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + B_0 z = \xi \qquad \text{(b')}$$

genüge. Da ferner, wenn nicht $r = n$ (IV):

$$y_r^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} + y_r^{(n-2)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-2)}} + \ldots + y_r \frac{\partial M}{\partial y_n} = 0,$$

so genügen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ der Gleichung

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + B_{n-2} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + B_0 z = 0. \qquad \text{(c)}$$

Gemäss §. 116 kann man aber den allgemeinen Werth von z finden, der (b') genügt, wenn man die $n-1$ Werthe kennt, welche (c) genügen. Die dortigen Gleichungen (e) heissen:

$$y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + y_{n-1} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-1}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = \xi,$$

woraus nach V:

$$N \frac{\partial C_r}{\partial x} = \xi \frac{\partial N}{\partial y_r^{(n-2)}}, \quad C_r = \int \frac{\xi}{N} \frac{\partial N}{\partial y_r^{(n-2)}} dx + E_r, \quad E_r \text{ konstant},$$

wo

$$N = \begin{vmatrix} y_1 & , y_2 & , \ldots, & y_{n-1} \\ y_1' & , y_2' & , \ldots, & y_{n-1} \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots, & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}},$$

welch Letzteres sofort aus VII folgt, wo $r + s = 2n$. Demnach ist allgemein

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1},$$

C_r wie oben.

Einer der Werthe von z ist aber auch $= y_n$ und da $z = E_1 y_1 + \ldots + E_{n-1} y_{n-1}$ der (c) genügt, so wird man setzen können

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots \alpha_{n-1} y_{n-1}; \quad \alpha_r = \int \frac{\xi}{N} \frac{\partial N}{\partial y_r^{(n-2)}} dx,$$

ohne Konstante. *

---

* Man kann allerdings auch setzen $y_n = C_1 y_1 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1}$ und findet dann, dass der (14) genügt wird durch $e_1 y_1 + \ldots + e_{n-1} y_{n-1} + e_n y_n$, wo $e_1, \ldots, e_n$ Konstanten, d. h. durch $(e_1 + e_n E_n) y_1 + \ldots + (e_{n-1} + e_n E_{n-1}) y_{n-1} + (\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}) e_n$. Daraus aber folgt sofort, dass es genügt, y_n wie angegeben zu nehmen.

Hieraus schliesst man nun:

Kennt man die Funktionen $y_1, \ldots y_{n-1}$, welche der (14) genügen so genügt ihr auch

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \text{ wo } \alpha_r = \int \frac{e^{-\int A_{n-1} dx}}{N^2} \frac{\partial N}{\partial y_r^{(n-2)}} dx,$$

wo N die oben angegebene Determinante ist, und nach VII auch $\frac{\partial N}{\partial y_r^{(n-2)}}$ eine solche ist.

XI. Gesetzt, man habe neben dem Gleichungssystem (1) noch das folgende:

$$\begin{aligned} b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \ldots + b_{1,n}y_n = x_1, \ldots\ldots \\ b_{n,1}y_n + b_{n,2}y_2 + \ldots + b_{n,n}y_n = x_n, \end{aligned} \qquad (16)$$

so kann man, um $y_1, \ldots, y_n$ zu erhalten, entweder $x_1, \ldots, x_n$ aus (1) bestimmen, in (16) einsetzen und dann $y_1, \ldots, y_n$ hieraus ermitteln; oder aber man kann auch $x_1, \ldots, x_n$ aus (16) in (1) einsetzen und dann $y_1, \ldots, y_n$ bestimmen. Beide Wege müssen natürlich zu demselben Ziele führen, und es müssen namentlich die Koeffizienten der c in $y_1, \ldots, y_n$ in beiden Weisen genau dieselben seyn. Ist nun M die Determinante (2), dazu

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = N,$$

so haben $x_1, \ldots, x_n$ aus (1) den gemeinschaftlichen Nenner M, woraus dann leicht folgt, dass $y_1, \ldots, y_n$, nach der ersten Weise bestimmt, den gemeinschaftlichen Nenner MN haben. Verfährt man aber nach der zweiten Weise, und setzt:

$$\begin{aligned} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} = c_{1,1}, \\ a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + \ldots + a_{1,n}b_{n,2} = c_{1,2}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \\ a_{1,1}b_{1,n} + a_{1,2}b_{2,n} + \ldots + a_{1,n}b_{n,n} = c_{1,n}, \end{aligned} \qquad (17)$$

allgemein

$$a_{r,1}b_{1,s} + a_{r,2}b_{2,s} + \ldots + a_{r,n}b_{n,s} = c_{r,s},$$

wo $r = 1, \ldots, n$, und $s = 1, \ldots n$, so ist der gemeinschaftliche Nenner von $y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = R.$$

Hieraus folgt nun sofort, dass

$$MN = R,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\ b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,n} \\ c_{2,1}, c_{2,2}, \ldots, c_{2,n} \\ \vdots \quad \vdots \\ c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

wo die c nach (17) gebildet sind. Man sieht, dass zur Bildung der c die Horizontalreihen der ersten Determinante mit den Vertikalreihen der zweiten zu multipliziren sind. Beachtet man den in (3) ausgedrückten Satz, so sieht man dass die c auch in anderer Weise gebildet werden können, so namentlich auch

$$c_{r,s} = a_{r,1} b_{s,1} + a_{r,2} b_{s,2} + \ldots + a_{r,n} b_{s,n}. \quad (17')$$

Man kann diesen wichtigen Satz auch unmittelbar erweisen.

Das erste Glied von R ist

$$c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n} = \Sigma_r (a_{1,r} b_{1,r}) \Sigma_s (a_{2,s} b_{2,s}) \Sigma_u (a_{3,u} b_{3,u}) \ldots,$$

wo Σ_r sich auf $r = 1, 2, \ldots, n$; Σ_s auf $s = 1, 2, \ldots, n$ u. s. w. bezieht. Also ist

$$c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n} = \Sigma_r \Sigma_s \Sigma_u \ldots a_{1,r} a_{2,s} a_{3,u} \ldots, b_{1,r} b_{2,s} b_{3,u} \ldots$$

Die Determinante R bildet sich aus ihrem ersten Gliede, wenn man die ersten Zeiger der c in allen möglichen Weisen versetzt, und die so erhaltenen Glieder, mit den gehörigen Zeichen, summirt. Das Versetzen der ersten Zeiger der c ist aber nach (17′) ein Versetzen der ersten Zeiger an den a. Da alsdann in $a_{1,r} a_{2,s} a_{3,u} \ldots$ jedesmal für die einzelnen Gruppen dasselbe Zeichen erhalten wird, wie es die Regel meint, so ist hiernach

$$R = \Sigma_r \Sigma_s \Sigma_u \ldots b_{1,r} b_{2,s} b_{3,u} \ldots \begin{vmatrix} a_{1,r}, & a_{1,s}, & a_{1,u}, \ldots \\ a_{2,r}, & a_{2,s}, & a_{2,u}, \ldots \\ a_{3,r}, & a_{3,s}, & a_{3,u}, \ldots \\ & \vdots & \end{vmatrix} \quad (d)$$

Da r, s, u, ... der Anzahl nach n seyn müssen, so ist die hier gebrauchte Determinante nach der Note zu VI gleich $\pm M$ und zwar gilt das obere Zeichen, wenn die Ordnung r, s, u, ... der zweiten Zeiger aus 1, 2, ..., n durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Zeiger hervorgegangen ist, das — Zeichen im andern Falle (Nr. III), wobei allerdings vorausgesetzt ist, dass die r, s, u...... sämmtlich verschieden sind, da sonst die Determinante in (d) Null wäre (IV).

Legt man nun in $b_{1,r} b_{2,s} b_{3,u} \ldots$ den r, s, u, ... alle Werthe von 1 bis n bei, so werden in (d) die einzelnen Theile, für die zwei dieser Grössen denselben Werth haben, Null seyn, da es dann die Determinante ist; also bleiben nur die Glieder, in denen r, s, u, ... sämmtlich verschieden sind. Diess ist aber einfach, da die Anzahl n ist, alle möglichen Versetzungen von 1, 2, ..., n. Demnach wird sich aus $b_{1,r}\ b_{2,s}\ b_{3,u} \ldots$ nichts Anderes bilden, als die Determinante N in ihren einzelnen Gliedern. Ist die Zusammenstellung r, s, u, ... von gerader Ordnung (III), so hat das Glied das + Zeichen; dann ist die Determinante in (d) auch $= + M$; ist die Zusammenstellung von ungerader Ordnung, so sollte dem Glied das — Zeichen noch vorgesetzt werden; da dann aber die Determinante $= - M$ ist, so kommt dieses Zeichen wirklich zu dem betreffenden Gliede. Daraus folgt mithin, dass

$$R = NM$$

ist.

XII. Sey $\alpha_{r,s}$ der Koeffizient von $a_{r,s}$ in der Determinante (2), d. h. $=\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ (IV), so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \dots, & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2}, & \dots, & \alpha_{2,n} \\ & \vdots & & \\ \alpha_{n,1}, & \alpha_{n,2}, & \dots, & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}^{n-1} \tag{19}$$

Denn ist A_n die Determinante (2), B_n die aus den Elementen $\alpha_{r,s}$ gebildete, so ist nach XI:

$$A_n B_n = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \dots, & c_{1,n} \\ & & \vdots & \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \dots, & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

wo

$$c_{r,s} = a_{r,1}\alpha_{s,1} + a_{r,2}\alpha_{s,2} + \dots a_{r,n}\alpha_{s,n}$$

$$= a_{r,1}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,1}} + a_{r,2}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,2}} + \dots + a_{r,n}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,n}}.$$

Aus IV folgt also, dass die Elemente $c_{r,s}$, in denen r und s verschieden sind, sämmtlich Null sind; für $r = s$ aber $c_{r,r} = A_n$ sey. Demnach

$$A_n B_n = \begin{vmatrix} A_n, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & A_n, & \dots, & 0 \\ & & \vdots & \\ 0, & 0, & \dots, & A_n \end{vmatrix} = A_n^n,\ B_n = A_n^{n-1},$$

wodurch (19) erwiesen ist.

Der in der Note zu §. 173, I nachgewiesene Satz gehört hieher für $n = 3$. Die Elemente α sind die dortigen A, B, C; unsere Determinante B_n ist der dortige Zähler, $A_n = D$.

XIII. Sey das Integral

$$\iiint \dots P\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3 \dots$$

umzuformen (VI), indem für $x_1, \dots, x_n$ die neuen Veränderlichen $z_1, \dots, z_n$ eingeführt werden, so dass

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{z_1-a_1} + \frac{x_2^2}{z_1-a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{z_1-a_n} &= 1, \\ \frac{x_1^2}{z_2-a_1} + \frac{x_2^2}{z_2-a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{z_2-a_n} &= 1, \\ &\vdots \\ \frac{x_1^2}{z_n-a_1} + \frac{x_2^2}{z_n-a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{z_n-a_n} &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Setzt man wie in §. 172, II

$$f(\varrho) = (\varrho - z_1)(\varrho - z_2)\dots(\varrho - z_n),\ F(\varrho) = (\varrho - a_1)(\varrho - a_2)\dots(\varrho - a_n),$$

so ist (§. 30)

$$\frac{F(\varrho)-f(\varrho)}{F(\varrho)}=\frac{F(a_1)-f(a_1)}{F'(a_1)}\frac{1}{\varrho-a_1}+\ldots+\frac{F(a_n)-f(a_n)}{F'(a_n)}\frac{1}{\varrho-a_n}$$

$$=-\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}\frac{1}{\varrho-a_1}-\ldots-\frac{f(a_n)}{F'(a_n)}\frac{1}{\varrho-a_n}.$$

Setzt man hier nach einander $\varrho=z_1,\ldots,z_n$ und beachtet, dass dann immer $f(\varrho)=0$, so ist

$$-\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}\frac{1}{z_1-a_1}-\ldots-\frac{f(a_n)}{F'(a_n)}\frac{1}{z_1-a_n}=1,$$

$$\vdots$$

$$-\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}\frac{1}{z_n-a_1}-\ldots-\frac{f(a_n)}{F'(a_n)}\frac{1}{z_n-a_n}=1,$$

woraus folgt, dass den (f) genügt wird durch

$$x_1^2=-\frac{f(a_1)}{F'(a_1)},\ x_2^2=-\frac{f(a_2)}{F'(a_2)},\ldots,x_n^2=-\frac{f(a_n)}{F'(a_n)}. \qquad (g)$$

Verglichen mit VI ist also

$$\varphi_r^2=-\frac{f(a_r)}{F'(a_r)}=-\frac{(a_r-z_1)\ldots(a_r-z_n)}{F'(a_r)},\ 2\varphi_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial z_s}=-\varphi_r^2\frac{1}{a_r-z_s},\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial z_s}=-\tfrac{1}{2}\varphi_r\frac{1}{a_r-z_s},$$

mithin das dortige M =

$$\begin{vmatrix}-\tfrac12\varphi_n\frac{1}{a_n-z_1}, & \ldots, & -\tfrac12\varphi_n\frac{1}{a_n-z_n}\\ -\tfrac12\varphi_{n-1}\frac{1}{a_{n-1}-z_1}, & \ldots, & -\tfrac12\varphi_{n-1}\frac{1}{a_{n-1}-z_n}\\ \vdots & & \\ -\tfrac12\varphi_1\frac{1}{a_1-z_1}, & \ldots, & -\tfrac12\varphi_1\frac{1}{a_1-z_n}\end{vmatrix}=(-1)^n\frac{1}{2^n}\begin{vmatrix}\frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\\ \frac{\varphi_{n-1}}{a_{n-1}-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_{n-1}}{a_{n-1}-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\end{vmatrix}.$$

Nach XI, VI-Note, III ist aber

$$\begin{vmatrix}\frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}\frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_n}{a_n-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1}{a_1-z_1}, & \frac{\varphi_2}{a_2-z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_1}\\ \vdots & & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1-z_n}, & \frac{\varphi_2}{a_2-z_n}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n-z_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_{1,1}, & \ldots, & c_{1,n}\\ \vdots & & \\ c_{1,n}, & \ldots, & c_{n,n}\end{vmatrix}$$

wo

$$c_{r,s} = \frac{\varphi_1^2}{(a_1 - z_s)(a_1 - z_r)} + \frac{\varphi_2^2}{(a_2 - z_s)(a_2 - z_r)} + \ldots + \frac{\varphi_n^2}{(a_n - z_s)(a_n - z_r)}$$

$$= -\frac{f(a_1)}{F'(a_1)} \frac{1}{(a_1 - z_s)(a_1 - z_r)} - \frac{f(a_2)}{F'(a_2)} \frac{1}{(a_2 - z_s)(a_2 - z_r)} - \ldots$$

$$- \frac{f(a_n)}{F'(a_n)} \frac{1}{(a_n - z_s)(a_n - z_r)}.$$

Nun ist

$$\frac{f(a_m)}{(a_m - z_s)(a_m - z_r)} = (a_m - z_1) \ldots (a_m - z_{s-1})(a_m - z_{s+1}) \ldots (a_m - z_{r-1})(a_m - z_{r+1}) \ldots (a_m - z_n);$$

setzt man also

$$\frac{f(\varrho)}{\varrho - z_s} = \varphi(\varrho),$$

so ist

$$c_{r,s} = -\frac{\varphi(a_1)}{F'(a_1)} \frac{1}{a_1 - z_r} - \frac{\varphi(a_2)}{F'(a_2)} \frac{1}{a_2 - z_r} - \ldots - \frac{\varphi(a_n)}{F'(a_n)} \frac{1}{a_n - z_r} = \Sigma - \frac{\varphi(x)}{F'(x)} \frac{1}{x - z_r},$$

wenn Σ sich auf die Werthe $a_1, \ldots, a_n$ bezieht, für die $F(x) = 0$ ist (§. 30, IV). Diese Grösse ist aber [Gleichung (d) am a. a. O.] gleich $+\frac{\varphi(z_r)}{F(z_r)}$, d. h. da $\varphi z_r) = 0$, es ist

$$c_{r,s} = 0,$$

wenn r und s verschieden.

Sind r und s gleich, so ist eben so

$$c_{r,r} = \Sigma - \frac{\varphi(x)}{F'(x)} \frac{1}{x - z_r} = \frac{\varphi(z_r)}{F(z_r)} = \frac{f'(z_r)}{F(z_r)},$$

da $\varphi(z_r) = \frac{f(\varrho)}{\varrho - z_r}$ [für $\varrho = z_r$] $= \frac{0}{0} = f'(z_r)$ ist. Daraus also

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi_n}{a_n - z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_n}{a_n - z_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\varphi_1}{a_1 - z_1}, & \ldots, & \frac{\varphi_1}{a_1 - z_n} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \frac{f'(z_1)}{F(z_1)}, & 0, \ldots\ldots, & 0, \\ 0, & \frac{f'(z_2)}{F(z_2)}, \ldots, & 0, \\ & \vdots & \\ 0, & 0, \ldots\ldots, & \frac{f'(z_n)}{F(z_n)}, \end{vmatrix} = \frac{f'(z_1) f'(z_2) \ldots f'(z_n)}{F(z_1) F(z_2) \ldots F(z_n)}.$$

Demnach endlich

$$\int\!\!\int\!\!\int \ldots P\, \partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3 \ldots = \pm \frac{1}{2_n} \int\!\!\int\!\!\int \ldots P \sqrt{\frac{f'(z_1) f'(z_2) \ldots f'(z_n)}{F(z_1) F(z_2) \ldots F(z_n)}}\, \partial z_1\, \partial z_2\, \partial z_3 \ldots, \quad (20)$$

wo

$$f(\varrho) = (\varrho - z_1)(\varrho - z_2) \ldots (\varrho - z_n), \quad F(\varrho) = (\varrho - a_1)(\varrho - a_2) \ldots (\varrho - a_n).$$

Daraus

$$f'(z_1) = (z_1 - z_2) \ldots (z_1 - z_n), \quad f'(z_2) = (z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \ldots (z_2 - z_n), \ldots,$$
$$F(z_1) = (z_1 - a_1) \ldots (z_1 - a_n), \quad F(z_2) = (z_2 - a_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (z_2 - a_n), \ldots,$$
$$f'(z_n) = (z_n - z_1)\, z_n - z_2) \ldots (z_n - z_{n-1}),$$
$$F(z_n) = (z_n - a_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (z_n - a_n);$$

$$f'(z_1)\ldots f'(z_n)=(-1)^{n-1}(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2\ldots(z_1-z_n)^2(-1)^{n-2}(z_2-z_3)^2\ldots (z_2-z_n)^2\ldots\ldots(-1)^1(z^{n-1}-z_n)^2$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2\ldots(z_1-z_n)^2(z_2-z_3)^2(z_2-z_4)^2\ldots (z_2-z_n)^2\ldots\ldots(z_{n-1}-z_n)^2.$$

Setzt man $z_1=u_1^2,\ z_2=u_2^2,\ldots,\ z_n=u_n^2$, so ist

$$\iiint\ldots P\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3\ldots$$

$$=\pm\iiint\ldots P\,u_1\,u_2\ldots u_n\sqrt{\frac{M}{F(u_1^2)F(u_2^2)..(F u_n^2)}}\,\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3\ldots,\qquad (21)$$

wo

$$M=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(u_1^2-u_2^2)^2(u_1^2-u_3^2)^2\ldots(u_1^2-u_n^2)^2(u_2^2-u_3^2)^2\ldots(u_2^2-u_n^2)^2\ldots\ldots (u_{n-1}^2-u_n^2)^2;\quad F(\varrho)=(\varrho-a_1)\ldots(\varrho-a_n)$$

und

$$\left.\begin{array}{c}\frac{x_1^2}{u_1^2-a_1}+\frac{x_2^2}{u_1^2-a_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u_1^2-a_n}=1,\\ \vdots\\ \frac{x_1^2}{u_n^2-a_1}+\frac{x_2^2}{u_n^2-a_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u_n^2-a_n}=1.\end{array}\right\}.$$

XIV. Setzt man in der Formel (21) $a_1=0,\ a_2=a^2,\ a_3=c^2$, so ist

$$\iiint P\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3=\pm\iiint P\,u_1\,u_2\,u_3\,(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)\times$$
$$\sqrt{\frac{-1}{u_1^2u_2^2u_3^2(u_1^2-a^2)(u_1^2-c^2)(u_2^2-a^2)(u_2^2-c^2)(u_3^2-a^2)(u_3^2-c^2)}}\,\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3$$
$$=\pm\iiint P\frac{(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)\,\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3}{\sqrt{[(u_1^2-a^2)(u_1^2-c^2)(u_2^2-a^2)(c^2-u_2^2)(a^2-u_3^2)(c^2-u_3^2)]}},$$

welches die Formel (d) des §. 172, IV ist ($u_1=\lambda,\ u_2=\mu,\ u_3=\nu$). Die Formel (21) ist demnach die Verallgemeinerung jener Formel, so wie überhaupt die Untersuchung in XIII diejenige in §. 172 auf beliebig viele Veränderliche erweitert.

XV. Die wichtigen Ergebnisse in §. 168, II, III lassen sich ebenfalls leicht verallgemeinern.

Wir wollen nämlich annehmen, man habe erwiesen, es lasse sich ein $n$faches bestimmtes Integral, gleich viel ob seine Gränzen konstant sind oder nicht, geradezu nach der Formel (11) in Nr. VI umformen, wobei wegen der Gränzbestimmung besondere Untersuchung vorbehalten bleibe, so dass also

$$\iint\ldots\int P\,\partial x_1\,\partial x_2,\ldots\partial x_n=\iint\ldots\int P\,M\,\partial z_1\,\partial z_2\ldots\partial z_n\qquad (a)$$

und zeigen nun, dass auch für ein $n+1$ faches Integral dasselbe gelten muss. Dabei wollen wir, was immer erreicht werden kann, die untern Gränzen wie in §. 168, II, III, durchweg gleich Null voraussetzen.

Sey demnach

$$\int\int\ldots\int Q\,\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_{n+1} \tag{b}$$

vorgelegt, und zu setzen

$$x_1=\varphi_1(z_1,\ldots,z_{n+1}),\ \ldots\ldots,\ x_{n+1}=\varphi_{n+1}(z_1,\ldots,z_{n+1}). \tag{c}$$

Die Integration in (b) nach x_{n+1} sey durch

$$\int_0^{\psi(x_1,\ldots,x_n)} Q\,\partial x_{n+1} \tag{d}$$

angegeben. Setzt man hierin

$$x_{n+1}=x'_{n+1}\,\psi(x_1,\ldots,x_n), \tag{e}$$

so wird (d) zu $\int_0^1 \psi\, Q\,\partial x'_{n+1}$, wo $\psi=\psi(x_1,\ldots,x_n)$, welches Integral nun konstante Gränzen hat. x'_{n+1} hängt übrigens mit den z durch die Gleichung $x'_{n+1}\psi=\varphi_{n+1}(z_1,\ldots,z_{n+1})$ zusammen, aus der folge $x'_{n+1}=\varphi'_{n+1}(z_1,\ldots,z_{n+1})$.

Das Integral (b) ist also

$$\int\int\ldots\int\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n\int_0^1\psi\, Q\,\partial x'_{n+1}, \tag{f}$$

in welchem wir nun x'_{n+1} durch z_{n+1} ersetzen wollen. Aus VI und §. 79 geht unmittelbar hervor, dass

$$\int_0^1\psi\, Q\,\partial x'_{n+1}=\int_\alpha^\beta\psi\, Q\,\frac{M}{N}\,\partial z_{n+1},$$

wenn

$$M=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi'_{n+1}}{\partial z_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi'_{n+1}}{\partial z_{n+1}}\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial z_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial z_{n+1}}\\ & \vdots & \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_{n+1}}\end{vmatrix},\quad N=\pm\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n}\\ & \vdots & \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n}\end{vmatrix},$$

während α und β sich aus der Gleichung müssen ermitteln lassen, die man erhält, wenn man $z_1,\ldots,z_n$ aus $x_1=\varphi_1,\ldots,x_n=\varphi_n$, $x'_{n+1}\psi=\varphi_{n+1}$ eliminirt, und dann α der Werth von z_{n+1} für $x'_{n+1}=0$, β der von z_{n+1} für $x'_{n+1}=1$. Diese Werthe setzen wir als unabhängig von $x_1,\ldots,x_n$ voraus. Hiedurch aber verwandelt sich (b) in

$$\int_\alpha^\beta\partial z_{n+1}\int\int\ldots\int Q\,\psi\,\frac{M}{N}\,\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n. \tag{b'}$$

Was nun aber φ'_{n+1} betrifft, so ist es der Werth von x'_{n+1} in $z_1,\ldots,z_{n+1}$; überdiess sind oben die Grössen $x_1,\ldots,x_n$ als Konstanten angesehen, so dass aus $x_{n+1}=x'_{n+1}\psi$ jetzt folgen wird:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial z_1}=\frac{\partial x'_{n+1}}{\partial z_1}\psi,\quad\frac{\partial x_{n+1}}{\partial z_2}=\frac{\partial x'_{n+1}}{\partial z_2}\psi,\ \ldots,\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial z_{n+1}}=\frac{\partial x'_{n+1}}{\partial z_{n+1}}\psi,$$

d. h.

$$\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial z_1}=\psi\frac{\partial\varphi'_{n+1}}{\partial z_1}\quad\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial z_2}=\psi\frac{\partial\varphi'_{n+1}}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial z_{n+1}}=\psi\frac{\partial\varphi'_{n+1}}{\partial z_{n+1}}.$$

Dadurch aber wird

$$M = \begin{vmatrix} \frac{1}{\psi}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{1}{\psi}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial z_{n+1}} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n+1}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial z_{n+1}} \\ & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n+1}} \end{vmatrix} \frac{1}{\psi}.$$

Heisst also die letzte Determinante M′, so ist

$$M' = M\psi$$

und also ist die Grösse (b′) auch

$$\int_\alpha^\beta \partial z_{n+1} \int\int \dots \int \frac{Q M'}{N} \partial x_1 \dots \partial x_n, \qquad (B)$$

wo allerdings gedacht ist, in Q, M′, N sey zuerst $x_{n+1} = x'_{n+1}\psi$ und dann $x'_{n+1}\psi = \varphi_{n+1}$ gesetzt worden, was aber darauf hinaus kommt, kurzweg $x_{n+1} = \varphi_{n+1}$ zu setzen, wie die (c) meinen.* — Das n fache Integral

$$\int\int \dots \int \frac{Q M'}{N} \partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n \qquad (B')$$

ist nun noch umzuformen, indem $z_1, \dots, z_n$ einführt. Dabei ist z_{n+1} als konstant anzusehen. Man benützt also die n ersten Gleichungen (c). Nun setzen wir aber voraus, die Formel (11) in VI lasse sich auf ein solches Integral anwenden, d. h. man dürfe setzen:

$$\int\int \dots \int \frac{Q M'}{N} \partial x_1 \dots \partial x_n = \pm \int\int \dots \int \frac{Q M'}{N} P \, \partial z_1 \dots \partial z_n, \qquad (g)$$

wo

$$P = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \end{vmatrix}, \text{ d. h. } P = \pm N,$$

so dass also das Integral (B′) sey

$$\pm \int\int \dots \int Q M' \, \partial z_1 \dots \partial z_n$$

und mithin (B) d. h. (b) gleich

$$\mp \int\int \dots \int Q M' \, \partial z_1 \, \partial z_2 \dots \partial z_{n+1}.$$

Da nun M′ genau so gebildet ist, wie der Satz in VI verlangt, so ist damit erwiesen, dass wenn die Sätze in §. 168, II und III, für n fache Integrale gelten, sie auch für n + 1 fache wahr sind. Da sie nun für 2- und 3 fache gelten, *so gelten sie also allgemein.*

* Vorläufig müssen aber in φ_{n+1} die $z_1, \dots, z_n$ noch mittelst der n ersten Gleichungen (c) ersetzt gedacht werden.

Was die Gränzbestimmung anbelangt, so lässt sich dieselbe, wie schon §. 79, IV zeigen mag, so kurzweg nicht abmachen. Die Bemerkung in §. 79, IV wird bei dieser Bestimmung immer zu beachten seyn.

XVI. Der in §. 139, III ausgesprochene allgemeine Satz lässt sich auch in anderer Form geben. Seyen nämlich

$$\varphi_n = \alpha_n, \ \varphi_{n-1} = \alpha_{n-1}, \ \ldots, \ \varphi_2 = \alpha_2 \tag{a}$$

$n-1$ Integralgleichungen des dortigen Systems (p) mit den willkürlichen Konstanten $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2$, wo wir nun voraussetzen wollen, es enthielten die φ keine der Konstanten in sich. Alsdann wird man die (q) in §. 139 aus den (a) erhalten, wenn man y_n aus den zwei ersten, y_n und y_{n-1} aus den drei ersten u. s. w. eliminirt, so dass also die dortige Gleichung $f_1 = c_1$ mit $\varphi_n = \alpha_n$ identisch ist; dagegen $f_2 = c_2$ aus $\varphi_{n-1} = \alpha_{n-1}$ hervorgeht, wenn man y_n mittelst $\varphi_n = \alpha_n$ ersetzt; $f_3 = c_3$ aus $\varphi_{n-2} = \alpha_{n-2}$, wenn man y_n und y_{n-1} aus $\varphi_n = \alpha_n$, $\varphi_{n-1} = \alpha_{n-1}$ ersetzt, u. s. w. — Es ist übrigens $\alpha_n = c_1$, $\alpha_{n-1} = c_2$, ...

Demnach ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}.$$

Weiter aber

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}} = \frac{d\varphi_{n-1}}{d y_{n-1}} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-1}},$$

wo der letztere Differentialquotient aus

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-1}} = 0$$

zu ziehen ist. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}},$$

d. h.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Dann

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_{n-2}} = \frac{d\varphi_{n-2}}{d y_{n-2}} = \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-2}},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-2}},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-2}},$$

Daraus folgt leicht

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial f_3}{\partial y_{n-2}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_{n-2}}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-2}}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-2}}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Allgemein (nach VI)

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\,\frac{\partial f_2}{\partial y_{n-1}}\cdots\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}\\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_n}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_3}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=P,$$

so dass in §. 139, III: $M=\frac{\zeta}{P}$, und hier $y_2,\ldots,y_n$ mittelst der obigen Gleichungen (a) zu ersetzen sind.

[illegible].

Die Formel für $\int^n y z\, d x^n$, wenn y eine ganze Funktion von x.

I. Sey y so beschaffen, dass $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}=0$, also auch alle höhern Differentialquotienten Null, so hat man:

$$\int y z\, dx = y\int z\, dx-\int\left(\frac{\partial y}{\partial x}\int z\, dx\right)dx,$$

$$\int\left(\frac{\partial y}{\partial x}\int z\,\partial x\right)\partial x=\frac{\partial y}{\partial x}\int^2 z\,\partial x^2-\int\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^2 z\,\partial x^2\right)dx,$$

$$\int\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^2 z\,\partial x^2\right)\partial x=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^3 z\,\partial x^3-\int\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\int^3 z\,\partial x^3\right)\partial x,$$

$$\vdots$$

$$\int\left(\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\int^{r-1} z\,\partial x^{r-1}\right)\partial x=\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\int^r z\,\partial x^r,$$

wenn $\int^m z\,\partial x^m$ bedeutet, man solle z nach einander m mal integriren. Daraus

$$\int y z\,\partial x = y\int z\,\partial x-\frac{\partial y}{\partial x}\int^2 z\,\partial x^2+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^3 z\,\partial x^3-\ldots\ldots$$
$$\mp\frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}}\int^{r-1} z\,\partial x^{r-1}\pm\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\int^r z\,\partial x^r. \qquad \text{(a)}$$

Weiter folgt hieraus, wenn man nochmals integrirt und auf jedes Glied dieselbe Formel anwendet:

$$\int^2 y z\, dx^2 = y\int^2 z\,\partial x^2-\frac{\partial y}{\partial x}\int^3 z\,\partial x^3+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^4 z\,\partial x^4-\ldots\ldots$$
$$\mp\frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}}\int^r z\,\partial x_r\pm\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}\int^{r+1} z\,\partial x^{r+1}$$
$$-\frac{\partial y}{\partial x}\int^3 z\,\partial x^3+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^4 z\,\partial x^4-\ldots\ldots$$
$$\vdots$$

$$\mp \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^r z\, \partial x^r \pm \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{r+1} z\, \partial x^{r+1}$$

$$+ \cdots\cdots \mp \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^r z\, \partial x^r \pm \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{r+1} z\, \partial x^{r+1}$$

$$\pm \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{r+1} z\, \partial x^{r+1}$$

$$= y \int^2 z\, \partial x^2 - 2 \frac{\partial y}{\partial x} \int^3 z\, \partial x^3 + 3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int^4 z\, \partial x^4 - \cdots\cdots$$

$$\mp (r-1) \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^r z\, \partial x_r \pm r \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{r+1} z\, \partial x^{r+1}. \qquad \text{(b)}$$

Daraus scheint allgemein zu folgen:

$$\int^n y z\, dx^n = y \int^n z\, \partial x^n - \frac{n}{1} \frac{\partial y}{\partial x} \int^{n+1} \partial x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int^{n+2} z\, \partial x^{n+2} - \cdots$$

$$\mp \frac{n(n+1)\ldots(n+r-3)}{1.2\ldots\ldots(r-2)} \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^{n+r-2} z\, \partial x^{n+r-2}$$

$$\pm \frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)} \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{n+r-1} z\, \partial x^{n+r-1}, \qquad \text{(c)}$$

welcher Satz leicht durch den Schluss von n auf n + 1 bewiesen wird. Man findet nämlich aus (c) mit Hilfe von (a):

$$\int^{n+1} y z\, \partial x^{n+1} = y \int^{n+1} z\, \partial x^{n+1} - \frac{\partial y}{\partial x} \int^{n+2} z\, \partial x^{n+2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int^{n+3} z\, \partial x^{n+3} - \cdots\cdots$$

$$\mp \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^{n+r-1} z\, \partial x^{n+r-1} \pm \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{n+r} z\, \partial x^{n+r}$$

$$- \frac{n}{1} \frac{\partial y}{\partial x} \int^{n+2} z\, \partial x^{n+2} + \frac{n}{1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int^{n+3} z\, \partial x^{n+3} - \cdots$$

$$\mp \frac{n}{1} \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^{n+r-1} z\, \partial x^{n+r-1} \pm \frac{n}{1} \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{n+r} z\, \partial x^{n+r}$$

$$\vdots$$

$$\mp \frac{n(n+1)\ldots(n+r-3)}{1.2\ldots(r+2)} \frac{\partial^{r-2} y}{\partial x^{r-2}} \int^{n+r-1} z\, \partial x^{n+r-1}$$

$$\pm \frac{n(n+1)\ldots(n+r-3)}{1.2\ldots(r+2)} \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{n+r} z\, \partial x^{n+r}$$

$$\pm \frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots(r-1)} \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}} \int^{n+r} z\, \partial x^{n+r}.$$

Aber

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots\ldots(r-1)},^*$$

wodurch die (c) erwiesen ist.

---

* Die Formel (18) in §. 18' heisst auch

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-r+2)}{1,2\ldots\ldots(r-1)} = \frac{b(b-1)\ldots(b-r+2)}{1.2\ldots(r-1)} + \frac{a}{1} \frac{b(b-1)\ldots(b-r+3)}{1.2\ldots(r-2)}$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-r+2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)}.$$

II. Man habe die Gleichung (§. 114, II):

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{\partial y}{\partial x} + a_0 y = 0, \qquad (f)$$

so folgt daraus, wenn man sie n mal integrirt und die (c) benützt:

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \int^{n-2} y \, \partial x^{n-2} - \frac{n}{1} (b_2 + 2 c_2 x) \int^{n-1} y \, \partial x^{n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2} 2 c_2 \int^n y \, \partial x^n$$

$$+ (a_1 + b_1 x) \int^{n-1} y \, \partial x^{n-1} - \frac{n}{1} b_1 \int^n y \, \partial x^n$$

$$+ a_0 \int^n y \, \partial x^n = g_1 x^{n-1} + g_2 x^{n-2} + \ldots + g_n,$$

wo $g_1, \ldots, g_n$ willkürliche Konstanten sind. Demnach, **wenn n als positive ganze Zahl aus**

$$n(n+1) c_2 - n b_1 + a_0 = 0 \qquad (g)$$

folgen kann, und man setzt $\int^{n-1} y \, \partial x^{n-1} = z$, so ist

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + [a_1 - b_2 n + (b_1 - 2 n c_2) x] z = g_1 x^{n-1} + \ldots + g_n,$$

und also (§. 92)

$$z = e^{-\int \frac{a_1 - b_2 n + (b_1 - 2 n c_2) x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2} \partial x} \left[C + \int (g_1 x^{n-1} + \ldots + g_n) e^{\int \frac{a_1 - b_2 n + (b_1 - 2 n c_2) x}{a_2 + b_2 x + c x^2} \partial x} \partial x\right],$$

und dann

$$y = \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}.$$

Von den n + 1 Konstanten C, $g_1, \ldots, g_n$ dürfen hier nur noch 2 willkürlich bleiben. Ohne uns aber auf diese Untersuchung einzulassen wollen wir einfach fragen, ob nicht

$$y = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(e^{-\int \frac{a_1 - b_2 n + (b_1 - 2 n c_2) x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2} \partial x}\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} X$$

der (f) genügen kann. Alsdann müsste

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{\partial^{n+1} X}{\partial x^{n+1}} + (a_1 + b_1 x) \frac{\partial^n X}{\partial x^n} + a_0 \frac{\partial^{n-1} X}{\partial x^{n-1}} = 0$$

seyn, d. h.

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[a_0 X + (a_1 + b_1 x) \frac{\partial X}{\partial x} + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right]$$

$$- \frac{n-1}{1} (b_1) \frac{\partial^{n-1} X}{\partial x^{n-1}} - \frac{n-1}{1} (b_2 + 2 c_2 x) \frac{\partial^n X}{\partial x^n} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} 2 c_2 \frac{\partial^{n-1} X}{\partial x^{n-1}} = 0,$$

Setzt man hier a = — n, b = — 1, so ergibt sich

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)} = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1.2} + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{1.2\ldots(r-1)},$$

wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $(-1)^{r-1}$ weglässt.

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[a_0 X + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial X}{\partial x} + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right]$$

$$-\frac{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[b_1 X + (b_2 + 2c_2 x)\frac{\partial X}{\partial x} + (n-2)c_2 X\right] + (n-1)^2 2c_2 \frac{\partial^{n-1} X}{\partial x^{n-1}} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\Big\{[(a_0 - (n-1)b_1 - (n-1)(n-2)c_2 + (n-1)^2 2c_2]X$$

$$+ [a_1 + b_1 x - (n-1)(b_2 + 2c_2 x)]\frac{\partial X}{\partial x} + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\Big\} = 0.$$

Die eingeklammerte Grösse ist

$$[a_0 - (n-1)b_1 + n(n-1)c_2]X + [a_1 - (n-1)b_2 + (b_1 - 2(n-1)c_2)x]\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$+ (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

d. h. da $a_0 - n b_1 = -(n^2 + n)c_2$:

$$(b_1 - 2nc_2)X + [a_1 - (n-1)b_2 + [b_1 - 2(n-1)c_2]x]\frac{\partial X}{\partial x} + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{a_1 - nb_2 + (b_1 - 2nc_2)x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2}X,$$

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial X}{\partial x} = -[a_1 - nb_2 + (b_1 - 2nc_2)x]X;$$

woraus

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + (b_2 + 2c_2 x)\frac{\partial X}{\partial x} = -(b_1 - 2nc_2)X - [a_1 - nb_2 + (b_1 - 2nc_2)x]\frac{\partial X}{\partial x},$$

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -(b_1 - 2nc_2)X - [a_1 - (n-1)b_2 + (b_1 - 2nc_2 + 2c_2)x]\frac{\partial X}{\partial x},$$

so dass jene eingeklammerte Grösse gleich Null ist, mithin die Bedingungsgleichung erfüllt ist. Man schliesst hieraus den folgenden Satz:

Folgt aus (g) für n eine positive ganze Zahl, so genügt der (f) auch

$$y = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(e^{-\int\frac{a_1 - nb_2 + (b_1 - 2nc_2)x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2}\partial x}\right). \tag{h}$$

III. So etwa (vergl. $\mathfrak{A}$, VII) für

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} + m(m+1)y = 0 \tag{i}$$

wenn m eine ganze Zahl, ist die (g):

$$-n(n+1) + 2n + m(m+1) = 0, \quad -n(n-1) + m(m+1) = 0.$$

Daraus folgt $n = -m$, oder $n = m + 1$. Man findet also:

wen m eine negative Zahl:

$$y = \frac{\partial^{-m-1}}{\partial x^{-m-1}} e^{\int\frac{2(m+1)x\,\partial x}{1 - x^2}} = \frac{\partial^{-m-1}}{\partial x^{-m-1}}(1 - x^2)^{-(m+1)};$$

wenn m eine positive Zahl:

$$y = \frac{\partial^m}{\partial x^m} e^{-2m\int\frac{x\,\partial x}{1 - x^2}} = \frac{\partial^m}{\partial x^m}(1 - x^2)^m.$$

IV. Für

$$(x^2-4)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}-m^2 y=0,\ \text{m positiv und ganz}, \qquad (k)$$

wäre

$$n(n+1)-n-m^2=0,\ n=m;\ \int\frac{(1-2m)\,x\,\partial x}{x^2-4}=\frac{1-2m}{2}\,l(x^2-4),$$

also

$$y=\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}(x^2-4)^{m-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man $x=2z$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z},\ldots,\ \frac{\partial^r u}{\partial x^r}=\frac{1}{2^r}\frac{\partial^r u}{\partial z^r},$$

so dass

$$y=\frac{1}{2^{m-1}}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}(4z^2-4)^{m-\frac{1}{2}}=2^m(-1)^{m-\frac{1}{2}}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}.$$

Nach „Anhang“ 𝔖, II ist aber

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}=(-1)^{m-1}\frac{1.3..(2m-1)}{m}\sin(m\varphi),\ z=\cos\varphi,$$

so dass auch

$$y=\sin(m\varphi),\ \cos\varphi=\tfrac{1}{2}x.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{m}{2}\frac{\cos m\varphi}{\sin\varphi},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{m}{4}\frac{m\sin m\varphi\sin\varphi+\cos m\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi},\ x^2-4=-4\sin^2\varphi,$$

$$(x^2-4)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}-m^2 y=\frac{m(m\sin m\varphi\sin\varphi+\cos m\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi}-\frac{m\cos m\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$-m^2\sin m\varphi=0,$$

so dass wirklich $\sin m\varphi$ der vorgelegten Gleichung genügt, w o b e i e s g a n z g l e i c h g i l t i g i s t, w a s m s e y. Nach §. 107, V erhält man für den andern Werth $\cos m\varphi$. Demnach ist das allgemeine Integral von (k) bei beliebigem m:

$$y=C_1\sin m\varphi+C_2\cos m\varphi,\ \cos\varphi=\tfrac{1}{2}x. \qquad (k')$$

Die Formel (k′) setzt voraus, dass $\frac{1}{2}x$ zwischen -1 und $+1$ liege; liegt $\frac{1}{2}x$ jenseits dieser Gränzen, so ist φ nicht reell. Nun ist aber wenn $C_1=(E_1-E_2)i$, $C_2=E_1+E_2$:

$$C_1\sin m\varphi+C_2\cos m\varphi=E_1(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)+E_2(\cos m\varphi-i\sin m\varphi)$$
$$=E_1e^{m\varphi i}+E_2e^{-m\varphi i}\ (\S.\,9,\,I)=E_1(e^{\varphi i})^m+E_2(e^{\varphi i})^{-m}=E_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m$$
$$+E_2(\cos\varphi-i\sin\varphi)^m=E_1\left(\frac{1}{2}x+i\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\right)^m+E_2\left(\frac{1}{2}x-i\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\right)$$
$$=\frac{E_1}{2^m}(x+\sqrt{x^2-4})^m+\frac{E_2}{2^m}(x-\sqrt{x^2-4})^m.$$

Ist nun $x^2>4$, so ist $\sqrt{x^2-4}$ reell, so dass also

$$y=C_1(x+\sqrt{x^2-4})^m+C_2(x-\sqrt{x^2-4})^m \qquad (k'')$$

jetzt als allgemeines Integral von (k) auftritt. Man findet leicht, dass man diess auch schreiben kann

$$y = C_1 (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2})^{2m} + C_2 (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2})^{2m}.$$

V.

Integration von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y = 0.$ (a)

I. Die vorgelegte Gleichung gehört zu §. 110, wo

$$\varphi = u^n + b,\ \psi = a u,\ \int \frac{\varphi}{\psi} \partial u = \frac{u^n}{n a} + \frac{b}{a} l(u);$$

also die dortige (p′) wenn $k = 0$:

$$u^{\frac{b}{a}} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} = 0.$$

Ist $\frac{b}{a} > 0$ so genügt man dieser Gleichung durch $u = 0$; in allen Fällen genügt man ihr, wenn $u^n = \pm \infty$, wo das obere Zeichen gilt, wenn $a < 0$, das untere wenn $a > 0$. Aus $u^n = \pm \infty$ folgt $u = \infty \sqrt[n]{\pm 1}$, wo nun die Wurzeln von ± 1 aus §. 9, III zu entnehmen sind. Sind die Werthe derselben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, so ist also das allgemeine Integral der Gleichung (a):

$$C_1 \int_0^{\infty \varepsilon_1} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u + C_2 \int_0^{\infty \varepsilon_2} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u + \ldots\ldots$$
$$+ C_n \int_0^{\infty \varepsilon_n} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u.$$

Setzt man $u = v \varepsilon_r$, so ist

$$\int_0^{\infty \varepsilon_r} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u = \varepsilon_r^{\frac{b}{a}} \int_0^{\infty} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{u \varepsilon_r x \pm \frac{u^n}{n a}} \partial u,$$

woraus leicht folgt dass

$$y = \int_0^{\infty} u^{\frac{b}{a} - 1} e^{\mp \frac{u^n}{n a}} (C_1 e^{\varepsilon_1 u x} + C_2 e^{\varepsilon_2 u x} + \ldots + C_n e^{\varepsilon_n u x}) \partial u, \quad \text{(b)}$$

wo in $e^{\mp \frac{u^n}{n a}}$ das obere Zeichen gilt für $a > 0$, das untere für $a < 0$, und wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die n Werthe von $\sqrt[n]{\mp 1}$ sind, die Zeichen wie so eben. Dabei muss $\frac{b}{a} > 0$ seyn.

II. Sind b und a von verschiedenen Zeichen, so differenziren wir die (a) μ mal (nach §. 18′) und haben:

$$\frac{\partial^{n+\mu} y}{\partial x^{n+\mu}} + a x \frac{\partial^{\mu+1} y}{\partial x^{\mu+1}} + a \mu \frac{\partial^{\mu} y}{\partial x^{\mu}} + b \frac{\partial^{\mu} y}{\partial x^{\mu}} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^{n+\mu} y}{\partial x^{n+\mu}} + a x \frac{\partial^{\mu+1} y}{\partial x^{\mu+1}} + (a\mu + b) \frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu} = 0.$$

Ist nun μ gross genug damit a und $a\mu + b$ dasselbe Zeichen haben (also $\mu + \frac{b}{a} > 0$ sey), so setze man $z = \frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu}$ und hat

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + a x \frac{\partial z}{\partial x} + (a\mu + b) z = 0, \tag{c}$$

welche Gleichung nun z nach I liefert und zwar mit n willkürlichen Konstanten.

Rückgehend hatte man

$$\frac{\partial^{n+\mu-1} y}{\partial x^{n+\mu-1}} + a x \frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu} + [a(\mu-1)+b] \frac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x^{\mu-1}} = 0,$$

$$\frac{\partial^{n+\mu-2} y}{\partial x^{n+\mu-2}} + a x \frac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x^{\mu-1}} + [a(\mu-2)+b] \frac{\partial^{\mu-2} y}{\partial x^{\mu-2}} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y = 0,$$

woraus, da $\frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu} (= z)$ bekannt ist, sich $\frac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x^{\mu-1}}, \ldots, y$ ergeben.

III. Ist die Gleichung $a r + b = 0$ für ein ganzes (positives) r möglich, so gelangt man so nicht zum Ziele. Alsdann hat man aber

$$\frac{\partial^{n+r} y}{\partial x^{n+r}} + a x \frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} + (a r + b) \frac{\partial^r y}{\partial x^r} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^{n+r} y}{\partial x^{n+r}} + a x \frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + a x z = 0,$$

welcher Gleichung man zu genügen hat, wenn $z = \frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}}$.

Beachtet man §. 110 II so ist

$$\int \frac{\varphi}{\psi} \partial u = \int \frac{u^{n-1}}{a} \partial u = \frac{u^n}{n a}; \quad e^{x u + \frac{u^n}{n a}}$$

wird für $u = 0$ zu 1, für $u = \infty \varepsilon_r$ zu 0, also hätte man

$$\left(e^{u x + \int \frac{\varphi}{\psi} \partial u}\right)_{\infty \varepsilon_r} - \left(e^{u x + \int \frac{\varphi}{\psi} \partial u}\right)_0 = -1$$

und es wäre

$$z = C_1 \int_0^{\infty \varepsilon_1} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u + C_2 \int_0^{\infty \varepsilon_2} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u + \ldots C_n \int_0^{\infty \varepsilon_n} e^{u x + \frac{u^n}{n a}} \partial u,$$

wenn

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0. \qquad (e)$$

Wie in I hat man aber auch

$$z = \int_0^\infty e^{\mp \frac{u^n}{n a}} \left(C_1 \varepsilon_1 e^{u \varepsilon_1 x} + C_2 \varepsilon_2 e^{u \varepsilon_2 x} + \ldots + C_n \varepsilon_n e^{u \varepsilon_n x}\right) \partial u. \qquad (d)$$

dann

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = C + \int_0^\infty e^{\mp \frac{u^n}{n a}} \left(C_1 \frac{e^{u \varepsilon_1 x} - 1}{u} + C_2 \frac{e^{u \varepsilon_2 x} - 1}{u} + \ldots + C_n \frac{e^{u \varepsilon_n x} - 1}{u}\right) \partial u, \qquad (d')$$

wo C eine weitere willkürliche Konstante, und

$$\int e^{\varepsilon_1 x u}\, \partial x = \frac{e^{\varepsilon_1 x u} - 1}{\varepsilon_1 u}$$

gesetzt wurde, damit für $u = 0$ nicht unendliche Grössen vorkommen.

Aus $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}$ ergibt sich nun wie in II zurückgehend: $\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}, \ldots, y$.

[illegible].

$$\text{Die Gleichung } \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^m \left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right). \qquad (a)$$

I. Wir stellen zuerst folgenden Satz auf:

Ist $z = \psi(x)$ das Integral von

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = x^{m-1} \left(a x \frac{\partial z}{\partial x} + b z\right), \qquad (b)$$

so ist

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(u x)\, \partial u \qquad (c)$$

das Integral von

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^m \left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right), \qquad (a)$$

unter einer Bedingung für die $n + 1$ Konstanten in ψ.

Aus der Annahme $\psi(x)$ genüge der (b) folgt:

$$\psi^{(n+1)}(x) = x^{m-1} [a x \psi'(x) + b \psi(x)],$$

also auch

$$\psi^{(n+1)}(v) = v^{m-1} [a v \psi'(v) + b \psi(v)],$$

d. h. wenn $u x = v$:

$$\psi^{(n+1)}(u x) = u^{m-1} x^{m-1} [a u x \psi'(u x) + b \psi(u x)]. \qquad (d)$$

Die (a) gibt, nochmals differenzirt:

$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = a x^{m+1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [(m+1) a + b] x^m \frac{\partial y}{\partial x} + m b x^{m-1} y, \qquad (a')$$

welche Gleichung allerdings um eine Ordnung höher ist als die (a). Setzt man hier den Werth (c) und beachtet, dass

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\,\partial u = \int_0^\infty u^{r+m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^r(ux)\,\partial u$$

(§. 85, I, §. 13), so soll

$$\int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \Big\{ u^{n+1}\psi^{n+1}(ux) - a x^{m+1} u^2 \psi^2(ux) - [(m+1)a+b]\, x^m u \psi'(ux) \\ - m b x^{m-1}\psi(ux)\Big\}\partial u \qquad \text{(e)}$$

gleich Null seyn. Wegen (d) ist aber die Grösse in den Klammern:

$$-a x^{m+1} u^2 \psi^2(ux) + \psi'(ux)\Big\{-(m+1)a - b + a u^{m+n}\Big\} u x^m + \psi(ux)\Big\{u^{n+m} - m\Big\} b x^{m-1}$$

$$= x^{m-1}\Big[-a x^2 u^2 \psi^2(ux) - \Big\{(m+1)a + b\Big\} u x \psi'(ux) + a u^{m+n} x \psi'(ux) \\ + b u^{n+m}\psi(ux) - m b \psi(ux)\Big] =$$

$$-\frac{x^{m-1}}{u^{m-1}} e^{\frac{u^{m+n}}{m+n}} \frac{\partial}{\partial u}\Big[b u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) + a x u^{m+1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux)\Big],$$

so dass das Integral

$$= -x^{m-1}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\Big[b u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) + a x u^{m+1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux)\Big]\partial u$$

ist.

Ist also die Grösse

$$u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [b\psi(ux) + a u x \psi'(ux)] \qquad \text{(f)}$$

Null für $u = 0$ und $u = \infty$, was bei positivem m im Allgemeinen der Fall seyn wird, so verschwindet das Integral.

Demnach genügt (c) der (a′). Damit aber auch (c) der (a) genüge, muss zwischen den $n+1$ Konstanten in (c) noch eine Beziehung bestehen, die man etwa finden kann, indem man beachtet, dass bei positivem m für $x=0$ nach (a) nothwendig $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 0$ seyn muss. (Vergl. die S. 93 angeführte Schrift von Spitzer.)

II. Für $m = 1$ sind die (a) und (b):

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x\left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right), \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = a x \frac{\partial z}{\partial x} + b z.$$

Da man letztere Gleichung integriren kann (vergleiche unter I), so ist erstere ebenfalls als integrirt anzusehen.

Für $m = 2$:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^2\left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right), \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = x\left(a x \frac{\partial z}{\partial x} + b z\right).$$

Letztere Gleichung kann, nach dem eben Gefundenen, integrirt werden, also auch erstere. Daraus ergibt sich offenbar dass die (a) für ein positives ganzes m integrirbar ist.

III. Sey $z = \psi(x)$ das Integral von

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \alpha x^m z, \tag{g}$$

so dass also

$$\psi^n(u x) = \alpha u^m x^m \psi(u x), \tag{g'}$$

so genügt die Grösse

$$y = \int_0^\infty u^{\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{m+n}}{a(m+n)}} \psi(u x) \partial u \tag{h}$$

der Gleichung (a), vorausgesetzt es seyen a, b, α von gleichem Zeichen.

Denn aus (h) folgt

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - x^m \left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right) = \int_0^\infty u^{\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{m+n}}{a(m+n)}}$$

$$[u^n \psi^n(u x) - a x^{m+1} u \psi'(u x) - b x^m \psi(u x)] \partial u$$

$$= \int_0^\infty u^{\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{m+n}}{a(m+n)}} [-a u x \psi'(u x) + (\alpha u^{m+n} - b) \psi(u x)] x^m \partial u$$

$$= -a x^m \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} [u^{\frac{b}{a}} e^{-\frac{\alpha u^{m+n}}{a(m+n)}} \psi(u x)] \partial u,$$

so dass unsere Behauptung richtig ist, wenn

$$u^{\frac{b}{a}} e^{-\frac{\alpha u^{m+n}}{a(m+n)}} \psi(u x)$$

für $u = 0$ und $u = \infty$ verschwindet.

IV. Ist $z = \psi(x)$ das Integral von (g), so ist das von (a):

$$y = \int_0^\infty u^{-\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{a(m+n)}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) \partial u, \tag{i}$$

vorausgesetzt, es verschwinde

$$u^{-\frac{b}{a}} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{a(m+n)}} \psi\left(\frac{x}{u}\right)$$

für $u = 0$ und $u = \infty$.

Denn es ist

$$\psi^n\left(\frac{x}{u}\right) = \frac{\alpha x^m}{u^m} \psi\left(\frac{x}{u}\right);$$

ferner

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - x^m \left(a x \frac{\partial y}{\partial x} + b y\right) = \int_0^\infty u^{-\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{m+n}}$$

$$\left[\frac{1}{u^n} \psi^n\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{a x^{m+1}}{u} \psi'\left(\frac{x}{u}\right) - b x^m \psi\left(\frac{x}{u}\right)\right] \partial u$$

$$= \int_0^\infty u^{-\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{a(m+n)}} \left[-\frac{a x^{m+1}}{u} \psi'\left(\frac{x}{u}\right) + \frac{\alpha x^m}{u^{m+n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) - b x^m \psi\left(\frac{x}{u}\right)\right] \partial u,$$

$$= x^m \int_0^\infty u^{-\frac{b}{a}-1} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{a(m+n)}} \left[-\frac{ax}{u}\psi'\left(\frac{x}{u}\right)+\left(\frac{\alpha}{u^{m+n}}-b\right)\psi\left(\frac{x}{u}\right)\right]\partial u$$

$$= a x^m \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\left[u^{-\frac{b}{a}} e^{-\frac{\alpha u^{-m-n}}{a(m+n)}} \psi\left(\frac{x}{u}\right)\right]\partial u,$$

wodurch der Satz erwiesen ist.

Dieser Satz ist jedoch von dem in III aufgeführten nicht verschieden, indem er sich sofort ergibt, wenn man in letzterem $\frac{1}{u}$ statt u setzt.

II.

Andere Form des Taylorschen Satzes.

I. Seyen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei Funktionen von x, die von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig sind; ihre Differentialquotienten $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ seyen eben so beschaffen und überdiess werde $\psi'(x)$ für die Werthe von x, die zwischen a und b liegen, nicht Null. — Die Grösse

$$F(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi(x) - [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi(x) \qquad \text{(a)}$$

ist alsdann ebenfalls endlich und stetig, so wie $F'(x)$. Ferner ist, wie sich sofort ergibt:

$$F(b) = F(a). \qquad \text{(b)}$$

Lässt man also in $F(x)$ die unabhängig Veränderliche x von a bis b gehen, so muss $F(x)$ zwischen diesen Werthen nothwendig wenigstens ein Maximum oder Minimum haben, da sonst nicht $F(b) = F(a)$ seyn könnte. Da aber $F'(x)$ nie unendlich wird, so gibt es also wenigstens einen Werth von x, der zwischen a und b liegt (also nicht geradezu a oder b ist), für den $F'(x) = 0$ ist (§. 24, I). Ist derselbe $= a + \Theta(b-a)$, wo Θ zwischen 0 und 1 liegt nicht aber 0 oder 1 selbst ist, so ist

$$[\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi'[a + \Theta(b-a)] = [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Da nun $\psi'[a + \Theta(b-a)]$ nicht Null, so folgt hieraus:

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'[a + \Theta(b-a)]}\,\varphi'[a + \Theta(b-a)]. \qquad \text{(c)}$$

Für $a = 0$, $b = h$:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(\Theta h)}\,\varphi'(\Theta h), \qquad \text{(d)}$$

welcher Satz voraussetzt, dass $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ endlich und stetig sind von $x = 0$ bis $x = h$ (widrigenfalls man mit diesen Grössen nicht weiter rechnen könnte), und dass $\psi'(x)$ nicht Null ist, wenn x zwischen 0 und h [für $x = 0$ oder $x = h$ darf übrigens $\psi'(x)$ wohl Null seyn, da nie $\Theta = 0$ oder $= 1$].

II. Man setze in (d):

$$\varphi(h) = f(a) - f(a-h) - \frac{h}{1}f'(a-h) - \frac{h^2}{1.2}f''(a-h) - \ldots - \frac{h^n}{1..n}f^n(a-h),$$

so ergibt sich

$$\varphi'(h)=\frac{h^n}{1..n}f^{n+1}(a-h),\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(\Theta h)=\frac{\Theta^n h^n}{1...n}f^{n+1}(a-\Theta h),$$

so dass

$$f(a)-f(a-h)-\frac{h}{1}f'(a-h)-\ldots-\frac{h^n}{1..n}f^n(a-h)=\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\Theta h)}\frac{\Theta^n h^n}{1...n}f^{n+1}(a-\Theta h).$$

Setzt man hier $1-\Theta$ für Θ, so ist auch (das neue) Θ zwischen 0 und 1 und man hat:

$$f(a)=f(a-h)+\frac{h}{1}f'(a-h)+..+\frac{h^n}{1..n}f^n(a-h)$$
$$+\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\Theta)h]}\frac{(1-\Theta)^n h^n}{1....n}f^{n+1}[a-h+\Theta h],$$

so dass wenn $a=h+x$:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+..+\frac{h^n}{1..n}f^n(x)+\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\Theta)h]}\frac{(1-\Theta)^n h^n}{1...n}f^{n+1}(x+\Theta h).\quad (e)$$

Hierin müssen $f(z), f'(z), .., f^{n+1}(z)$ endlich seyn von $z=x$ bis $z=x+h$; $\psi(z)$ ist eine beliebige Funktion die von $z=0$ bis $z=h$ endlich und stetig seyn muss, wobei überdiess nicht $\psi'(z)=0$ seyn darf für einen Werth von z, der zwischen 0 und h liegt. Θ liegt zwischen 0 und 1, wird aber nie 0 oder 1 seyn müssen. — Diess ist die gesuchte Form des Taylorschen Satzes (von Schlömilch).

III. Setzt man in (e) $\psi(z)=z^{1+a}$, $\psi'(z)=(1+a)z^a$, so ist $\psi'(z)$ nicht Null zwischen $z=0$ und $z=h$, wenn $a \overline{\overline{>}} 0$, und auch dann immer stetig. Alsdann ist

$$\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\Theta)h]}=\frac{h^{1+a}}{(1+a)h^a(1-\Theta)^a}=\frac{h}{(1+a)(1-\Theta)^a},$$

so dass also

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+....+\frac{h^n}{1..n}f^n(x)+\frac{(1-\Theta)^{n-a}h^{n+1}}{1.2...n(1+a)}f^{n+1}(x+\Theta h),\qquad (f)$$

wo nur $a \overline{\overline{>}} 0$ seyn muss. Setzt man $a=0$, oder $a=n$, so erhält man die beiden Formeln des §. 53, I.

§.

Das Integral $\overline{\int\int\int}_0^1 ..f(x y z .)(1-x)^{a-1}(1-y)^{b-1}(1-z)^{c-1}..y^a z^{a+b}..\partial x\,\partial y\,\partial z....$

I. Nach §. 83 stellt das Integral

$$\int_0^a \partial x \int_0^x f(x,y)\,\partial y \qquad (a)$$

einen Körperinhalt vor, der einerseits von der Ebene der xy, anderseits von der Fläche, deren Gleichung $z=f(x,y)$ ist, begränzt, während die Projektion des begränzenden Flächenstücks auf die Ebene der xy ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, dessen eine Kathete auf der positiven Abszissenaxe liegt und die Länge a hat, während die Hypothenuse durch den Koordinatenanfang geht. Daraus folgt aber sofort, dass der fragliche Körperinhalt auch gleich

$$\int_0^a \partial y \int_y^a f(x,y)\,\partial x \qquad \text{(b)}$$

seyn muss, so dass **die beiden Grössen (a) und (b) gleich sind.**

II. Setzt man in

$$\int_0^1 \partial\alpha \int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{a-1}\beta^a(1-\beta)^{b-1}\partial\beta \qquad \text{(c)}$$

$\beta = \frac{z}{\alpha}$, so wird diese Grösse zu

$$\int_0^1 \partial\alpha \int_0^\alpha f(z)(1-\alpha)^{a-1} z^a \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{b-1} \frac{\partial z}{\alpha^{a+1}},$$

d. h. nach dem Satze in I zu

$$\int_0^1 f(z) z^a \partial z \int_z^1 (1-\alpha)^{a-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{b-1}\frac{\partial\alpha}{\alpha^{a+1}}. \qquad \text{(d)}$$

Was nun

$$\int_z^1 (1-\alpha)^{a-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{b-1}\frac{\partial\alpha}{\alpha^{a+1}}$$

betrifft, so setzen wir $\alpha = \frac{z}{1-(1-z)\gamma}$, wodurch die Gränzen von γ sind: 0 und 1, und mithin

$$\int_z^1 (1-\alpha)^{a-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{b-1}\frac{\partial\alpha}{\alpha^{a+1}} = \int_0^1 (1-z)^{a+b-1}(1-\gamma)^{a-1}\gamma^{b-1}\frac{\partial\gamma}{z^a}$$
$$= \frac{(1-z)^{a+b-1}}{z^a}\,\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

(§. 162, V), so dass (d) ist

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1 f(z)(1-z)^{a+b-1}\partial z.$$

Hieraus folgt also:

$$\int_0^1 \partial\alpha \int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{a-1}\beta^a(1-\beta)^{b-1}\partial\beta = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1 f(z)(1-z)^{a+b-1}\partial z, \qquad \text{(e)}$$

wo freilich a und b positiv seyn müssen (§. 162, II).

III. Das Integral

$$\int_0^1 \partial\alpha \int_0^1 \partial\beta \int_0^1 f(\alpha\beta\gamma)(1-\alpha)^{a-1}(1-\beta)^{b-1}(1-\gamma)^{c-1}\beta^a\gamma^{a+b}\partial\gamma$$

wird nach der Formel (e) zunächst auf

$$\int_0^1 \partial\gamma \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1 f(z\gamma)(1-z)^{a+b-1}\gamma^{a+b}(1-\gamma)^{c-1}\partial z$$
$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1 \partial\gamma \int_0^1 f(\gamma z)(1-\gamma)^{c-1}(1-z)^{a+b-1}\gamma^{a+b}\partial z$$

zurückgeführt, worauf dieselbe Formel gibt:

$$\int_0^1 \partial z \int_0^1 f(z\gamma)(1-z)^{a+b-1}\gamma^{a+b}(1-\gamma)^{c-1}\partial\gamma = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}\int_0^1 f(u)(1-u)^{a+b+c-1}\partial u,$$

so dass

$$\int_0^1 \partial\alpha \int_0^1 \partial\beta \int_0^1 f(\alpha\beta\gamma)(1-\alpha)^{a-1}(1-\beta)^{b-1}(1-\gamma)^{c-1}\beta^a\gamma^{a+b}\partial\gamma$$
$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}\int_0^1 f(z)(1-z)^{a+b+c-1}\partial z.$$

IV. Allgemein ergibt sich:

$$\overline{\iiint}_0^1 .. f(\alpha_1\alpha_2..\alpha_n)(1-\alpha_1)^{a_1-1}(1-\alpha_2)^{a_2-1}..(1-\alpha_n)^{a_n-1}\alpha_2^{a_1}\alpha_3^{a_1+a_2}...$$
$$\alpha_n^{a_1+a_2+..+a_{n-1}}\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2..\partial\alpha_n$$
$$= \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)..\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1+a_2+..+a_n)}\int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{a_1+a_2+..+a_n-1}\partial\alpha. \qquad (f)$$

Als besondern Fall wollen wir etwa $f(\alpha)=\frac{\alpha^{a-1}}{(1+c\alpha)^m}$ wählen. Setzt man $a_1+..+a_n=\mu$, so ist das Integral zweiter Seite in (f) gleich

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{a-1}}{(1+c\alpha)^m}(1-\alpha)^{\mu-1}\partial\alpha,$$

und wird für $\alpha=\frac{1-z}{1+cz}$ zu

$$(1+c)^{\mu-m}\int_0^1 \frac{z^{\mu-1}(1-z)^{a-1}}{(1+cz)^{a+\mu-m}}\partial z,$$

so dass wenn $m=\mu+a$ diese Grösse

$$=\frac{1}{(1+c)^a}\int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^{a-1}\partial z=\frac{1}{(1+c)^a}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(a)}{\Gamma(\mu+a)} \text{ (§. 162, V).}$$

Demnach ist

$$\overline{\iiint}_0^1 \frac{...(1-\alpha_1)^{a_1-1}..(1-\alpha_n)^{a_n-1}\alpha_1^{a-1}\alpha_2^{a+a_1-1}..\alpha_n^{a+a_1..+a_{n-1}-1}}{(1+c\alpha_1\alpha_2..\alpha_n)^{a+a_1+..+a_n}}\partial\alpha_1..\partial\alpha_n$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a_1)..\Gamma(a_n)}{\Gamma(a+a_1+..a_n)}\cdot\frac{1}{(1+c)^a}, \qquad (g)$$

welche Gleichung eine Verallgemeinerung der Formel (i) in §. 162, V ist (wobei wir $a, a_1, .., a_n$ positiv, $c>-1$ voraussetzen).

Zusatz zu §. 157, IV.

Die (b) ist wenn $\beta>0$:

$$\int\frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2\,1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\beta}}arc\left(tg=\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\beta}}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right),$$

wenn man für x seinen Werth einsetzt. Will man nun hieraus das bestimmte Integral der ersten Seite von $\varphi=0$ bis $\varphi=\psi\left(\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ ermitteln, so muss die

zweite Seite von $\varphi=0$ bis $\varphi=\psi$ stetig verlaufen und es geschieht die Auswerthung einfach nach der Formel in §. 41. Diess stetige Verlaufen wird stattfinden wenn $1+\alpha \sin^2\varphi$ nicht Null ist von $\varphi=0$ bis $\varphi=\psi$.

Wird aber $1+\alpha \sin^2\varphi$ Null für $\varphi=\mu$, so springt bei $\varphi=\mu$ die zweite Seite obiger Gleichung von $\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$, ist also unstetig. Sey nun

$$\psi<\mu, \text{ wo } 1+\alpha \sin^2\mu=0,$$

so ist immerhin

$$\int_0^\psi \frac{1-\ldots\ldots-\alpha e^2 \sin^6\varphi}{(1+\alpha \sin^2\varphi)^2\ldots\ldots} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{\beta}} arc\left(tg=\frac{\sin\psi\cos\psi\sqrt{\beta}}{(1+\alpha\sin^2\psi)\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\right);$$

ist aber

$$\psi>\mu, \text{ wo } 1+\alpha \sin^2\mu=0,$$

so ist das Integral in zwei zu trennen: von 0 bis μ, und von μ bis ψ; das erste ist $\frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{\pi}{2}$, das zweite aber

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} arc\left(tg=\frac{\sin\psi\cos\psi\sqrt{\beta}}{(1+\alpha\sin^2\psi)\sqrt{1-e^2\sin\psi}}\right)-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

so dass jetzt

$$\int_0^\psi \frac{1-\ldots\ldots-\alpha e^2 \sin^6\varphi}{(1+\alpha \sin^2\varphi)^2\ldots\ldots} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}} arc\left(tg=\frac{\sin\psi\cos\psi\sqrt{\beta}}{(1+\alpha\sin^2\psi)\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\right).$$

Ist β negativ und setzt man also $-\beta$ dafür, so ist

$$\int\frac{\partial x}{1-\beta x^2}=\frac{1}{2\beta} l\left(\frac{1+x\sqrt{\beta}}{1-x\sqrt{\beta}}\right);$$

da aber immer $\beta x^2<1$ seyn muss, indem sonst das Integral $\int\frac{\partial x}{1-\beta x^2}$ nicht zulässig ist, so fällt für ein negatives β die obige Betrachtung weg.

Zu „Anhang" 𝔄, IV, 2 (und 1).

1) Man kann die Reihe

$$\frac{r-m}{r+1}+\frac{(r-m)(r-m+1)}{(r+1)(r+2)}+\ldots$$

nicht unmittelbar mit der in I vergleichen, weil in letzterer m eine ganze Zahl ist, diess aber mit m hier, also mit $r-m$ nicht allgemein der Fall seyn wird. Man wird aber durch folgende Betrachtung zum Ziele gelangen. (Vergl. „Grundzüge" S. 20). Es ist identisch

$$1+\frac{a_1-b_1}{b_1}+\frac{a_2-b_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_3-b_3}{b_3}\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}+\ldots+\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{b_{n+1}}\frac{a_1 a_2\ldots a_n}{b_1 b_2\ldots b_n}=\frac{a_1 a_2\ldots a_{n+1}}{b_1 b_2\ldots b_{n+1}},$$

wie sich durch unmittelbare Addition ergibt. Setzt man nun

$a_1 = \alpha,\ a_2 = \alpha + \gamma, \ldots, a_{n+1} = \alpha + n\gamma;\ b_1 = \beta,\ b_2 = \beta + \gamma, \ldots, b_{n+1} = \beta + n\gamma,$
so erhält man

$$1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\beta+2\gamma}\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \ldots + \frac{\alpha-\gamma}{\beta+n\gamma}\frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+\overline{n-1}\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+\overline{n-1}\gamma)}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)},$$

also wenn man $\alpha+\gamma$ für α setzt:

$$(\alpha+\gamma-\beta)\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \ldots + \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)+\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)}\right]$$
$$= \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots(\alpha+\overline{n+1}\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} - 1,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\gamma-\beta}\left[\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots(\alpha+\overline{n+1}\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} - 1\right], \qquad \text{(a)}$$

in welcher Gleichung übrigens nicht $\alpha+\gamma-\beta=0$ seyn soll und eben so auch keine der Grössen $\beta,\ \beta+\gamma,\ \beta+2\gamma, \ldots, \beta+n\gamma$ Null seyn darf, da sonst die Division nicht gestattet ist.

Ist nun $\beta > \alpha+\gamma$ und sind dabei α, β, γ positiv, so ist immer

$$\frac{(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+\overline{n+1}\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} < 1$$

also endlich, selbst für ein unendlich grosses n. Daraus folgt dann sofort dass die Reihe

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \ldots\ldots \qquad \text{(b)}$$

konvergent ist für $\beta > \alpha+\gamma$ und α, β, γ positiv.

Setzt man hier nun

$$\alpha = r - m,\ \gamma = 1,\ \beta = r+1, \text{ also } \alpha+\gamma = r+1-m,$$

so ist $\beta > \alpha+\gamma$ so lange $m > 0$ und folglich ist die Reihe

$$\frac{r-m}{r+1} + \frac{(r-m)(r-m+1)}{(r+1)(r+2)} + \ldots$$

konvergent für $m > 0$.

2) Da in IV, 1 f(x) negativ für $x > a > 0$, so kann man Anstand erheben den Satz III sofort gelten zu lassen. Allein es ist jedenfalls ($r > a$)

$$\int_r^{r+1} l\left(\frac{x-a}{x}\right)\partial x = l\left(\frac{r+\Theta-a}{r+\Theta}\right) = l\left(1 - \frac{a}{r+\Theta}\right) > l\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

woraus wenn r und s ganze Zahlen ($r > a$):

$$\int_r^{r+s+1} l\left(\frac{x-a}{x}\right)\partial x > l\left(1-\frac{a}{r}\right) + l\left(1-\frac{a}{r+1}\right) + \ldots + l\left(1-\frac{a}{r+s}\right),$$

d. h.

$$l\left[\frac{r-a}{r}.\frac{r+1-a}{r+1}\cdots\cdots\frac{r+s-a}{r+s}\right]<(r+s+1-a)\,l\left(1-\frac{a}{r+s+1}\right)$$
$$-a\,l\left(\frac{r+s+1}{r}\right)-(r-a)\,l\left(1-\frac{a}{r}\right),$$

$$l\left(\frac{r-a}{r}\;\frac{r+1-a}{r+1}\cdots\cdots\frac{n+1-a}{n+1}\right)<(n+2-a)\,l\left(1-\frac{a}{n+2}\right)$$
$$-a\,l\left(\frac{n+2}{r}\right)-(r-a)\,l\left(1-\frac{a}{r}\right),$$

$$\frac{r-a}{r}\;\frac{r+1-a}{r+1}\cdots\cdots\frac{n+1-a}{n+1}<\left(1-\frac{a}{n+2}\right)^{n+2-a}\left(\frac{r}{n+2}\right)^{a}$$
$$\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-(r-a)}.$$

Lässt man hier n unbegränzt wachsen so nähert sich $\left(1-\frac{a}{n+2}\right)^{n+2-a}$ der Grösse e^{-a} (§. 8), bleibt also endlich wie $\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-(r-a)}$; da der Faktor $\left(\frac{r}{n+2}\right)^{a}$ aber bei $a>0$ gegen Null geht, so geht das Produkt der zweiten Seite gegen Null. Die erste Seite ist, weil $r>a$, immer positiv, woraus nun folgt dass

$$Gr\,\frac{r-a}{r}\;\frac{r+1-a}{r+1}\cdots\frac{n+1-a}{n+1}=0,\; r>a>0. \qquad \text{(c)}$$

Setzt man $a=m+1$, wo also $m>-1$ seyn muss, so ist

$$Gr\,\frac{r-m-1}{r}\;\frac{r-m}{r+1}\cdots\frac{n-m}{n+1}=0,\; m>-1,$$

$$Gr\pm\frac{m+1-r}{r}\;\frac{m-r}{r+1}\cdots\frac{m-n}{n+1}=0,$$

$$Gr\pm\frac{m(m-1)..(m-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}\;\frac{(m-r+1)\,(m-r)\ldots.(m-n)}{r(r+1)\ldots.(n+1)}=0,$$

$$Gr\,\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1.2\ldots..(n+1)}=0,\; m>-1.$$

Für $m=-1$ ist die erste Seite ± 1, für $m<-1$ aber unendlich.

3) Es ist

$$\int l\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\partial x=(a+x)\,l(a+x)-(b+x)\,l(b+x);\; \frac{\partial}{\partial x}\,l\left(\frac{a+x}{b+x}\right)=\frac{b-a}{(a+x)\,(b+x)},$$

ist also $b>a>0$ und $x>0$, so wächst $l\left(\frac{a+x}{b+x}\right)$ mit x. Daraus folgt (wenn r eine positive Zahl)

$$\int_r^{r+1} l\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\partial x=l\left(\frac{a+r+\theta}{b+r+\theta}\right)>l\left(\frac{a+r}{b+r}\right).$$

Setzt man hier nach einander $r=0,\,1,\,\ldots.,\,n$ und addirt:

$$\int_0^{n+1} l\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\partial x>l\left(\frac{a}{b}\right)+l\left(\frac{a+1}{b+1}\right)+\ldots.+l\left(\frac{a+n}{b+n}\right)$$

d. h.

$$l\,\frac{a(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n)}{b(b+1)\,(b+2)\ldots(b+n)}<(a+n+1)\,l(a+n+1)-(b+n+1)\,l(b+n+1)$$
$$-a\,l(a)+b\,l(b),$$

$$\frac{a(a+1)\ldots.(a+n)}{b(b+1)\ldots.(b+n)} < \frac{(a+n+1)^{a+n+1}}{(b+n+1)^{b+n+1}}\frac{b^b}{a^a} < \frac{\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1+a}(n+1)^{a+n+1}}{\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^{n+1+b}(n+1)^{b+n+1}}\frac{b^b}{a^a}$$

$$< \frac{\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{a}}{\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^{b}} \times$$

$$\frac{1}{(n+1)^{b-a}}\frac{b^b}{a^a},\ b>a>0.$$

Die erste Seite ist immer positiv; auf der zweiten werden mit unendlich wachsendem n:

$\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ zu e^a, $\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^{n+1}$ zu e^b; $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{a}$ und $\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^{b}$ zu 1;

$\frac{1}{(n+1)^{b-a}}$ zu Null, so dass der Gränzwerth der zweiten Seite Null ist. Daraus folgt:

$$Gr\,\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)} = 0,\ b>a>0. \qquad (d)$$

Setzt man $a=\frac{\alpha}{\gamma}$, $b=\frac{\beta}{\gamma}$ und nimmt α, β, γ positiv, $\beta>\alpha$, so ist

$$Gr\,\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} = 0,\ \beta>\alpha>0,\ \gamma>0. \qquad (d')$$

Hieraus folgt in (a)

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)}+\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)}+\ldots.. = \frac{\alpha}{\beta-(\alpha+\gamma)},\ (\beta>\alpha+\gamma, \alpha, \beta, \gamma \text{ pos.}). \qquad (e)$$

Verbesserungen.

I. Band.

Seite	Zeile	von		statt	lies
Seite 82	Zeile 6	von oben	statt	Null	lies $\frac{0}{0}$.
„ 145	„ 6	„ „	„	g	lies b.
„ 155	„ 3	„ „	„	6	„ 5.
„ 176	„ 7	„ unten	„	:	„ ; .
„ 191	„ 6	„ „	„	a	„ α.
„ 203	„ 5	„ oben	„	.	„ , .
„ 204	„ 2	„ „	„	(a + h	lies (a + h).
„ 207	„ 12	„ „	„	h^{n+1}	„ x^{n+1}.
„ 225	„ 17	„ „	„	will	„ will, von $x = a$ an.
„ 254	„ 5	„ „	„	$\frac{1}{720}$	„ $\frac{1}{720}$ und.
„ 343	„ 7	„ „	„	$(n + 1 \varphi$	lies $(n + 1) \varphi$.
„ 353	„ 6	„ unten	„	$\alpha^2 + \varrho^2$	lies $\alpha^2 + \varphi^2$.

II. Band.

Seite	Zeile	von		statt	lies
Seite 10	Zeile 1 und 2	von oben	statt	ϑ	lies 6.
„ 57	„ 4	von unten	statt	$a (m + 1)$	lies $a + (m + 1)$.
„ 88	„ 21	„ oben	„	$a + a x$	lies $a + b x$
„ 94	„ 10	„ „	„	die	lies die so.
„ 136	„ 14	„ „	„	X_3	lies X_2.
„ 136	„ 16	„ „	„	X_2	„ X_1.
„ 147	„ 14	„ „	„	$+$	„ $\mp$.
„ 233	„ 14	„ „	„	u	„ x.
„ 236	„ 10	„ unten	„	$\frac{\pi}{8}$	„ $\frac{\pi}{8}$, .
„ 273	„ 13	„ oben	„	x —	lies y —.
„ 283	„ 6	„ „	„	$\int_c^a$	„ $\int_0^a$.
„ 315	„ 4	„ „	„	x	lies u.
„ 340	„ 6 und 11	von unten	statt	φ	lies ϱ.
„ 368	„ 6	von oben	statt	$\frac{r + s - a}{r + 1}$	lies $\frac{r + s - a}{r + s}$.
„ 370	„ 1	„ „	„	$\pm$	lies $\mp$.

Digitized by Google

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

